

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الجامعة المستنصرية

الكهر ومغناطيسيات

ترجمة

الدكتور علي ابراهيم مهدي العزاوي

(B.Sc., M.Sc., Ph. D., M. Inst. P .)

قسم الفيزياء / كلية التربية / الجامعة المستنصرية

الكتاب الأصل

ELECTROMAGNETICS

by : B.B. Laud

Wiley Eastern Limited

تقديم

مما لاشك فيه ان المكتبة العربية تفتقر كثيراً الى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والعملية ، كما ان الدراسة في جامعاتنا العربية ماتزال في حاجة ماسة الى وجود العديد من المراجع باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم. ان العمل على سد هذا النقص يسهم الى حد كبير في اعداد الاجيال التي نريد لها ان تبني صرح النهضة والحضارة على اسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم.

ومن هذا المنطلق ، كان قرار وزارة التعليم العالي والبحث العلمي في تعريب التعليم الجامعي حافزاً ومشجعاً لترجمة كتاب الكهرومغناطيسيات لمؤلفه بي . بي . لاود ووضعه بين ايادي طلبة المرحلة الجامعية الأولية ومرحلة الماجستير لكليات العلوم والتربية والهندسة. آملاً ان يكون هذا الكتاب محققاً الفائدة المرجوة لهم. وان يسد ثغرة في مكتبتنا العربية وينتفع به ابناء بلدنا العزيز.

ومن الله التوفيق ؟

الدكتور

علي ابراهيم مهدي الغزاوي

المقدمة

اصبحت الكهرومغناطيسية جزءاً من اساسيات الفيزياء كما انها عنصر جوهري لكل مناهج الفيزياء في مختلف المستويات. كتب هذا الكتاب ليكون كتاباً منهجياً لطلبة البكالوريوس B.Sc والماجستير M.Sc في الفيزياء.

ان طريقة الاقتراب فرضتها الرغبة في ايفاء متطلبات الطالب. لذا فان اول ما يفي به الكتاب هو تمكين الطالب من تملك زمام الموضوع بصورة مقنعة وجعله يدرك مدى صحته وفائدته ، وطورت الافكار الاساسية له بموجب الخطوط المألوفة.

ان جوهر الكهرومغناطيسية رياضي الخواص. وبدون الرياضيات كأداة مساعدة للتفكير يصبح تطور الكهرومغناطيسية امراً مستحيلاً ، مع ذلك لم تجر اي محاولة لانجاز رياضي صارم لانه من الصعوبة ان تكون اكثر صراحة مما هو موجود في الكتاب دون تحويل انظار الطالب عن المستوى الفيزيائي الاجرائي ولا يحتاج الطالب للسير في مادة هذا الكتاب الى خلفية رياضية اعنى من رياضيات المرحلة الجامعية الاولى المألوفة لحساب التفاضل والتكامل وتحليل المتجهات. اما التقنيات الأكثر تقدماً فهي مشروحة ومفسرة عند ظهورها.

توفر المسائل في نهاية كل فصل التفاصيل التي لا عمل لها في جسم المنهج وكذلك تهدف الى تطبيقات اضافية ، وهي محاولة لاختبار مدى فهم الطالب للمفاهيم التي يتناولها الفصل. تشير قائمة المصادر في نهاية الكتاب الى دين المؤلف لافكار غيره، لكن القائمة منهكة او متمعة قطعاً.

بي . بي . لاود

محتويات الكتاب

الصفحة

٣

تقديم

٥

المقدمة

٧

محتويات الكتاب

١٥

دليل الرموز

١٩

الفصل الاول : القوة - المجال والطاقة في الكهربائية المستقرة

٢١

1.1 قانون كولومب .

٢٦

1.2 مبدأ التراكب .

٢٧

1.3 المجال الكهربائي .

٢٢

1.4 خطوط وأنايبب القوة .

٢٣

1.5 الفيض الكهربائي .

٢٤

1.6 قانون كاوس (الصيغة التكاملية)

٢٧

1.7 قانون كاوس (الصيغة التفاضلية) .

٢٨

1.8 بعض التطبيقات لقانون كاوس .

٤٦

1.9 مبرهنة مفيدة في الكهربائية المستقرة .

٤٧

1.10 الجهد الكهربائي المستقر .

٥٠

1.11 العلاقة بين المجال والجهد .

٥٥

1.12 علاقتان مهمتان .

٥٦

1.13 السطح المتساوي الجهد .

٥٧

1.14 الطاقة الكهربائية المستقرة .

٦٠

1.15 ثنائي القطب الكهربائي .

٦٥

1.16 ثنائي القطب في مجال منتظم .

٦٦

1.17 ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم .

٦٧

1.18 الطاقة الكامنة المتبادلة بين اثنين من ثنائي القطب .

٦٧

1.19 الطبقات المزدوجة الكهربائية .

٦٩ 1-20 رباعي القطب الكهربائي .

٧٠ 1-21 الجهد الناتج من توزيع شحنات بصورة اعتباطية .

٧٤ تمارين الفصل الاول

٧٧ الفصل الثاني : الكهربائية المستقرة في المواد العازلة

٧٩ 2-1 الموصلات والعوازل .

٧٩ 1 - المواد الموصلة .

٨٠ 2 - المواد العازلة .

٨٠ 2-2 الموصل في مجال كهربائي .

٨١ 2-3 المجال الكهربائي عند سطح موصل مشحون .

٨٢ 2-4 المتسعات .

٨٣ 1- المتسعة ذات الألواح المتوازية .

٨٣ 2- سعة متسعة على شكل كرة معزولة .

٨٤ 3- متسعة كبل ذو موصلين متحدي المحور .

٨٥ 2-5 طاقة المتسعة .

٨٨ 2-6 الاستجابة الكهربائية لوسط غير موصل للمجال الكهربائي .

٨٩ 2-7 الاستقطاب الكهربائي المستقر .

٩٦ 2-8 قوانين المجال الكهربائي المستقر .

١٠١ 2-9 طاقة المجال بوجود عازل .

١٠٣ 2-10 شروط الحدود الفاصلة .

١٠٧ 2-11 العوازل الغازية اللاقطبية .

١١٠ 2-12 العوازل الغازية القطبية .

١١٢ 2-13 السوائل اللاقطبية .

١١٧ 2-14 العوازل الصلبة - اجسام عازلة ذات القطب كهربائية

مختلفة دائمية .

١١٨ 2-15 اجهادات المجال الكهربائي .

١٢٠ تمارين الفصل الثاني

١٢٣ الفصل الثالث : مسائل القيمة الحدودية في مجالات
الكهربائية المستقرة .

١٢٥ 3.1 معادلات بواسون ولاپلاس .

١٢٧ 3.2 مبرهنة ايرنشو .

١٢٨ 3.3 الشروط الحدودية ومبرهنة التوحد .

١٣٠ 3.4 حل معادلة لابلاس في احداثيات متعامدة .

١٣٥ 3.5 معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكروية .

١٣٨ 3.6 معادلة ليكندر .

١٤٦ 3.7 دوال ليكندر المرافقة .

١٥٧ 3.8 معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية .

١٦٦ 3.9 حل معادلة لابلاس باستخدام دالة كرين .

١٧٤ 3.10 التمدد متعدد الاقطاب .

١٧٨ 3.11 طريقة الصور الكهربائية المستقرة

١٨٦ 3.12 الصور في العوازل .

١٩٣ تمارين الفصل الثالث

١٩٧ الفصل الرابع : المغناطيسية المستقرة .

١٩٩ 4.1 التيار الكهربائي .

٢٠١ 4.2 قانون أوم - الموصلية الكهربائية .

٢٠٣ 4.3 حساب المقاومة .

٢٠٥ 4.4 التأثيرات المغناطيسية

٢٠٦ 4.5 المجال المغناطيسي

٢٠٨ 4.6 القوة على تيار .

٢٠٨ 4.7 قانون بايوت - سافارت

٢١٤	4.8 قوانين المغناطيسية المستقرة
٢١٧	4.9 الجهد المغناطيسي
٢١٧	A - جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه
٢١٩	B - الجهد المتجه
	4.10 اطارات التيار في المجالات الخارجية - ثنائي القطب
٢٢٤	المغناطيسي ..
٢٢٦	4.11 ثنائي قطب مغناطيسي - في مجال مغناطيسي غير منتظم ..
٢٢٧	4.12 جهد الكمية المغناطيسية المتجه الناتج من اطار تيار صغير
	4.13 طريقة بديلة لايجاد الجهد المتجه A ومنه المجال B الناتج
٢٢٩	من اطار تيار ..
٢٣٢	4.14 الاوساط المغناطيسية
٢٣٤	4.15 التفضط
٢٣٨	4.16 متجه المجال المغناطيسي
٢٣٩	4.17 المتأثرية المغناطيسية والنفوذية
٢٤٠	4.18 الشروط الحدودية
٢٤٢	4.19 كرة ممغنطة بانتظام في مجال مغناطيسي ..
٢٤٤	4.20 مقارنة بين المجالات الكهربائية والمغناطيسية المستقرة
٢٤٦	تمارين الفصل الرابع
٢٤٩	الفصل الخامس : الحث الكهرومغناطيسي ..
٢٥١	5.1 القوة الدافعة الكهربائية .
٢٥٤	5.2 قانون فاراداي للحث الكهرومغناطيسي
٢٥٥	5.3 قانون الحث للدوائر المتحركة .
٢٥٧	5.4 الصيغتين التكاملية والتفاضلية لقانون فاراداي

٢٥٩	5.5 الحث الذاتي والحث المتبادل
٢٦٢	5.6 الطاقة في المجالات المغناطيسية .
٢٦٢	A الطاقة المغناطيسية المخزونة في مادة حافة
٢٦٣	B الطاقة المغناطيسية المخزونة في سلسلة من المحاثات
٢٦٦	5.7 معادلات ماكسويل ..
٢٦٩	5.8 اضمحلال الشحنة الحرة .
٢٧٠	5.9 جهود المجال الكهرومغناطيسي .
٢٧٤	5.10 المزيد حول شرط لورنتس المقياسي .
٢٧٦	5.11 طاقة المجال وزخم المجال .
٢٨١	تمارين الفصل الخامس

٢٨٣	الفصل السادس : الموجات الكهربائية المستقرة
٢٨٥	6.1 الامواج المستوية في الاوساط غير الموصلة
٢٩٢	6.2 الاستقطاب
٢٩٤	6.3 فيض الطاقة في الموجة المستوية
٢٩٨	6.4 الموجات المستوية في وسط موصل .
٣٠٠	6.5 الظاهرة السطحية .
٣٠٣	تمارين الفصل السادس ..

٣٠٥	الفصل السابع : الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة .
٣٠٧	7.1 انعكاس وانكسار الموجات المستوية عند تداخل مستوي .
٣١٤	7.2 الانعكاس الداخلي الكلي ..
٣١٨	7.3 الانعكاس من سطح معدني .
٣٢٢	تمارين الفصل السابع

الفصل الثامن : دلائل الموجة .

٣٢٣

٣٢٥

8.1 انتشار الموجات بين المستويات الموصلة

٣٢٩

8.2 الموجات في دلائل مقاطع عرضية اعتباطية .

٣٣٣

8.3 دلائل الموجة ذات المقطع العرضي المتعامد .

٣٣٦

8.4 التجاوب الرنانة .

٣٣٨

8.5 دلائل موجة العازل .

٣٤٢

تمارين الفصل الثامن

٣٤٣

الفصل التاسع : الاشعاع الكهرومغناطيسي .

٣٤٥

9.1 الجهود المعوقة

٣٤٩

9.2 اشعاع من ثنائي قطب متذبذب .

٣٥٦

9.3 الهوائي الخطي .

٣٥٩

9.4 جهود لينارد - ويشرت .

٣٦٢

9.5 جهود شحنة في حركة منتظمة - صيغة لورنتس .

٣٦٥

9.6 مجالات شحنة معجلة .

٣٦٩

9.7 الاشعاع الناتج من جسم معجل في سرعة بطيئة .

٣٧١

9.8 الاشعاع عندما تكون سرعة وتمجيل الجسيمات في خط واحد .

٣٧٢

9.9 اشعاع صادر من جسم مشحون يتحرك في مدار دائري .

٣٧٤

9.10 اشعاع رباعي القطب الكهربائي .

٣٧٧

تمارين الفصل التاسع .

٣٧٩	الفصل العاشر : الكهروديناميك النسبية ..
٣٨٢	10-1 تحويل كاليليان
٣٨٦	10-2 فرضيات النظرية النسبية الخاصة
٣٨٧	10-3 تحويل لورنتس
٣٩٠	10-4 بعض النتائج المترتبة على تحويل لورنتس .
٣٩٢	10-5 الشحنات والمجالات كما تراقب في اطارات مختلفة .
٣٩٥	10-6 تحويل لورنتس كتحويل تعامدي .
٣٩٨	10-7 الصيغ المتغايرة للكهروديناميك
٤٠١	10-8 ممتدات المجال الكهرومغناطيسي .
٤٠٤	10-9 تحويل المجالات .
٤٠٦	10-10 المجال الناتج من شحنة نقطية في حركة منتظمة
٤٠٨	10-11 صياغة لاكرانجيان لحركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي
٤١٥	10-12 اشعاع من الجسيمات النسبية .
٤١٧	تمارين الفصل العاشر .
٤١٩	الفصل الحادي عشر : الاستطارة
٤٢١	11-1 استطارة الاشعاع
٤٢٤	11-2 خمود الاشعاع .
٤٢٧	11-3 التفريق في الغازات المخففة .
٤٢٩	11-4 التفريق في المواد السائلة والصلبة .
٤٣١	11-5 وسط حاوي على الكترولونات حرة .
٤٣٢	تمارين الفصل الحادي عشر .

- ٤٣٣ الفصل الثاني عشر : فيزياء البلازما .
- ٤٣٥ 12-1 شبه تعادلية البلازما .
- ٤٣٨ 12-2 سلوك البلازما في المجال المغناطيسي
- ٤٤٣ 12-3 البلازما كإلحاق موصل - المغناطيسية الهيدروديناميكية .
- ٤٤٦ 12-4 حصر مغناطيسي - تأثير الحشر
(بمرور تيار كهربائي قوي)
- ٤٤٨ 12-5 عدم الاستقرارية .
- ٤٤٩ 12-6 موجات البلازما .
- ٤٥٠ 1- تذبذبات (الالكترون) .
- ٤٥١ 2- الهيدروديناميكية او موجات ألفن .
- ٤٥٣ تمارين الفصل الثاني عشر .
- ٤٥٧ الملحق (A) المتجهات .
- ٤٥٧ A-1 مفهوم المتجه .
- ٤٥٨ A 2 جبر المتجهات .
- ٤٦٤ 3- A تفاضل وتكامل المتجهات
- ٤٧٩ 4- A بعض علاقات المتجهات المفيدة .
- ٤٨٠ الملحق (B) - تحويلات الكميات من النظام الكاوسي الى النظام العالمي .
- ٤٨١ الملحق (C) - تحويلات الوحدات الكهربائية والمغناطيسية .
- ٤٨٢ الملحق (D) - الثوابت الفيزيائية .
- ٤٨٣ اجوبة تمارين الكتاب .
- ٤٧٨ تعريب المصطلحات العلمية الواردة في الكتاب وفقاً
للحروف الهجائية .
- ٥٠٧ المراجع

دليل الرموز
A Guide to Symbols

	<u>(Symbol) الرمز</u>	<u>(Explanation) الشرح</u>
α	Polarizability of the atom	استقطابية الذرة
A_m	Molecular refractivity	الانكسار النوعي الجزيئي
A	Vector potential	الجهد المتجه
A	Four vector potential	الجهد المتجه الرباعي
B	Magnetic flux density	كثافة التدفق (الفيض) المغناطيسي
χ	Electric susceptibility	التأثرية الكهربائية
χ_m	Magnetic susceptibility	التأثرية المغناطيسية
c	Velocity of light	سرعة الضوء
C	Capacitance	السعة
δ	Skin depth	العمق السطحي
δ_{nm}	Kronecker delta	دلتا كرونكر
$\delta(\vec{r})$	Dirac delta function	دالة دلتا لديراك
Δ	$\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	
D	Electric displacement	الازاحة الكهربائية
ϵ	Permittivity	السماحية
ϵ_r	Relative permittivity	السماحية النسبية
	dielectric constant	ثابت العزل
\mathcal{E}	E.M.F	القوة الدافعة الكهربائية
e	Electronic charge	الشحنة الالكترونية
\hat{e}_r	Unit vector in the direction	متجه الوحدة باتجاه r
E	Electric field strength	شدة المجال الكهربائي
ϕ	Electrostatic potential	جهد الكهربائي المستقرة
Φ	Magnetic flux	التدفق (الفيض) المغناطيسي

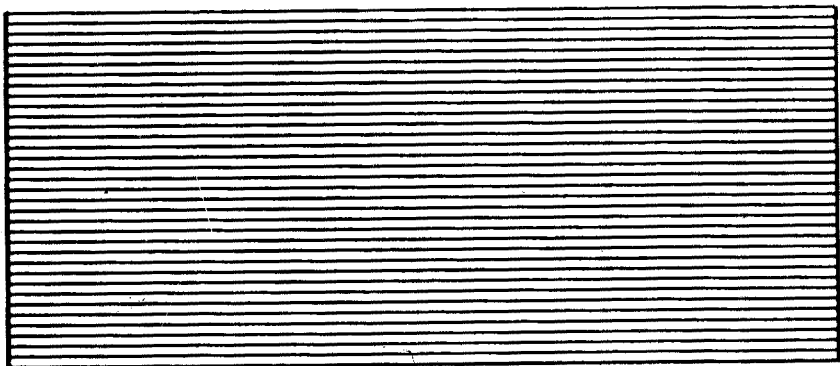
ϕ_m	Magnetic scalar potential	الجهد المغناطيسي غير المتجه
\mathbf{F}	Force	القوة
$F_{\mu\nu}$	Electromagnetic field tensor	كثافة ممتدة المجال الكهرومغناطيسي
γ	Damping coefficient	معامل الاضمحلال
$\mathcal{G}(x, x')$	Green's function	دالة كرين
\mathbf{H}	Magnetic field strength	شدة المجال المغناطيسي
I	Current	التيار
\mathbf{J}	Current density	كثافة التيار
J_n	Bessel's function	دالة بسيل
\mathcal{J}	Four - vector current density	كثافة التيار المتجه الرباعية
\mathbf{k}	Propagation vector	متجه الانتشار
λ	Charge per unit length, Wavelength	الشحنة لكل وحدة طول الطول الموجي
λ	Gravitational constant	ثابت الجاذبية الارضية
\mathcal{L}	Differential operator	عامل التكامل
$*L$	Self - inductance	معامل الحث الذاتي
	Lagrangian	لاكرانجيان
$*M$	permeability	النفوذية
	Magnetic moment	العزم المغناطيسي
m	Magnetic dipole moment	عزم ثنائي القطب المغناطيسي
M	Mutual inductance	الحث المتبادل
n	Refractive index	معامل الانكسار
\mathbf{N}	Poynting vector	متجه بوينتنگ
Ω	Ohm	اوم

	Solid angle ;	الزاوية الجسمة
P	Dipole moment	عزم ثنائي القطب
P	Macroscopic polarization density	كثافة الاستقطاب العينية
\mathcal{P}	Magnetic pressure	الضغط المغناطيسي
P_l	Legendre polynomial	متعددة الحدود ليكندر
P_l^m	Associated Legendre polynomial	متعددة الحدود ليكندر المتحدة
q, Q	Charge	الشحنة
ρ	Charge density	كثافة الشحنة
	resistance	مقاومة معامل الانعكاس
R	Reflection coefficient	
	; scattering cross - section	المقطع العرضي للاستطارة
σ	Conductivity	الموصلية
S_l	Surface harmonic	التوافيق السطحي
τ	torque	عزم الازدواج
	relaxation time;	زمن الاسترخاء
T	Transmission coefficient	معامل الانتقال
U	Energy	طاقة
U	Four - vector velocity	سرعة المتجه الرباعية
V	Potential	جهد
V	Volume	حجم
ω	Angular frequency	التردد الزاوي
W	Energy	طاقة
Z_0	Impedance	معاوقة ، ممانعة

الفصل الأول

القوة ، المجال والطاقة في الكهربية المستقرة

Force, Field and Energy in Electrostatics



الفصل الأول

القوة ، المجال والطاقة في الكهربية المستقرة

Force, Field and Energy in Electrostatics

ان العالم من حولنا مبني من ذرات تتكون من شحنات موجبة وسالبة، والقوة السائدة بين الجزيئات الذرية هي قوة كهربية مستقرة. ان فهم بعض القوانين الاساسية للقوى الطبيعية يقودنا قداماً للدخول في مجال هذا العلم. وقد وضع كولومب سنة 1785 احد هذه القوانين (قانون القوة الكهربية المستقرة) والذي يمكن بواسطته تفسير التفاعلات الذرية.

1-1 قانون كولومب (Coulomb's Law) :-

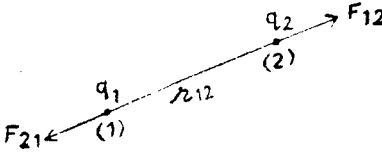
اثبت كولومب تجريبياً ان في الفضاء الحر تتجاذب الاجسام المشحونة بشحنات مختلفة في حين الاجسام المشحونة بشحنات متشابهة تتنافر بقوة تتناسب طردياً مع قيمة كل شحنة وعكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بينهما وتعمل على الخط الواصل بين الشحنتين.

لنعتبر عن مشاهدات كولومب التجريبية هذه بشكل رياضي . سوف نستعمل في هذا الكتاب علامات او رموزاً خاصة بالمتجهات (Vector notation) ولهذا فوائد معينة مثل :

(1) زوال اعتباطية اختيار نظم الاحداثيات وتصبح المكونات الفيزيائية اكثر وضوحاً.

(2) معادلات الكهربية المتحركة (equations of electrodynamics) تصبح اكثر اختصاراً ووضوحاً اذا كتبت بعلامات او رموز خاصة بالمتجهات.

نعود الى مشاهدات كولومب ونفرض ان لدينا جسيمان مشحونين 1 و 2 وشحنتيهما q_1, q_2 على التوالي وتفصل بينهما مسافة مقدارها r_{12} في الفراغ (الشكل 1-1).



الشكل (1-1)

فالقوة الكهربائية المستقرة المسلطة من قبل الجسم الاول على الجسم الثاني تحسب طبقاً لقانون كولومب من المعادلة الآتية :

$$F_{12} \propto \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = - F_{21} \quad (1.1)$$

حيث ان K هو ثابت التناسب ، و F_{21} هي القوة المسلطة من الجسم الثاني على الجسم الأول. اذا كتبت المعادلة (1-1) بطريقة المتجهات تصبح كالآتي :

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^3} \hat{e}_r = K \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^3} r_{12} \quad (1.2)$$

حيث $\theta_r = \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$ هو متجه الوحدة على مسار r_{12} . ان اشارة الشحنات هي التي تقرر نوع القوة اذا كانت تجاذبية او تنافرية. فاذا كانت الشحنات متشابهة (كلتاها موجبة او كلتاها سالبة)، تكون القوة F_{12}

موجبة وهذا يعني ان القوة تنافرية اما اذا كانت الشحنات مختلفة اي واحدة موجبة والاخرى سالبة فان القوة تكون سالبة وهذا يعني انها تجاذبية. لدينا بديلان لاختيار الثابت K وتعيين وحدات الشحنة من المعادلة (1.2) او اعطاء قيمة اختيارية لوحدة الشحنة وبذلك يمكن تعيين الثابت K تجريبياً. في نظام كوسيان للوحدات (Gaussian system CGS) تقاس المسافة بالسنتيمترات ، والكتلة بالგრارات والزمن بالثواني، والقوة بالداين والوحدات الكهربائية تعرف بفرض ثابت التناسب K هو وحدة واحدة (البديل الأول) وعليه:

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^2} r_{12} \text{ (dynes)} \quad (1.3)$$

وهذا يعني ان القوة بين وحدتين من الشحنات تفصل بينهما مسافة مقدارها واحد سنتيمتر تكون دايناً واحداً وتكون وحدة الشحنة هو ذلك المقدار من الشحنة التي تؤثر بقوة داين واحد في شحنة اخرى تبعد عنها مسافة (1سم) وتسمى ستات كولومب (Statcoulomb) او وحدة الكهربائية المستقرة (electrostatic unit, esu) في النظام العالمي للوحدات (SI) تقاس المسافة بالتر، والكتلة بالكيلو غرام ، والزمن بالثانية ، القوة بالنيوتن والشحنة بالكولومب (البديل الثاني) وعليه ان الثابت K يساوي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ وقانون كولومب يكتب بالصيغة الآتية :

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^2} r_{12} \text{ (newtons)} \quad (1.4)$$

وهذا يعني ان القوة بين جسمين يحمل كل منهما شحنة مقدارها واحد كولومب وتفصل بينهما مسافة واحد متر هي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ نيوتن. وتم ادخال العامل 4π لتبسيط شكل بعض العلاقات المهمة في النظرية الكهرومغناطيسية (electromagnetic theory) حيث ان في اشتقاق مختلف الصيغ والمعادلات تتعامل على الاغلب مع الاشكال الكروية لذلك سيكون من المفيد جداً استخدام ثابت يحتوي على الحد 4π . اما الثابت ϵ_0 فيساوي :

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coulomb}^2 \text{ newton}^{-1} \text{ metre}^{-2} \quad (1.5)$$

وهذا ما يسمى بسماحية الفضاء الحر (Permittivity of free space) اي النظامين سنستخدم ؟ قد يرى بعضهم استخدام نظام كاوسيان سيكون افضل حيث تكون قيمة الثابت K في هذا النظام تساوي واحداً والعلاقة الرابطة بين القوة والشحنات تكون نسبياً ابسط، ولكن اذا تبيننا هذا النظام فان التيار الكهربائي سيقاس بوحدة غير متقنة الصنع ($\frac{1}{3 \times 10^9}$ أمبير). اما اذا استبعدنا الثابت K من المعادلة (1-1) وذلك باختيار وحدات اخرى فانه سيظهر في امكنة اخرى باشكال مختلفة وهكذا نرى ان النظامين جيدان فايها نختار ؟ على كل حال بالنظر لكون اجهزة القياس العالمية مُمَيَّزة بموجب النظام العالمي للوحدات (SI) فاننا سنستخدم هذا النظام في كتابنا هذا. مادام قانون كولومب مبنياً اساساً على التجربة ، ويتبادر الى الذهن سؤال وهو هل تتناسب القوة عكسياً مع مربع المسافة بالضبط اي اذا كانت القوة تتناسب مع $\frac{1}{r^n}$ فهل ان $n=2$ تماماً؟.

بين كافندش (Cavendish) ان $n=2+0.02$ بلهتن ولوتن (Plimton and Lawton سنة 1936) وجد ان n تختلف عن 2 بمقدار لايزيد على جزء واحد من 10^9 ، بعد ذلك اثبت كل من لامب (Lamp) وذر فورد (Rutherford) سنة 1947 خلال قياساتها لمستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين ان الأس المستخدم في قانون كولومب صحيح لغاية جزء من 10^9 في مسافة تصل 10^{10} متر.

الدليل من الفيزياء النووية يبين ان القوة الكهربائية المستقرة تتباين تقريباً طبقاً لقانون التربيع العكسي لكولومب حتى في المسافات الصغيرة التي تصل الى 10-15 متر فيما يخصنا نحن فاننا نستخدم قانون التربيع العكسي بثقة تامة. تجدر الاشارة هنا الى ان البناء المنطقي للنظرية الكهرومغناطيسية الذي هو منهاج هذا الكتاب يعتمد على قوانين هي عصلة تجارب عصنة كقانون كولومب هذا وتكون تقريبية ايضاً لكنها في النهاية تقودنا الى نتائج سليمة تماماً. ويلاحظ وجود تشابه كبير جدا بين قانون كولومب وقانون نيوتن للجاذبية (Newton's law of gravitation) الذي يكتب رياضياً بالشكل الآتي :

$$F = \lambda_g \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث λ هو ثابت تناسب الجاذبية.

ولكن قوة الكهربائية المستقرة اكبر بكثير من قوة التجاذب الثقالي فعلى سبيل المثال لو = ارنا قوة التنافر الكهربائي بين الكترونين نتيجة شحنتها المتشابهة بموجب قانون كولومب وقوة التجاذب الثقالي بين كتلتيهما حسب قانون نيوتن تبين هذا الفرق بصورة جلية

$$\frac{\text{Electrostatic repulsion}}{\text{Gravitational attraction}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{\lambda_g m^2}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \lambda_g m^2} = 9 \times 10^{42} \times \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(6.67 \times 10^{-11}) \times (9.1 \times 10^{-31})^2}$$

$$= 4.17 \times 10^{43} \quad \left(\because \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \right)$$

وهكذا نجد ان قوة الكهربائية المستقرة اكبر بهذا المقدار من قوة التجاذب الثقالي ومع ذلك فنحن عادة لانلاحظ هذه القوة الكهربائية المستقرة.

مثال (1-1) : في تجربة الاستطارة لذر فورد (Rutherford scattering experiment) ثم قصف نوى الذهب بجسيمات الفا (α - particles) ذات طاقة كافية لا يصلها الى مسافة 2×10^{14} متر من النواة. جد قوة التنافر الكهربائي المستقر المتولد من جسيمات الفا .

الحل :

شحنة نواة الذهب هي (79e) وشحنة جسيمة الفا هي (2e) حيث (e) هي شحنة الالكترين لذلك تحسب القوة المتولدة كما يلي :

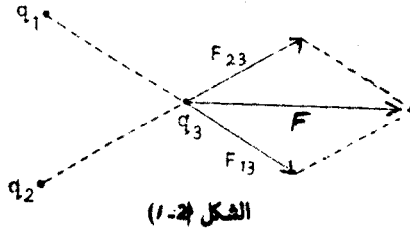
$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \times 79 \times e^2}{(2 \times 10^{-14})^2}$$

$$= 91.2 \text{ newtons.}$$

1-2 مبدأ التراكب (Principle of Superposition)

اذا وجد أكثر من جسمين مشحونين في منطقة معينة فان القوة الكلية المسلطة على جسم واحد منها تساوي المجموع الاتجاهي (Vector sum) للقوى الناتجة على كل من الجسيمات الأخرى كل على انفراد. وهذا هو ما يسمى (بمبدأ التراكب). على سبيل المثال نلاحظ في الشكل (1-2) وجود ثلاث شحنات هي q_3, q_2, q_1 فان القوة المسلطة على الشحنة q_3 مثلاً تحسب بموجب هذا المبدأ على النحو الآتي :

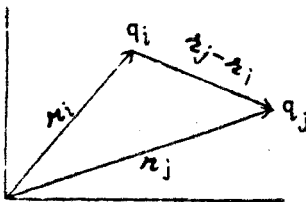
$$F = F_{13} + F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|r_{13}|^3} r_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{|r_{23}|^3} r_{23}$$



وبصورة عامة فان القوة المسلطة على شحنة مثل q_i من شحنات أخرى تحسب من المعادلة الآتية :

$$F_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|r_{ij}|^3} r_{ij} \quad (1.6)$$

وغالبا ماتكتب المعادلة السابقة بصيغة المتجهات فلو كانت r_j, r_i (الشكل 1-3) متجهين يمثلان موقعا كل من الشحنة q_j, q_i على التوالي فان المعادلة (1-6) تصبح بالشكل الآتي :

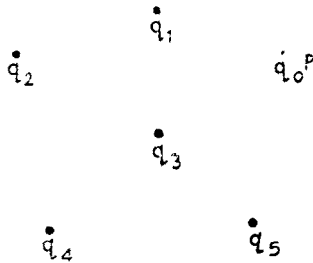


$$F_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \quad (1.7)$$

ان مبدأ التراكب قد سهل بدرجة كبيرة المعالجة الرياضية للنظرية. ويفشل المبدأ في التأثيرات التبادلية النووية (Nuclear interactions) وهذا احد اسباب كون النظرية النووية (nuclear theory) اكثر اشارة للمتعاب بعض الشيء من نظرية التأثيرات التبادلية الذرية (the theory of atomic interactions)

3-1 المجال الكهربائي (Electric Field) :-

ان لادخال فكرة المجال فائدة عظيمة في حل المشاكل الفيزيائية. وتتنوع انواع المجال كتتنوع الكميات الفيزيائية والرياضية في مسألة معينة وربما نجد في وقت واحد ثلاثة انواع من المجال (المتجه Vector، غير المتجه scalar، وكمية ممتدة tensor) في الفضاء الاعتيادي للفيزياء القديمة ذي الابعاد الثلاثة ومجالات متجهة رباعية الابعاد (Four dimensional vector fields) في الفضاء ذي الابعاد الاربعة الخاص بالنظرية النسبية (space - time domain of relativity theory) وفيما يخص دراستنا للكهرومغناطيسية القديمة سنتناول المجال المتجه وغير المتجه في الفضاء ثلاثي الابعاد. ان الفضاء الذي تؤثر فيه القوى الكهربائية المستقرة يسمى بالمجال الكهربائي المستقر وهذا يعتبر تفسيراً نوعياً للمجال ، ولتفسير المجال كياً نفرض ان هناك عدة شحنات موزعة في الفضاء وكما هو مبين في الشكل (1-4) .



الشكل (1-4)

الآن ماهو المجال الناتج عن وجود هذه الشحنات في نقطة مثل P فيها شحنة صغيرة جداً (q_0) تسمى شحنة اختبارية (test charge) لا تؤثر في مواصفات المجال. ويمكن إلغاء القوة الناتجة عنها والمؤثرة في باقي الشحنات. اما القوة المؤثرة في هذه الشحنة في النقطة P فهي :

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_0 q_i}{|r_0 - r_i|^2} (r_0 - r_i) \quad (1.8)$$

حيث ان r_0 هو متجه موقع نقطة P وان r_i متجه يمثل مواقع باقي الشحنات. اما القوة لكل وحدة شحنة والمؤثرة في الشحنة الاختبارية في النقطة P تكون :

$$\frac{F_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|r_0 - r_i|^2} (r_0 - r_i)$$

ونظراً لكون الشحنة q_0 لا تتغير في مواصفات المجال لصغرهما المتناهي (علماً انه لا يمكن ذلك عملياً) فان المجال الكهربائي يكون حسب المعادلة الآتية :

$$E(r_0) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|r_0 - r_i|^2} (r_0 - r_i) \quad (1.9)$$

ان شدة هذا المجال $\{E(r)\}$ تسمى شدة المجال الكهربائي (electric field intensity). من تعريف المجال الكهربائي نجد ان القوة المسلطة على شحنة مثل q موضوعة في مجال كهربائي E تكون

$$F = q E \quad (1.10)$$

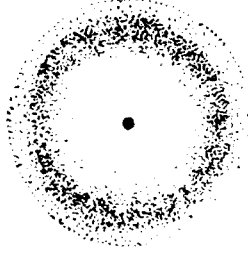
المجال الكهربائي $E(r)$ يعتبر دالة للمكان او الموضع وهو بمجد ذاته متجه (vector) ايضاً لذا فان المجال الكهربائي هو مجال متجه او قيمة متجهة. لو تفحصنا المعادلة (9-1) لقيمة المجال $E(r)$ جيداً نرى ان المجال في نقطة معينة والنتائج من وجود عدة شحنات هو المجموع الاتجاهي (Vector sum) لمجال كل شحنة على افراد عدا الشحنة الموجودة في النقطة التي يحسب فيها المجال الكلي. ونشير هنا انه عند حساب المجال الكهربائي في نقطة معينة يجب عدم ادخال اي شحنة موجودة في هذه النقطة في الحساب عدا ماسميناه بالشحنة الاختبارية وبخلاف ذلك فان الزيادة الحاصلة في المجال نتيجة احتساب هذه الشحنة سيكون مالا نهاية عند استخدام قانون التربيع العكسي لكون $(r=0)$ في النقطة المذكورة وبذلك تنتفي فائدة قوانين هذه النظرية ، لذلك فان ادخال مصطلح مثل شحنة نقطية (point charge) سيكون مفيداً جداً في دراستنا للمجال وهو ما نقصد به حيزاً صغيراً جداً من الجسيمات المشحونة وذلك لأن القياسات والمسافات التي نتعامل بها في الحقيقة ليست بدقة وصغر القياسات داخل الذرة مثلاً ، اما اذا اخذنا المعنى المثالي لكلمة نقطية باعتبارها اصغر حيز ممكن حتى لو كان الكترونياً مثلاً فان هذا له حجم محدد ايضاً تتوزع فيه الشحنة.

اذا لم تكن الشحنة محددة في نقطة معينة وانما موزعة على حجم محدد في الفضاء بشكل يجعلها منتشرة في كافة ارجاء هذا الحجم بانتظام يدخل مصطلح آخر وهو كثافة الشحنة (charge density) ونعني به كمية الشحنة الموجودة في وحدة الحجم (charge per unit volume) وكثافة الشحنة الحجمية (ρ) تعرف كالآتي :

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{V} \right) \quad (1.11)$$

ولنأخذ مثلاً هو توزيع الشحنة في ذرة الهيدروجين من المعروف ان الالكترون جسيم مشحون يدور بسرعة فائقة حول النواة لذلك يصعب تحديد موقعه بالضبط ويكون من الافضل في هذه الحالة اعتبار شحنته سحابة حول النواة كما في الشكل (1-5) فاذا كانت كثافة الشحنة في نقطة يحدد موقعها المتجه r هي $\rho(r)$ والشحنة الموجودة في حجم معين $d\tau$ تكون $\rho d\tau$ فان الشحنة الكلية في الذرة تكون:

$$\int \rho(r) d\tau = -e \quad (1.12)$$



الشكل (1-9)

ان كثافة الشحنة هي ايضاً دالة للمكان او الموضع ولكنها كمية غير متجه (Scalar quantity) وكذلك المجال الناتج عنها. في حالة توزيع الشحنة أو إنتشارها في حجم محدد بشكل منتظم بحسب المجال الكهربائي كالآتي :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' \quad (1.13)$$

ان أ انتشار أو توزيع الشحنة في سطح معين تسمى كثافة الشحنة في هذه الحالة بالكثافة السطحية للشحنة (Surface charge density) وتعني كمية الشحنة لوحدة المساحة (charge per unit area) ويرمز لها بالرمز $\sigma(r)$ وفي هذه الحالة يكون المجال:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (1.14)$$

حيث ان dS تمثل عنصراً من المساحة (element of area) اذا ما أنتشرت أو توزعت الشحنة على خط معين تسمى بالكثافة الخطية للشحنة (linear charge density) وتعني كمية الشحنة لوحدة الطول (charge per unit length) ويرمز لها بالرمز $\lambda(r)$ ويكون المجال الكهربائي لهذه الحالة كالآتي :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(r) (r - r_i)}{|r - r_i|^3} dl \quad (1.15)$$

حيث ان dl يمثل عنصراً من الطول (element of length). في بعض الاحيان يكون من الافضل أن تتصور أن الشحنة النقطية (Point charge) متكونة من عدة شحنات صغيرة جداً موزعة في هذه النقطة وهذا ممكن بمساعدة دالة دلتا لديراك $\delta(r - r_i)$ (Dirac delta function) والتي تمتاز بما يلي :

$$(i) \quad \delta(r - r_i) = 0 \text{ for } r \neq r_i \quad \text{عندما تكون } r \neq r_i \quad (1.16)$$

$$(ii) \quad \int \delta(r - r_i) d\tau = 1 \quad \text{اذا كان الحيز يتضمن } r = r_i \quad (1.17)$$

$$= 0$$

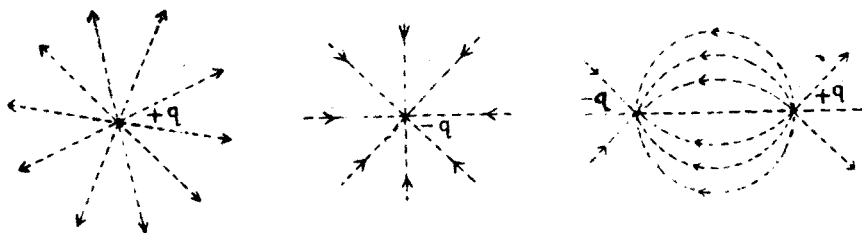
في الحالات الاخرى

$$(iii) \quad \int_V f(r_i) \delta(r - r_i) d\tau = f(r) \quad (1.18)$$

عند إجراء التكامل نجد ان $\rho(r)$ تمثل توزيع الشحنة وتساوي صفراً في كل ارجاء الفضاء عدا النقطة التي يكون متجه موقعها هو r' والشحنة الكلية فيها تساوي q' ولذلك فهي تمثل شحنة نقطية مقدارها q' وموجودة في النقطة التي يحدد موقعها المتجه r' .

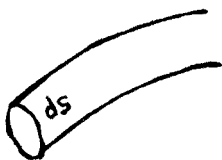
4-1 خطوط وأنابيب القوى (Lines and Tubes of Forces) :-

الخطوط المستمرة المرسومة بشكل تكون فيه موازيه دائماً لاتجاه المجال تسمى خطوط القوة أو خطوط المجال (lines of force or field lines) لذلك فان خط القوة هو ذلك المنحني في المجال الكهربائي الذي يمثل ماسه في اي نقطة إتجاه المجال الكهربائي فيها وبما ان إتجاه المجال واحد دائماً في أي نقطة لذلك يوجد عادة خط قوة واحد فقط يمر في نقطة محددة وهذا يعني أيضاً ان خطوط القوة لاتتقاطع. يرينا الشكل (1-6) خطوط القوة حول شحنة نقطية ، وخطوط القوة بالقرب من شحنتين متجاورتين متساويتين بالمقدار إحداها موجبه والاخرى سالبة .



الشكل (6 - 1)

لمعرفة ماهية أنابيب القوة (Tube of force) نفرض ان عنصر مساحة (element of area) موجود في مجال كهربائي وهو في الصفر بحيث أن الشدة الكهربائية (electric intensity) متساوية المقدار والاتجاه في أي نقطة من مساحته لذا تكون خطوط القوة في اي نقطة من مسافته متوازية تقريباً ومكونة سطحاً انبوبياً يسمى انبوب القوة (Tube of force) والمقطع العرضي العمودي لانبوب القوة هو جزء من سطح متساوي الجهد كما في الشكل (7 - 1) .



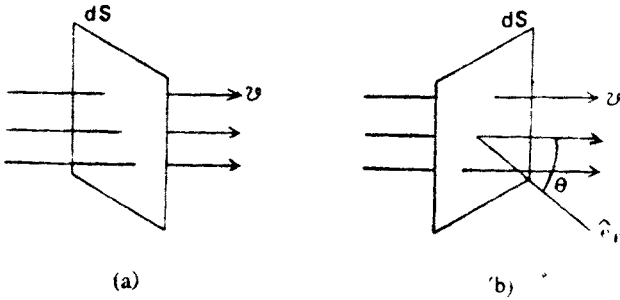
الشكل (7 - 1)

5 - 1 الدفق (الفيض) الكهربائي (Electric Flux) :

لو فرضنا ان مائماً يجري عمودياً على سطح مستوي صغير مساحته dS وبسرعة مقدارها v كما في الشكل (1-8B). فالمعدل الزمني لعبور كمية من المائع خلال السطح يسمى دفق (فيض) المائع (flux of the fluid) ويساوي $v \cdot dS$. اما اذا كان عبور المائع ليس بشكل عمودي وانما بخط مائل ويشكل مع الخط العمودي زاوية لتكن θ مثلاً (كما في الشكل (1 - 8 B) فإن الدفق (الفيض) في هذه الحالة يساوي :

$$F = v dS \cos \theta \quad (1.20)$$

حيث أن F هو رمز الدفق ds



الشكل (1-8)

لو اردنا التعبير عن الفيض رياضياً بصيغة المتجهات نفرض ان متجه السطح المستوي هو $\hat{e}_n ds$ قيمته ds واتجاهه بمحاذاة المستقيم العمودي على السطح و \hat{e}_n هو وحدة المتجه (Unit Vector) في هذا الاتجاه، فان الفيض يكون :

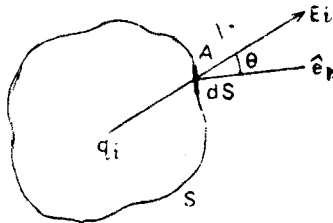
$$F = v \cdot \hat{e}_n ds \quad (1.21)$$

في الواقع لا يوجد شيء متحرك في المجال الكهربائي المستقر (electrostatic field) إلا انه رياضياً يمكن تشبيهه كياً بفيض المائع، ويسمى الفيض الكهربائي (electric flux) ويعرف كآتي :

$$\text{Electric flux} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (1.22) \quad |$$

1-8 قانون كوس (الصيغة التكاملية) (Gauss Law (Integral form)) :-

ان الملاقة السابقة (1-22) تقودنا الى قانون مهم في الكهربية المستقرة يربط بين الدفع (الفيض) الموجود في سطح مغلق والمقدار الصافي للشحنة في هذا السطح. نفرض ان سطحاً مغلقاً هو S يحيط بشحنة هي q_1 (الشكل 9 - 1) ولتكن dS عنصر مساحة في نقطة A على السطح و $\hat{\mathbf{e}}_n$ وحدة المتجه خارجة عمودية عليها. والزاوية المحصورة بين المجال الكهربائي في نقطة A والمتجه $\hat{\mathbf{e}}_n$ هي θ .



الشكل (1.9)

فان الدفع (الفيض) خلال عنصر المساحة dS يكون :

$$dF = \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = E_i \cos \theta dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} \cos \theta dS$$

حيث ان (r) هي المسافة بين عنصر المساحة dS والشحنة q_i والزاوية المحيطة
 المتكونة من dS في نقطة A هي Ω وتساوي $\frac{dS \cos \theta}{r^2}$.

$$dF = E_i \cdot \hat{e}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i d\Omega \quad (1.23)$$

وعليه فان الدفع (الفيض) في كل اجزاء السطح S يحسب بالتكامل الآتي :

$$F = \int_S E_i \cdot \hat{e}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \int d\Omega = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (1.24)$$

اما اذا كان توزيع الشحنات داخل السطح اعتباطياً فان الدفع (الفيض) يحسب اعتماداً
 على مبدأ التراكب (principle of superposition) كالاتي :

$$E = \sum E_i$$

$$\int_S E_i \cdot \hat{e}_n dS = \sum q_i / \epsilon_0 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{ومن ثم تكون:} \quad (1.25)$$

حيث Q هي مقدار الشحنة الكلية الموجودة داخل السطح المغلق.
 اما اذا كان توزيع الشحنة بصورة مستمرة (continuous distribution of charge)
 فان العلاقة السابقة (1-25) تصبح بالشكل الآتي :

$$\int_S E_i \cdot \hat{e}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau \quad (1.26)$$

الآن سنحسب الدفع (الفيض) في حالة وجود الشحنة q_i خارج السطح المغلق S وكما هو موضح في الشكل (1-10).

نرسم مخروطاً رأسه في نقطة q_i ويقطع السطح المغلق S في تقطعتين عند دخوله وخروجه مكوناً عنصري مساحة هما dS_1 و dS_2 كما في الشكل (1-10) فإذا كان \hat{e}_{n_1} و \hat{e}_{n_2} هما متجهين خارجيين عموديان على عنصري المساحة. فان متجه المجال الكهربائي المار خلال هذين العنصرين في نقطة q_i سيكون زاويتين مع التجهين المذكورين هما θ_1 و θ_2 على التوالي.

الدفع (الفيض) الصافي الخارج خلال عنصري المساحة يكون:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_1^2} \cos(180 + \theta_1) dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_2^2} \cos \theta_2 dS_2$$

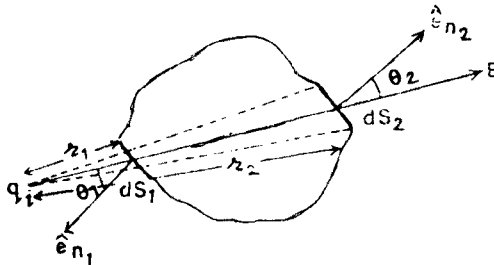
حيث ان r_1 و r_2 هما المسافات بين عنصري المساحة dS_1 و dS_2 والشحنة q_i .

$$\therefore dF = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\cos \theta_1 dS_1}{r_1^2} + \frac{\cos \theta_2 dS_2}{r_2^2} \right)$$

بما ان الزاوية المحيطة المتكونة من عنصري المساحة في q_i هي نفسها (لكون نفس المخروط قطع عنصري المساحة) اي ان :

$$\frac{\cos \theta_1 dS_1}{r_1^2} = \frac{\cos \theta_2 dS_2}{r_2^2} = d\Omega$$

$$dF = 0$$



الشكل (1-10)

وبما ان هذا ينطبق على كافة الخاريط المرسومة من تقطة q التي تغطي كل السطح المغلق فان التدفق (الفيض) الكلي يكون صفرأ ايضاً. وهذه النتيجة في الحقيقة تمثل مايعرف بقانون كاوس الذي ينص على ان :

التدفق (الفيض) الكلي الخارج من سطح مغلق مثل S موجود في مجال كهربائي يساوي احد مقدارين هما اما :

$$\int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{عندما تكون الشحنة داخل السطح المغلق.} \quad (1.27)$$

$$= 0 \quad \text{او عندما تكون الشحنة خارج السطح المغلق.}$$

وهذا مايعرف ايضاً بالصيغة التكاملية لقانون كاوس.

7-1 قانون كاوس (الصيغة التفاضلية) (Differential form) : Gauss' law

يمكن صياغة قانون كاوس بطريقة تفاضلية وكما سيوضح الآن :

نعرف في حساب المتجهات ان تباعد متجه مثل \mathbf{A} (divergence of a vector \mathbf{A}) نحسب كما في المعادلة الآتية :

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS}{d\tau} \quad (1.28)$$

حيث S تمثل السطح المتضمن لعنصر الحجم وبتكامل المعادلة اعلاه لحجم محدد نحصل على :

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} d\tau = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (1.29)$$

وهذا يعرف بمبرهنة التباعد (divergence theorem) المستخدمة عادة في تحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي او بالعكس. وباستخدامها هنا نستطيع صياغة قانون كاوس كالآتي :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \int_V \text{div } \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

$$\int_V (\text{div } \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) d\tau = 0$$

وهذا يصح لأي حجم كان :

$$\therefore \text{div } \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0 = 0$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \cdot (1.30)$$

وهذه تعتبر الصيغة التفاضلية لقانون كاوس.

ان قانون كولومب اعتبر من القوانين الاساسية في الكهربائية وقانون تحصيل لقانون كولومب القاضي بأن القوة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة المحصورة بين جسمين مشحونين. أن اختيار اي قانون عكس اخر غير التربيع مثل $\frac{1}{r^n}$ حيث ان $n \neq 2$ لا يؤدي الى تحصيل قانون كاوس (لماذا ؟) لذلك اعتبر هذا القانون أيضاً من القوانين الاساسية في الكهربائية المستقرة.

8-1 بعض التطبيقات لقانون كاوس (Some Applications of Gauss Law) :-

رأينا ان الشحنة داخل سطح كاوسيان (Gaussian surface) هي التي تحدد الدفع (الفيض) الكهربائي خلال هذا السطح. اذا كان توزيع الشحنة في السطح توزيعاً متناظراً بسيطاً (simple symmetry) فيمكن حساب المجال الكهربائي بتطبيق قانون كاوس بصورة بسيطة وسيت شرح بعض الامثلة المفيدة بهذا الخصوص.

(1) المجال الناتج من طبقة لانهاية من الشحنات الموجبة ذات كثافة سطحية منتظمة:

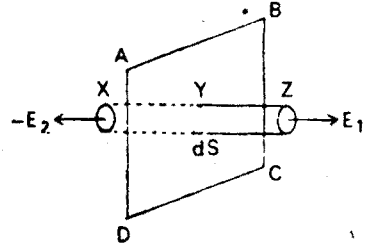
(The field due to an infinite Layer of positive charge with uniform surface density)

نفرض ان ABCD هو مستو متناظر كما هو موضح في الشكل (1-11) لكون المستوي متناظراً فان خطوط المجال جميعها متعامدة على المستوي. لو فرضنا ان اسطوانة مثل XYZ مساحة مقطعها العرضي يساوي dS تخترق المستوي كما هو مبين في الشكل (1-11) وتطبيق قانون كاوس نحصل على :

$$(E_1 - E_2)dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

(1, 31)

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

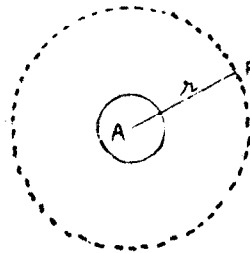


الشكل (1.11)

هذا هو تغير المجال E عبر الطبقة المشحونة والتغير يساوي $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

(2) المجال خارج كرة مشحونة ومعزولة (The field outside an isolated charged sphere) : sphere)

لو فرضنا ان A هي كرة مملوءة بشحنات موزعة بانتظام (الشكل 1-12) فإ هو المجال الناتج من الكرة في نقطة خارجها مثل P ؟



الشكل (1.12)

نفرض ان هناك سطحاً كروياً له نفس مركز الكرة المشحونة ويمر بالنقطة P ونصف قطرها r فتكون مساحتها $4\pi r^2$ ونتيجة التناظر تكون شدة المجال الكهربائي E هي نفسها في جميع نقاط السطح والدفق (الفيض) الخارج خلال السطح يكون :

$$\int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{قانون كاول})$$

حيث ان Q هو مقدار الشحنة الكلية في الكرة.

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.32)$$

والمجال الناتج من شحنة تقطية موجودة في مركز الكرة هو نفس المجال المحسوب في المعادلة (1-32) اذا كانت الشحنة موزعة بصورة مستمرة (continuous charge distribution) داخل الكرة :

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

حيث ρ هو نصف قطر الكرة و ρ هي كثافة الشحنة لذلك :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi a^3 \rho}{3r^2} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (1.33)$$

(iii) المجال الناتج من وجود شحنات على غلاف كروي

(Field due to a spherical shell of charge)

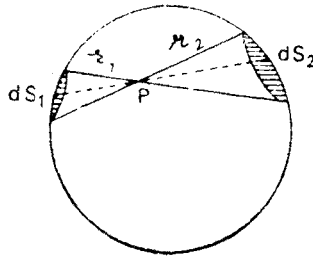
في الحالة السابقة (ii) ظهر أن المجال الناتج من وجود شحنات على السطح الخارجي لكرة هو نفسه كما لو ان الشحنة كلها كانت متركزة في مركز الكرة ، السؤال الآن ماهو المجال في تقطة مثل P داخل الغلاف الكروي المشحون .

لو رسم مخروطان رأسهما في نقطة P ويقطعان عنصر مساحة من السطح الكروي dS_2, dS_1 كما في الشكل (1-13)، ولتكن r_2, r_1 هما المسافات بين dS_2, dS_1 ونقطة P على التوالي.

فاذا كانت كثافة الشحنة السطحية هي σ فإن المجال الكهربائي الناتج من عنصري المساحة يكون $\sigma dS_2 / r_2^2$ و $\sigma dS_1 / r_1^2$ ويؤثران باتجاهين متعاكسين وبما ان :

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega$$

(الزاوية المجهمة المتكونة في P من عنصري المساحة).



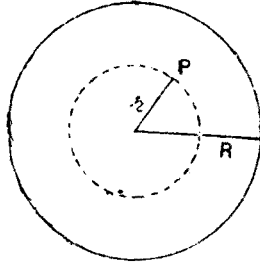
الشكل (1-13)

هكذا يظهر ان المجال الناتج من عنصر مساحة dS يلغى المجال الناتج من عنصر المساحة المقابل له لانه يساويه في المقدار ويعاكسه في الاتجاه ، وبنفس الطريقة يمكن ان نستنتج ان كل عنصر مساحة في اي نقطة من السطح يلغى مجال عنصر المساحة المقابل له وتكون النتيجة عدم وجود اي مجال كهربائي في نقطة P ، اي ان المجال يساوي صفرًا.

(2) المجال في نقطة مثل P تقع داخل كرة نصف قطرها R مشحونة بانتظام.

The field at a point inside a uniformly charged sphere of radius R (لتكن r

هي المسافة بين نقطة P ومركز الكرة (الشكل 1-14) كما في المثال السابق نفرض ان هناك كرة اخرى داخل الكرة المشحونة تمر بالنقطة P. ان المجال الناتج من الحلقة



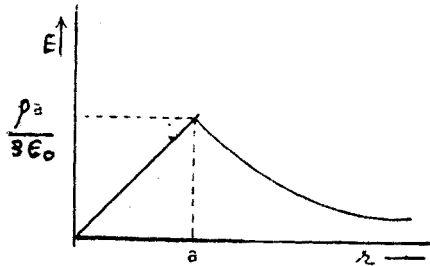
الشكل (1-14)

المتكونة بين الكرتين والتي سمكها $(R-r)$ لا يضيف اي شيء للمجال في نقطة P لانها واقعة على سطح الكرة الداخلية (الحالة 3) ، اذا كان المجال في نقطة P هو E . فان الدفع (الفيض) خلال السطح الكروي المار بنقطة P يكون :

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \quad \text{قانون كاوس}$$

$$\therefore E = \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \quad (1.34)$$

نلاحظ ان المعادلتين 1-33 و 1-34 متشابهتان عندما تتساوى r و a ويرينا الشكل (1-15) منحنى تغير المجال داخل وخارج كرة نصف قطرها يساوي a .



الشكل (1-15)

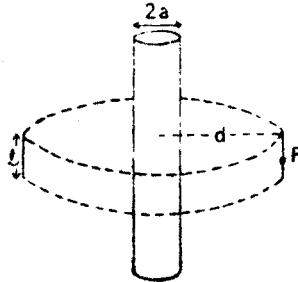
(Uniformly charged infinite cylinder) اسطوانة مشحونة بانتظام لانهائية الطول

نفرض ان اسطوانة مشحونة طولها لانهائي ونصف قطرها a كما في الشكل (1-16).
 لحساب المجال في نقطة مثل P تبعد مسافة d عن محور الاسطوانة ، نتصور ان هناك
 سطحاً اسطوانياً مقلماً له نفس محور الاسطوانة الاولى ويمر بالنقطة P . يمكن بسهولة من
 نتيجة التناظر معرفة ان خطوط المجال تتجه عمودياً على المحور نحو الخارج وتكون قيمة
 المجال نفسها في كل النقاط التي لها نفس بعد النقطة P عن المحور. اذا كان سمك
 الاسطوانة المارة بنقطة P هو L فان الدفع (الفيض) خلاله يكون $2\pi dlE$ ، علماً
 انه لا يتكون اي مجال في القاعدتين لأن المجال E يكون مماساً لها وبتطبيق قانون كاولس
 نحصل على :

$$2\pi dlE = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

حيث λ هو مقدار الشحنة لوحدة الطول.

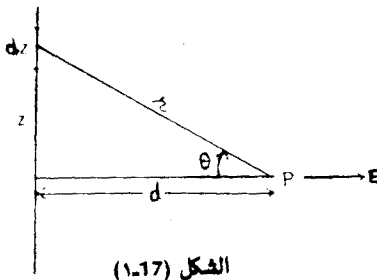
$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi d\epsilon_0} \quad (1.35)$$



الشكل (1.16)

يلاحظ هنا ان مقدار المجال لا يعتمد على نصف قطر الاسطوانة المشحونة لذلك فان هذا
 القانون يصبح حق لو كانت الشحنة موزعة على خط مستقيم. يمكن الوصول الى نفس
 النتائج بطريقة التكامل المباشر وكما يلي :

نفرض ان خيطاً رفيعاً (filament) طوله لانهائي وكثافته شحنته الخطية هي
 λ كولومب / متر (الشكل 1-17) فالمجال الناتج من عنصر صغير من الخيط dz في
 نقطة مثل P هو :



$$dE_d = \frac{\lambda dz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

الشكل (1.17)

فرضنا في هذه الحالة ان محور الخيط ينطبق على المحور (Z - axis) فاذا كانت نقطة P تبعد عمودياً عن محور الخيط مسافة مثل d وعن عنصر الخيط dz مسافة r ، فان المجال الكلي يحسب من المعادلة الآتية :

$$E_d = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} dz$$

Since $z = d \tan \theta$ and $r = d \sec \theta$

$$E_d = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{d} d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

(Vi) المجال بين كرتين متحدتي المركز لها شحنات متساوية بالمقدار ومتعاكسة بالاشارة.

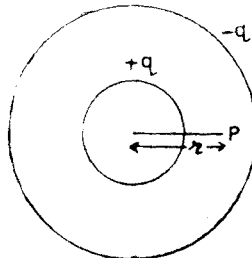
(Field between two concentric spheres which have equal and opposite charges)

لمعرفة المجال في هذه الحالة نفرض ان هناك سطح كوايسياني رسم خلال نقطة p الشكل (1-18) فالمجال الناتج من الكرة الخارجية في نقطة P يكون صفراً (الفقرة (iii))

اما المجال المتكون في الكرة الداخلية فيكون :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

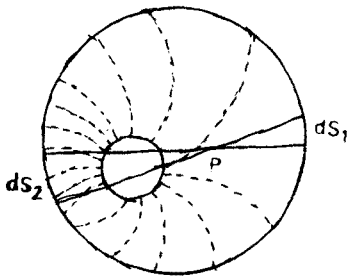
(كما هو مبين في الحالة (ii))



الشكل (1.18)

مما ذكر نستنتج ان الشحنة داخل سطح كاوسياني هي التي تحدد دفق (فيض) المجال الكهربائي ويمكن حساب المجال الكهربائي بواسطة قانون كاوس عندما يكون الشكل المراد حسابه متناظراً ، اي ان مركبة المجال العمودية هي ثابتة دائماً في اي سطح من الحجم الكاوسياني. ونجد في الحالات السابقة ان المجال على السطح الكاوسياني يحدد بالشحنة الموجودة في هذا السطح.

في حالة عدم تناظر توزيع الشحنة فان المجال يحدد بالشحنات الموجودة داخل وخارج السطح الكاوسي ، لتوضيح ذلك نفرض ان هناك كرتين مشحونتين غير متحدي المركز كما في الشكل (1-19) فاذا رسم مخروط رأسه في نقطة P فانه سيقطع عنصري مساحة من سطح الكرة الخارجية هما dS_1 , dS_2 وبما ان كثافة الشحنة غير متساوية على عنصري السطح $dE_2 > dE_1$ فان اختلاف المساحة هذا يولد مجالاً مقداره dE بالاتجاه السالب لمحور السينات في نقطة P ، واذا تم حساب المجال لكافة السطح بنفس الطريقة سنجد ان هناك مجالاً مقداره E_- بالاتجاه السالب لمحور السينات في نقطة P ، في حين تولد الكرة الداخلية مجالاً مقداره E_+ وعليه يكون المجال الكلي في نقطة P هو $E = E_+ + E_-$.



الشكل (1-19)

1-9 مبرهنة مفيدة في الكهربية المستقرة (A useful Theorem in Electrostatic)

تم اعتبار المبرهنة الآتية من المبرهنات المهمة جداً في الكهربية المستقرة التي تنص على أن:

معدل قيمة المجال الكهربائي لحجم معين من كرة مقداره V والناتج من شحنة تغطية q في موضع معين داخل هذه الكرة يحسب من المعادلة الآتية:

$$\langle E \rangle_{av} = -\frac{qr_0}{3\epsilon_0 V} \quad (1.36)$$

البرهان: أن المجال في نقطة r يحسب في المعادلة الآتية:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(r - r_0)}{|r - r_0|^3} \right]$$

حيث r_0 تمثل موقع الشحنة، لذلك.

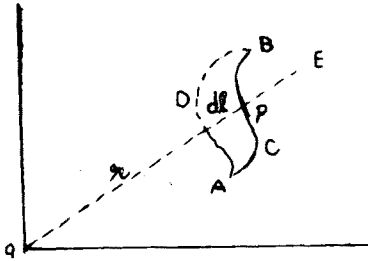
$$\begin{aligned} \langle E(r) \rangle_{av} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V} \int_V \frac{(r - r_0)}{|r - r_0|^3} d\tau \\ &= - \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V} \int_V \frac{(r_0 - r)}{|r_0 - r|^3} d\tau \right\} = -\frac{qr_0}{3\epsilon_0 V} \end{aligned}$$

الكمية بين الأقواس تعبر عن المجال في r_0 الناتج من كثافة شحنة منتظمة هي $\frac{q}{V}$ في كرة.

10-1 الجهد الكهربائي المستقر (Electrostatic Potential): -

ان اي شحنة اختبارية لاتتحرك داخل مجال كهربائي مستقر بعكس اتجاه القوة الموجودة فيه مالم يسلط عليها جهد خارجي والشحنة التي تتحرك بهذا الاسلوب تكتسب طاقة كهربائية او طاقة جهد (Potential energy)

ليبين ذلك نفرض ان وحدة شحنة اختبارية تم نقلها من نقطة مثل A الى نقطة B على المسار الموضح في الشكل (1-20) ضمن مجال شحنة نقطية (q). فاذا كانت الشحنة المراد نقلها والشحنة النقطية موجبتين، فان الشغل المطلوب لنقل الشحنة الاختبارية من نقطة A الى نقطة B ناتج من قوة التنافر بين الشحنتين ولحساب مقدار الشغل سنحسب كمية الشغل المطلوب لتحريك الشحنة الاختبارية مسافة صغيرة جداً من الخط الواصل بين A و B مثل dl ثم عن طريق التكامل نحسب الشغل الكلي :



الشكل (1.20)

$$dW = E(r) \cdot \hat{e}_l dl = \frac{q dl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حيث r هو متجه موقع النقطة P ، والشغل الكلي المطلوب لنقل الشحنة الاختبارية من نقطة A التي تبعد مسافة r_1 عن الشحنة q الى نقطة B التي تبعد مسافة r_2 عن الشحنة q يكون :

$$W = \int_A^B E \cdot \hat{e}_l dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (1.37)$$

نلاحظ ان عملية التكامل لاتعتمد على شكل المسار الذي تم نقل الشحنة بوجهه وانما على نهايتي المسار اي على بعدي النقطتين A و B، وهذا يعني ان الشغل المطلوب لنقل الشحنة عبر مسار مثل ACB هو نفسه عبر المسار ADB. واي مسار آخر. ان الشغل المنجز بواسطة القوة الكهربائية المستقرة لنقل الشحنة من نقطة A الى نقطة B في الحقيقة يساوي مقدار الفقدان في الطاقة الكامنة لشحنة الاختبار، اي ان

$$B \text{ الطاقة الكامنة في } A - \text{ الطاقة الكامنة في } B = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{e}_l dl$$

والآن ماذا سيحدث لو ان هذه الشحنة عادت مرة اخرى الى نقطة A عبر اي مسار كان؟ بما ان الشغل المنجز لنقل الشحنة من نقطة A الى B يساوي مقدار الطاقة الكامنة المفقودة. فان هذا الفقدان يتم استرجاعه عند العودة الى A مرة اخرى وهذا يعني ان مقدار الشغل الصافي سيكون صفرأ اي :

$$W = \int_C \mathbf{E} \cdot \hat{e}_l dl = 0 \quad (1.38)$$

وهكذا نجد ان كمية الشغل الصافي المنجز على مسار مغلق (اي الذهاب الى نقطة معينة ثم العودة الى نفس نقطة الانطلاق) يساوي صفرأ. والقوة التي لها ميزة عدم اداء اي شغل وبذلك فهي لاتصرف اي طاقة على مسار مغلق تسمى القوة المحافظة (Conservative force) القوة الكهربائية المستقرة قوة محافظة في حساب المتجهات يسمى تكامل المسار او التكامل الخطي (Line integral) لمتجه حول مسار او منحنى مغلق بدوران او لف المجال المتجه (Circulation or the curl of the vector field) والمعادلة (1-38) توضح ان لف المجال الكهربائي هو صفر وجذور هذه المعادلة موجودة في المعادلة (1-30). فن الامثلة الاخرى لهذا المجال هناك مجال الجاذبية الارضية (gravitational field) والمجال المغناطيسي

(magnetic field) عندما يكون في حيز حر من التيار الكهربائي. ومجال السرعة (velocity field) لجريان مائع غير مضغوط وحر من اللزوجة. ومثل هذه المجالات تسمى المجالات اللادورانية (irrotational fields). الشغل المطلوب لنقل شحنة من نقطة في المالا نهاية الى نقطة مثل r_2 يكون :

$$W = - \int_{\infty}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

وهذا يعني ان كمية الشغل المطلوب لنقل شحنة في المالا نهاية الى نقطة B هو $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$ وعلى فرض ان الطاقة الكامنة لنقطة في المالا نهاية هي صفر. فان الطاقة الكامنة في اي نقطة اخرى هي دالة لموقع هذه النقطة فقط وتسمى بالجهد الكهربائي المستقر لشحنة مثل q في نقطة تبعد عنها مسافة r ويرمز لها بالرمز $\Phi(r)$.

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-39)$$

وبذلك فاننا نستطيع ان نحدد لأي نقطة في المجال الكهربائي جهداً كهربائياً مستقراً ذو قيمة تحسب من المعادلة اعلاه. وكل نقطة في المجال لها قيمة جهد واحدة فقط وهي دالة ذات قيمة واحدة فقط (Single - valued function) لاحداثيات اي شحنة في الفراغ - فاذا كان لدينا مجموعة من الشحنات النقطية ، شحنة كل منها q_j فان الجهد الناتج عنها في نقطة مثل r_j يساوي المجموع الجبري (algebraic sum) لجهد كل شحنة على انفراد اي ان :

$$\Phi(r_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_j}{r_{jz}} \quad (1.40)$$

وفي حالة كون الشحنة موزعة بصورة مستمرة

$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dr_j}{r_{ij}} \quad (1.41)$$

1-11 العلاقة بين المجال والجهد (Relation between the field and potential)

لمعرفة العلاقة بين المجال الكهربائي المستقر والجهد الكهربائي المستقر نفرض ان شحنة قيمتها q موجودة في نقطة الاصل لمحور احداثيات قياسي فالمجال في نقطة تبعد عنها مسافة r يكون :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r|^2} \hat{e}_r$$

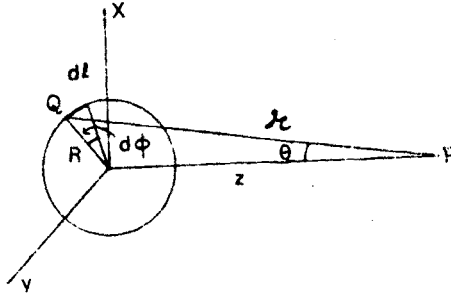
حيث \hat{e}_r هو متجه المجال. ونعرف ايضاً ان :

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{|r|^2} \hat{e}_r$$

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

وهذا يعني انه بمعرفة توزيع الجهد يمكن ايجاد المجال في اي نقطة بواسطة حساب تدرج ميل مشتقة الجهد (gradient of potential). ان التعامل مع مصطلحات الجهد غالباً مايكون اسهل من المجال لكون الجهد كمية عددية (scalar quantity).

مثال (1-2) :- جد قيمة الجهد والمجال الناتج من حلقة من الشحنات في نقطة تقع على محور الحلقة.



الشكل (1-21)

نفرض ان كثافة الشحنة الخطية هي λ . R نصف قطر الحلقة = λR لسهولة الحل
سنجعل الحلقة تقع في المستوى الذي تكون فيه قيمة Z تساوي صفراً كما في الشكل
(1-21).

ان قيمة الشحنة في عنصر طول صغير جداً من محيط الحلقة هو (dl) في نقطة مثل
 Q هو $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$ ، والمسافة بين عنصر الطول (dl) ونقطة P المراد حساب
الجهد فيها تكون :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

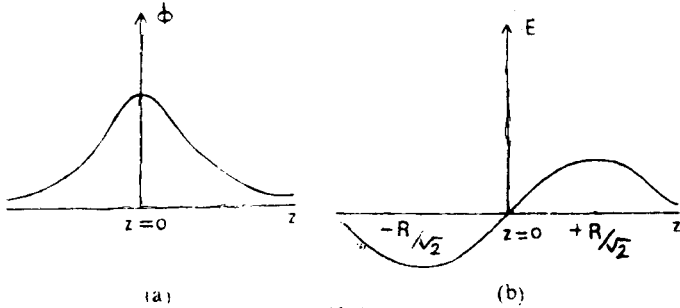
والجهد في نقطة P هو :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\lambda R d\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

حيث Q هو مقدار الشحنة الكلية في الحلقة وتساوي $Q = 2\pi R\lambda$ ، اما المجال فيحسب كالآتي :

$$E = -\nabla\Phi = -\hat{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \hat{e}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.44)$$

ومنحنى قيمة الجهد والمجال والمجال موضع في الشكل (1-22) ، a و b.



الشكل (1.22)

إذا كانت Φ ، $z \gg R$ فان مقدار الجهد Φ والمجال E يقل بموجب المعادلات الآتية :

$$\Phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \quad (1.45)$$

$$E \approx \begin{cases} \hat{e}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{for } z \gg R \\ -\hat{e}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{for } -z \ll -R \end{cases} \quad (1.46)$$

يمكن الوصول الى نفس النتيجة باستخدام المعادلة (1-15) بطريقة مباشرة وهذه المعادلة يقل ناتجها اذا وضعت الحلقة في تقطة الاصل كالآتي :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda R d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_r = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \hat{e}_r d\phi$$

حيث ان \hat{e}_r هو متجه وحدة بالاتجاه QP ويساوي :

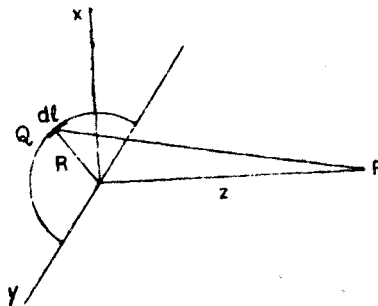
$$\hat{e}_r = -\hat{e}_x \sin \theta \cos \phi - \hat{e}_y \sin \theta \sin \phi + \hat{e}_z \cos \theta$$

وبما ان المنظومة متناظرة حول محور X فان المجال سيتجه بمحاذاة هذا المحور فقط :

$$\begin{aligned} \therefore E &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cos \theta d\phi \\ &= \hat{e}_z \frac{\lambda R 2\pi \cos \theta}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} = \hat{e}_z \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

وهذه الطريقة عملية جداً ومفضلة حيث اننا بعد ايجاد قيمة الجهد Φ نوجد المجال E الذي يساوي $-\nabla\Phi$. ولكن يجب الانتباه عند استخدامها خوفاً من عدم احتساب بعض مركبات المجال E حول محور التناظر ضمن القيمة $\nabla\Phi$ كما هو موضح في المثال الآتي :

مثال (3-1) :- جد المجال الناتج من توزيع شحنات على خط شبه دائري (semi circular) بصورة منتظمة كثافتها الخطية هي λ (الشكل (1-23)).



الشكل (1.23)

سنتيع أولاً طريقة الحل المتبع في المثال السابق.

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r_{QP}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \\ &= \frac{\lambda R\pi}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} \quad (1.47)\end{aligned}$$

حيث أن $\frac{Q}{2} = \pi R\lambda$ هي مقدار الشحنة الصافية في الخط شبه الدائري.

$$E = -\nabla\Phi = -\hat{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \hat{e}_z \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (1.48)$$

ويظهر في الجواب أن قيمة المجال الكلي هنا يساوي نصف قيمة المجال المحسوب في المثال السابق للحلقة الكاملة واتجاهه باتجاه محور Z أيضاً.
الآن سنتيع الطريقة الثانية وذلك باستخدام المعادلة (1-15) لإيجاد قيمة المجال E مباشرة.

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \hat{e}_r \frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{e}_r d\phi \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} \left\{ -\hat{e}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \cos\phi d\phi - \hat{e}_y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \sin\phi d\phi \right. \\ &\quad \left. + \hat{e}_z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\phi \right\} \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} \left\{ -\hat{e}_x 2\sin\theta + \hat{e}_z \pi \cos\theta \right\} \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)} \left\{ -\hat{e}_x \frac{2R}{(R^2+z^2)^{1/2}} + \hat{e}_z \pi \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right\} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}} \left\{ -\hat{e}_x \frac{2R}{\pi} + \hat{e}_z z \right\} \quad (1.49)\end{aligned}$$

نلاحظ الاختلاف الواضح بين قيمة المجال المحسوب بهذه الطريقة والطريقة السابقة (معادلة 1-48) ومعنى هذا ان خطأ قد حدث في استخدام احدى هاتين الطريقتين. هذا الخطأ هو الذي اشرنا اليه في نهاية حل المثال السابق فلو اخذنا بنظر الاعتبار صفة تناظر هذه المنظومة سنجد انه بالرغم من كون المركبة باتجاه محور Y للمجال E تساوي صفر الا انه يجب ان تكون هناك مركبة اخرى باتجاه محور X (E_x) لكون الشحنات جميعها موجبة القيمة وتقع على المستوى الذي تكون فيه قيمة X تساوي صفرأ وهذه المركبة (E_x) هي سبب الخطأ لانها تدخل ضمن المعادلة (1-48) لذا فهذه المعادلة ناقصة. اما سبب عدم دخول هذه المركبة في الحساب فهو اننا عند ايجادنا لقيمة الجهد Φ نأخذ بنظر الاعتبار الشحنات الواقعة على محور Z فقط ولكننا لاعلم لدينا بالجهد الناتج من الشحنات الموجودة على محور X ومحور Y وذلك لعدم توفر بيانات كافية لدينا لاحتساب $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ و $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ لذا يكون لزاماً علينا امام احتساب قيمة الجهد Φ في نقطة خارج محور Z او احتساب المجال مباشرة باستخدام المعادلة (1-15) مع الاخذ بنظر الاعتبار النتائج الفيزيائية المترتبة على وجود المجال عندما لا يتم مراعاة الحالات الثلاث الخاصة المذكورة في احتساب قيمة الجهد .

1-12 علاقتان مهمتان (Two Important Relations)

لو اخذنا لف المتجهات (Curl of a vectors) في المعادلة (1-42) نجد ان :

$$\nabla \times E = -\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1.50)$$

ويمكن الوصول الى نفس النتيجة من المعادلة (1-48) بتحويل التكامل الخطي في هذه المعادلة الى تكامل سطحي وذلك باستخدام مبرهنة ستوك (Stokes' theorem) (انظر الملحق A) وكالآتي :

$$\oint_C E \cdot dl = \int_S \nabla \times E \cdot \hat{e}_n \cdot dS$$

$$\therefore \int_S \nabla \times E \cdot \hat{e}_n \cdot dS = 0$$

وبما ان اختيار S هو عشوائي فان $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ وهكذا نحصل على قانونين مهمين في الكهربية المستقرة وهما :

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.51)$$

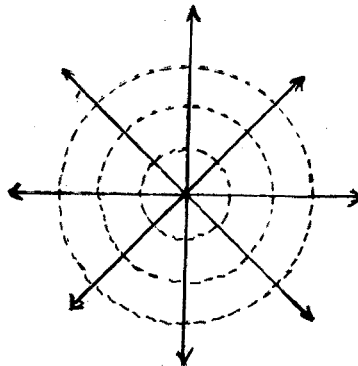
$$(ii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.52)$$

ان المعادلة الأولى تأتي من قانون التربيع العكسي لكولومب اما المعادلة الثانية فلا تعتمد على هذا القانون ، قد تكون هناك اعتبارات اخرى تعطي هذه النتيجة على كل حال فهي تعتمد على الطبيعة المركزية للقوة (Central nature of force) وبما ان قوانين الكهرومغناطيسية تشتق من هذه القوانين لذا يمكن اعتبارها من القوانين الاساسية في الكهرومغناطيسية.

1-13 السطح المتساوي الجهد (Equipotential Surface) :-

اي سطح يتساوى الجهد في جميع نقاطه يسمى سطحاً متساوي الجهد ومعادلته تكون لذلك $\phi(r) = C$

حيث ان C مقدار ثابت ، وقيم الثابت C المختلفة تعطينا مجموعة او عائلة من هذه الاسطح. فعلى سبيل المثال لو كانت الشحنة نقطية فان سطحها المتساوي الجهد عبارة عن كرات مركزها هذه الشحنة كما في الشكل (1-24).



الشكل (1-24)

لو فرضنا ان ازاحة مقدارها dr حدثت لاحد الاسطح المتساوية الجهد هذه والذي معادلته $\Phi(r) = C$ مثلاً، فاذا سيحدث؟ لكون السطح متساوي الجهد فان:

$$\begin{aligned} \Phi(r) - \Phi(r + dr) &= 0 \\ \Phi(r) - \left\{ \Phi(r) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot dr \right\} &= 0 \quad \text{اي ان :} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr &= 0 \\ \nabla \Phi \cdot dr &= 0 \\ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= 0 \quad \text{أو :} \quad (1.53) \end{aligned}$$

ومعنى هذا اذا كانت الازاحة ضمن السطح فان المجال E سيكون عمودياً على هذا السطح اي ان خطوط المجال (field lines) عمودية على السطح المتساوي الجهد.

1-14 الطاقة الكهربائية المستقرة (Electrostatic Energy) :-

الطاقة الكهربائية المستقرة عبارة عن طاقة كامنة تنتج من الفعل او التأثير المتبادل بين الشحنات.

لمعرفة طريقة حساب هذه الطاقة نفرض ان شحنة مثل q_1 موجودة في نقطة معينة في الفراغ وشحنة أخرى q_2 ثم نقلها من مالا نهاية الى نقطة تبعد مسافة r_{12} عن الشحنة q_1 . ان جهد الشحنة q_1 في نقطة r_{12} يساوي $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ وهذه القيمة عبارة عن مقدار الشغل المنجز لنقل وحدة الشحنة من مالا نهاية الى نقطة معينة، اما الشغل المطلوب لنقل الشحنة q_2 من مالا نهاية الى النقطة التي تبعد مسافة r_{12} عن q_1 هو $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ ، واذا تم اضافة شحنة ثالثة q_3 الى هذه المجموعة فالشغل

المطلوب لتقلها يجب ان يعادل مجال كل من الشحنتين q_1 و q_2 فاذا كانت المسافة بين كل من هاتين الشحنتين والشحنة الثالثة هي r_{13} و r_{23} فان الزيادة في الطاقة الكامنة تكون :

$$\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

فاذا استررنا بنفس الطريقة فان الطاقة الكلية اللازمة لتجميع كمية من الشحنات تكون :

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (1.54)$$

ان الحد ($i < j$) وضع في المعادلة لضمان حساب كمية الطاقة المطلوبة او الشغل بين كل زوج من الشحنات مرة واحدة فقط. ويمكن كتابة المعادلة السابقة باشكال مختلفة منها :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \dots \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}} + \frac{q_4}{r_{34}} + \dots \right) + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1} q_i \sum_{j=1} \frac{q_j}{r_{ij}} ; \quad i \neq j \end{aligned} \quad (1.55)$$

في هذه المعادلة تم احتساب الطاقة بين كل زوج مرتين لذلك فقد تم ضربها بعامل $\frac{1}{2}$ وبما ان المقدار $\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$ هو الجهد Φ_i الناتج من جميع الشحنات عدا الموجودة في نقطة (q_i) وبالتعويض تصبح المعادلة السابقة :

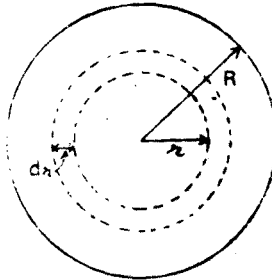
$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad (1.56)$$

اما اذا لم تكن الشحنات ثابتة اي كان هناك توزيع مستمر للشحنة فان الشغل المطلوب يكون :

$$W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d\tau \quad (1-57)$$

مثال (1-4) :- جد مقدار الطاقة الكلية في كرة مشحونة بانتظام نصف قطرها يساوي R.

ان الطاقة الكلية المراد حسابها تساوي في الحقيقة كمية الشغل المطلوب لنقل الشحنات من اللانهاية الى الكرة .



الشكل (1-25)

نفرض ان هذه الكرة عبارة عن عدة طبقات رقيقة متراصة من الشحنات. وستحسب الشغل المطلوب لتجميع او تكوين طبقة او قشرة رقيقة من الشحنات في هذه الكرة ثم بالتكامل نحسب كمية الشغل الكلي المطلوب وليكن سمك هذه الطبقة هو dr (وهي تمثل في الحقيقة كرة وليكن نصف قطرها r كما في الشكل (1-25)). ان الشحنة الموجودة داخل هذه الكرة مقدارها $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. على فرض ان كثافة الشحنة هي ρ

ان كمية الشحنة الموجودة في سطح هذه الكرة (القشرة التي سمكها dr) يكون :

$$\therefore dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

والشغل المطلوب لتجميع شحنات هذه القشرة ونقلها من اللانهاية يكون :

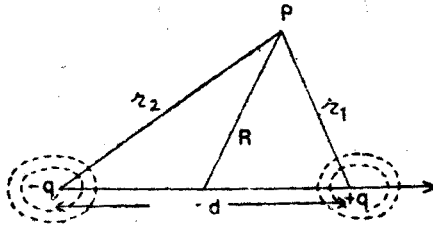
$$\begin{aligned} dW &= \text{potential at } r \times dq \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4/3\pi r^3 \rho}{r} \rho 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr \end{aligned}$$

وهكذا فان الشغل الكلي المطلوب لتجميع شحنات الكرة الكبيرة كلها يكون :

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \quad (1.58)$$

1-15 ثنائي القطب الكهربائي (Electric Dipole) :-

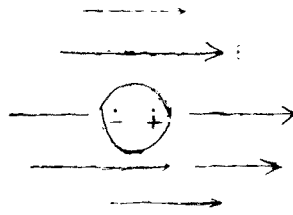
لاحظنا ان متجه الفيض الكهربائي (electric flux vector) يتجه شعاعياً الى الخارج ويمكن ايجاد قيمته بتطبيق بسيط لقانون كاونس. على كل حال اذا كان هناك اكثر من شحنة واحدة فان نموذج او شكل المجال يصبح اكثر تعقيداً. على سبيل المثال نفرض ان هناك شحنتين متساويتين في المقدار احدهما موجبة (+q) والاخرى سالبة (-q) تفصل بينها مسافة صغيرة (الشكل 1-26) مثل هذه المنظومة تسمى ثنائي القطب (Dipole).



الشكل (1.26)

وغالباً ماتصادفنا مثل هذه المنظومة في الفيزياء على سبيل المثال :

(i) عندما توضع ذرة او جزيئة داخل مجال كهربائي فان الشحنات الموجبة والسالبة فيها تتحرك منفصلة بعضها عن بعض تحت تأثير قوة المجال مكونة ثنائي القطب كما في الشكل (1-27) ،



الشكل (1.27)

(ii) هناك بعض الجزئيات تكون شحناتها الموجبة منفصلة عن الشحنات السالبة بصورة بسيطة حتى في غياب المجال الخارجي مثل جزيئة الماء H_2O (الشكل (33-)) وعلى الرغم من ان هذا المثال يتلائم تماماً وتعريف ثنائي القطب، انما يمكن اعتباره كذلك في حالة دراسة المجال في المسافات الطويلة جداً.

لدراسة المجال في ثنائي القطب نفرض ان شحنتين وضعتا على محور Z احدهما على مسافة $\frac{d}{2}$ + والاخرى على مسافة $\frac{d}{2}$ - من نقطة الاصل فاذا يكون المجال نتيجة هذا التشكيل في نقطة P مثلاً ؟

اذا كانت P قريبة من الشحنتين فان الجهد يكون نفسه تقريباً كما لو ان الشحنتين كانتا منفصلتين (لاتؤثر احدهما في الاخرى) وتكون الاسطح المتساوية الجهد كروية تقريباً كما في الشكل (1-26) (لاحظ ان الشحنتين ليستا في مركزي الكرات التي تمثل الاسطح المتساوية الجهد، هل تستطيع ايضاح السبب ؟) اما اذا كانت نقطة p تبعد كثيراً عن نقطة الاصل بمسافة r فان الجهد يكون

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \quad (1.59)$$

حيث r_1 و r_2 هما المسافات بين نقطة p والشحنتان $+q$ و $-q$ على التوالي :

$$\text{Now } r_1^2 = R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)R \cos \theta$$

إذا كانت θ هي الزاوية بين محور Z وقبة الجهد في نقطة p

$$\therefore r_1^2 = R^2 \left\{ 1 + \frac{d^2}{4R^2} - \frac{d \cos \theta}{R} \right\}$$

$$\text{Hence, } \frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{d^2}{4R^2} - \frac{d \cos \theta}{R} \right\}^{-1/2} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{d \cos \theta}{2R} \dots \right\}$$

$$\approx \frac{1}{R} + \frac{d \cos \theta}{2R^2} \quad \text{وينفس الطريقة فان :}$$

وبالتعويض في المعادلة (1-59) نحصل على :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{R^2} \quad (1.60)$$

أن المتجه المحاذي لمحور ثنائي القطب الذي يمثل اتجاه الشحنة $-q$ والشحنة $+q$ وقبته (qd) ، يسمى عزم ثنائي القطب (dipole moment) ، ويرمز له بالحرف p .

$$p \cdot r = pr \cos \theta = qdr \cos \theta$$

$$\Phi(r) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} \quad (1.61)$$

نستنتج من المعادلة السابقة مايلي :

1- الجهد هنا لايعتمد على نظام الاحداثيات المستخدمة اي ان المعادلة يمكن استخدامها

حتى لو كانت P لاتشير الى اتجاه محور (Z) ، نفسه .

2- الجهد هنا يتناسب مع معكوس مربع المسافة $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ لذلك يكون التغير فيه.

يمكن اعتبار جهد ثنائي القطب تدرجاً (gradient) حيث :

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

لذلك يمكن كتابة العلاقة (1-61) بالشكل الآتي :

$$\Phi(r) = - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -p \cdot \nabla \Phi_0. \quad (1.62)$$

حيث ان جهد وحدة الشحنة Φ_0 يساوي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$

كلما عرف الجهد فان الجهد الكهربائي يمكن ايجاده مباشرة بأخذ تدرج الجهد Φ

ولذلك فان ثنائي القطب الذي يكون اتجاهه محاذياً لمحور Z (الشكل (1-26)

فركبات المجال الثلاثة تكون :

$$\begin{aligned} E_z &= - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r \cos \theta}{r^3} \right) \\ &= - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \\ &= - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3 \cos^2 \theta - 1 \right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} E_z \\ \\ \\ \end{aligned}} \right\} (1.63)$$

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx'}{r^5}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}$$

قد يكون من المفيد حساب المجال الكهربائي الناتج من ثنائي القطب الموجود في إحداثيات قطبية كروية.

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \therefore E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0\end{aligned}\quad (1.64)$$

اما المجال الناتج من ثنائي القطب الكهربائي فهو :

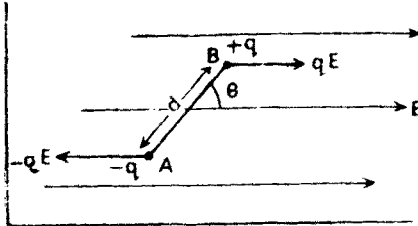
$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \right) \right] \\ \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \quad \text{and} \quad \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right]\end{aligned}$$

1-10 ثنائي القطب في مجال كهربائي منتظم
(Dipole in uniform electric field)

إذا وضع ثنائي قطب ذي شحنتين $-q$ و $+q$ تفصل بينها مسافة مقدارها d في مجال منتظم (الشكل 1-28) فالطاقة الكامنة للثنائي تكون :

$$W = q(\Phi_B - \Phi_A) = -qd \cos \theta E$$

$$= -qd \cdot E = -p \cdot E \quad (1.66)$$



الشكل (1.28)

يتبين من المعادلة السابقة ان الطاقة لاتعتمد على موقع الثنائي وانما تعتمد فقط على الزاوية بين P و E (عزم الثنائي والمجال) ونستدل ايضاً على عدم وجود قوة لها تأثير في الثنائي. على كل حال بما ان المجال يظهر قوة مقدارها $+qE$ على الشحنة $+q$

$-qE$ على الشحنة $-q$ لذا يتولد مزدوج قوى (couple) نرسم له بالحرف T .

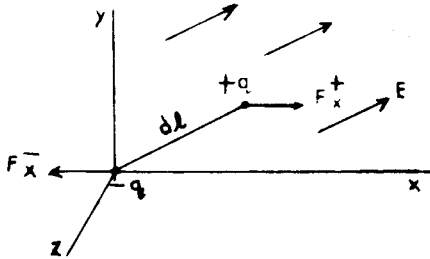
$$T = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = pE \sin \theta = p \times E \quad (1.67)$$

وهذا المزدوج يحاول جعل الثنائي باتجاه موازي للمجال .

17 - 1 ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم
 ∴ (Electric dipole in a Non - uniform Electric Field)

لايجاد القوة المؤثرة على ثنائي قطب موجود في مجال كهربائي غير منتظم ، نفرض ان شحنة مقدارها $-q$ موجودة في نقطة الاصل كما في الشكل (1-29) . القوة بالاتجاه الموجب لمحور X المسلطة على ثنائي القطب تساوي :

$$F_x^+ = q(E_x + dE_x)$$



الشكل (1-29)

والقوة بالاتجاه السالب لمحور X تساوي : $F_x^- = qE_x$
 ومحصلة القوى بالاتجاه الموجب لمحور X تساوي :

$$F_x = qdE_x$$

وبما ان المجال غير منتظم فان :

$$dE_x = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) dz$$

$$\therefore F_x = q\left(dx \frac{\partial E_x}{\partial x} + dy \frac{\partial E_x}{\partial y} + dz \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= q\left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z}\right) E_x$$

$$= q(\mathbf{l} \cdot \nabla) E_x = (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_x$$

(1.68)

$$dl = \hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz \quad \text{and} \quad \text{وذلك لأن}$$

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد المركبات الباقية وعليه فان محصلة القوى المسلطة على ثنائي القطب تساوي :

$$F = (p \cdot \nabla) E \quad (1.69)$$

1-18 الطاقة الكامنة المتبادلة بين الثنين من ثنائي القطب (Mutual potential energy of two dipoles)

نفرض ان هناك ثنائي عزم الاول هو P_1 وعزم الثاني هو P_2 . وليكن الثنائي الاول موضوعاً في مجال الثنائي الثاني فان الشغل يساوي :

$$W = -(p_1 \cdot E) \quad (1.70)$$

حيث E هو المجال الناتج من الثنائي الثاني ،

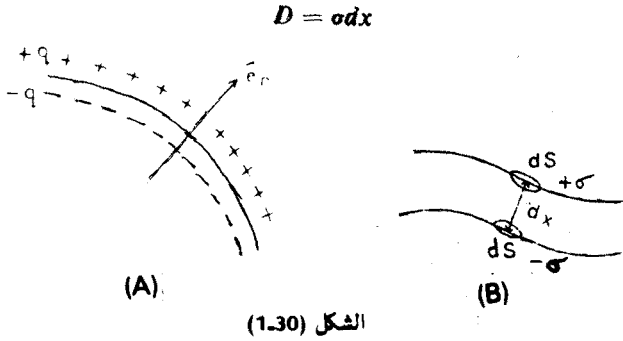
$$\therefore W = - \left[p_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|^3} \left\{ \frac{3(p_2 \cdot r)}{|r|^2} r - p_2 \right\} \right] \quad \text{انظر 1-65}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|^3} \left[p_1 \cdot p_2 - \frac{3(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r)}{|r|^2} \right] \quad (1.71)$$

1-19 الطبقات المزدوجة الكهربائية (Electric Double Layers) :-

لوحظ في اثناء دراسة بعض المشاكل الحيوية والغروية وجود طبقتين من الشحنات حول سطح واحد تتكون من صفين متجاورين من شحنات متساوية في المقدار احدهما

موجبة والاخرى سالبة مفصولة بعضها عن بعض بمسافات صغيرة جداً (dx) كما في الشكل (1-30 A). ان حاصل ضرب الكثافة السطحية للشحنة σ والمسافة الفاصلة بين الطبقتين dx تسمى قوة الطبقة (Strength of the layer) ويرمز له بالحرف D .



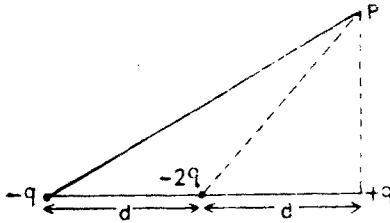
ويرينا الشكل (1-30 B) عنصري مساحة من سطحين ذوي شحنة $\pm \sigma dS$ تفصل بينهما مسافة dx وهذه في الحقيقة تمثل عزماً ثنائياً هو P ويساوي σdx وبالتعويض فانه يساوي DdS ، لذلك يمكننا ان نتصور مزدوج الطبقات الكهربائي صفيين متراصين من ثنائيات القطب اما اتجاه عزم الثنائي فهو عمودي على السطح وجهد مزدوج الطبقات من نقطة تبعد مسافة r يساوي :

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{e}_n D dS \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{e}_n dS \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{D d\Omega}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.72)$$

حيث ان $d\Omega$ هو عنصر الزاوية المجهمة المتكونة عند النقطة من عنصر المساحة dS .

1-20 رباعي القطب الكهربائي (Electric Quadrupole) :-

أي تجمع لعدة شحنات مثل $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$ يشغل حيزاً محدوداً يتصرف كما لو كان شحنة تقطية قهبا يساوي المجموع الجبري لهذه الشحنات $\sum q_i$ والمجال الكهربائي يقل هنا لانه يتناسب مع معكوس المسافة ولو حدث ان اصبح المجموع الجبري $\sum q_i$ مساوياً للصفر فان المجال يكون صفراً ايضاً لانه اذا كان المجال مساوياً لمعكوس المسافة فقد تكون المنظومة في هذه الحالة ثنائياً. سنضي قدماً ونفترض ان المجموع العددي (Scalar sum) للشحنات $\sum q_i$ وكذلك المجموع الاتجاهي (Vector sum) $\sum p_i$ يساوي صفراً ايضاً وسنأخذ مثلاً لهذا ، هو توزيع الشحنات المبين في الشكل (1-31). والمعروف برباعي القطب الخطي (Linear Quadrupole).



الشكل (1.31)

يمكن اعتبار المنظومة او التشكيل الموضح في هذا الشكل على انها عزمان لثنائيين p متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه موضوعين على خط واحد وتفصل بينهما مسافة مقدارها d . ولذلك فان الجهد في نقطة p مثلاً والناتج من رباعي الاقطاب هذا بحسب كالاتي :

$$\begin{aligned}
\Phi_P &= -d \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\
&= -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2 \cos \theta}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \\
&= -\frac{pd}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - \frac{2 \cos^2 \theta}{r^2} \right\} \left\{ \because \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \right\} \\
&= \frac{pd}{4\pi\epsilon_0 r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \qquad (1-73)
\end{aligned}$$

اما عزم رباعي القطب فيحسب اذا شبه بعزم ثنائي القطب كالاتي :

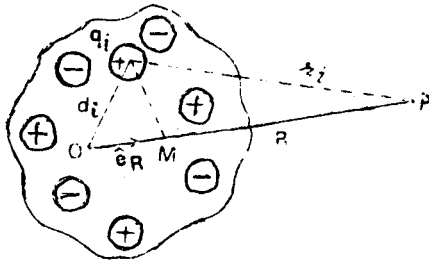
$$Q = pd = qd^2$$

$$\therefore \Phi_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \qquad (1.74)$$

ويظهر جلياً ان المجال ينقص بمقدار $\frac{1}{r^4}$

1-21 الجهد الناتج من توزيع شحنات بصورة اعتباطية (Potential due to an arbitrary distribution of charge)

لو توزعت مجموعة من الشحنات النقطية ضمن حيز معين بطريقة معقدة (الشكل 1-32) فاذا يكون الجهد الناتج من هذه الشحنات في نقطة p التي تبعد مسافة مقدارها R عن نقطة الاصل.



الشكل (1.32)

نفرض أن q_i هي شحنة موجودة في هذا الحيز وتبعد مسافة d_i عن مركزها فالجهد الناتج عن هذه الشحنة يساوي :

$$\Phi_i(r_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |R - d_i|} \quad (1.75)$$

حيث r_i هي المسافة بين نقطة p والشحنة q_i . إذا كانت المسافة R أكبر بكثير من المسار d_i ($R \gg d_i$) فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها بالشكل التقريبي الآتي :

$$\Phi_i(r_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{هذا يصح لأي شحنة } q_i$$

لذا فالجهد الكلي لكافة الشحنات يساوي :

$$\Phi(R) = \frac{\sum q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.76)$$

وهذا المقدار نفسه كما لو أن الجهد كان ناتجاً من شحنة نقطية مقدارها Q موجودة في

$$Q = \sum_i q_i \quad \text{نقطة الاصل حيث أن}$$

إذا كان عدد الشحنات الموجبة مساوياً لعدد الشحنات السالبة أي أن $Q=0$ في حيز معين وهذا يعني أن الحيز متعادل ولا يترتب على ذلك وجود أي جهد حول هذا الحيز، إلا أن هناك في بعض الأحيان اجساماً أو مناطق متعادلة لكن توزيع الشحنة داخلها يولد تأثيراً متبايناً في نقاط معينة. ولعرفة مقدار الجهد سنأخذ نفس الحيز الموضح في الشكل (1-32) ونستخدم نفس المعادلة (1-75) لقياس الجهد باستثناء واحد هو أننا في الحالة الأولى فرضنا أن d_i اصغر بكثير من R أما الآن فنفرض أن r_i تختلف عن R بمسافة مثل OM وكما هو موضح في الشكل لاجل الحصول على مقدار تقريبي أفضل للجهد.

$$\therefore r_i = R - d_i \cdot \hat{e}_R \quad (1.77)$$

حيث \hat{e}_R هو المتجه الذي يمثل اتجاه المسافة R .

$$\therefore \frac{1}{r_i} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{d_i \cdot \hat{e}_R}{R}\right)} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{d_i \cdot \hat{e}_R}{R}\right) \quad \text{إهمال الحدود الأعلى}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi(R) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{d_i \cdot \hat{e}_R}{R}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \sum_i q_i \frac{d_i \cdot \hat{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \end{aligned} \quad (1.78)$$

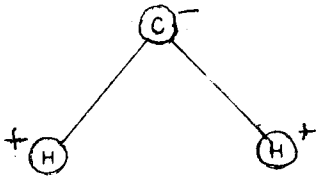
نجد أن الحد الأول هنا هو نفسه في المعادلة (1-76) وهو يساوي صفرًا في هذه الحالة، لاننا فرضنا أن $Q=0$.

$$\therefore \Phi(R) = \sum_i q_i \frac{d_i \cdot \hat{e}_R}{4\pi\epsilon R^2} \quad (1.79)$$

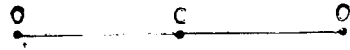
لو كان عزم ثنائي القطب لهذا التوزيع هو $p = \sum q_i d_i$ فان :

$$\Phi(R) = \frac{p \cdot \hat{e}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1.80)$$

وهكذا يتبين ان جهد اي مجموعة من الشحنات موزعة بشكل تبدو فيه متعادلة مجموعها هو في الحقيقة جهد ثنائي القطب (dipole potential).
سنأخذ مثالاً على هذا التوزيع هو جزيئة الماء (H_2O). ان هذه الجزيئة لها عزم ثنائي القطب لوجود مقدار من الشحنة السالبة في ايون الاوكسجين والشحنة الموجبة في كل من ايوني الهيدروجين (الشكل (1-33)).



الشكل (1-33)



الشكل (1-34)

من جهة اخرى لو اخذنا جزيئة ثاني اوكسيد الكربون (CO_2) والتي هي جزيئة خطية متناظرة (الشكل 1-34) فانها بالاضافة لكونها متعادلة لاتملك عزم ثنائي القطب فانها بالاضافة لكونها متعادلة لاتملك عزم ثنائي القطب (هل يعني هذا ان مثل هذا التوزيع لا يولد اي جهد على الاطلاق؟).

تمارين الفصل الأول

1-1 جسمان كتلة كل منها m وشحنته q متباعدة بعضهما عن بعض مغلقان من نفس النقطة بحيث يكون طول كل منهما L . برهن ان زاوية ميل الخيطين عن الخط الشاقولي (θ) ، تحسب من المعادلة الآتية :

$$q^2 \cos \theta = 16\pi\epsilon_0 mgl \sin^2 \theta$$

1-2 اربع كرات صغيرة متساوية كتلة كل منها m وتحمل شحنة مقدارها q معلقة من نقطة واحدة بخيوط خفيفة طول كل منها L . جد ضلع المربع الذي تكون الكرات نتيجة قوة التنافر بينها؟ اذا زادت شحنة كل كرة وطول الخيط وذلك بضرها بمعامل مثل k ، جد الكتلة التي يجب ان تكون الكرة التي تجعل طول ضلع المربع مساوياً l Ka ؟

1-3 اطلقت جسيمات α شحنتها $5 \times 10^6 \text{ eV}$ باتجاه نويات ذرات ثقيلة شحنة كل منها تساوي 25 مرة بقدر شحنة الالكترن. جد اقرب مسافة تصل جسيمات α والنويات؟.

1-4 اذا علمت ان كتلة الارض هي 6×10^{24} كغم وكتلة القمر 7×10^{22} كغم والمسافة بينها 4×10^8 م. جد كمية الشحنات الكهربائية المفروض وجودها على الارض والقمر لتتعاقد قوة الجذب الثقالي بينها اذا علمت ان النسبة بين شحنتيهما هي نفس النسبة بين كتلتيهما وثابت الجذب الثقالي يساوي $-6.7 \times 10^{11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$.

1-5 اذا كان المجال الكهربائي في كل نقطة من قشرة كروية مشحونة بانتظام هو صفر. برهن وبدون استخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاولس ان القوة الكهربائية المستقرة تناسب عكسياً مع مربع المسافة.

1-6 كرة نصف قطرها 'a' مملوءة بشحنات موجبة وكثافة شحنتها الحجمية ρ تتغير بتغير المسافة r من مركز الكرة ولكنها ثابتة لمسافة معطاة مثل r ، جد قيمة الشحنة الكلية في الكرة اذا كانت :

$$(a) \rho = \frac{\rho_0 a^2}{r}$$

$$(b) \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

7-1 لو كانت قيمة المجال الكهربائي في الغلاف الجوي على ارتفاع 1400 متر فوق سطح الأرض تؤثر بالاتجاه الأسفل هو 20 فولت / متر وقيمة المجال على سطح الكرة الأرضية أيضاً بالاتجاه الأسفل يساوي 200 فولت / متر جد معدل كثافة الشحنة في الغلاف الجوي تحت ارتفاع 1400 متر. وبين فيما إذا كان التأثير في الأيونات الموجبة او السالبة.

8-1 صفيحة مربعة الشكل مشحونة بانتظام بكثافة شحنتها σ . أثبت ان الجهد

$$\Phi_0 = \frac{\sigma a}{\pi \epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

حيث a هو طول ضلع الصفيحة.

9-1 اذا كانت كثافة الشحنة للالكترون (للكهرب) في ذرة الهيدروجين موزعة بالشكل

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

حيث a_0 هو نصف قطر بور (Bohr radius). أثبت ان طاقة التأثيرات التبادلية (interaction energy) بين الالكترون والبروتون تحسب من

$$U = - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a_0}$$

10-1 كرة معدنية سعتها الحجمية 10 لتر مملوءة بالنتروجين لو كانت كثافة النتروجين هي 3×10^{22} جزيئة لكل لتر. جد جهد الكرة اذا تم اخراج الكترون واحد من كل جزيئة الى مسافة بعيدة جداً عن الكرة.

11-1 اذا كان نصف قطر نواة اليورانيوم هو 10^{-14} م وتحتوي على 92 الكترون ، لو فرضنا ان الشحنة موزعة بانتظام في النواة. جد الطاقة الكهربائية المستقرة للنواة بال (MeV)؟ اذا تم تقسيم نواة اليورانيوم الى قسمين متساويين نصف قطر كل منهم 8×10^{-15} م. جد الطاقة الكهربائية المستقرة المتحررة؟

12-1 شحنتان مختلفتان بالمقدار والاشارة موضوعتان في حيز معين. برهن على ان السطح المتساوي الجهد الذي تكون فيه $V=0$ هو كروي. ماذا يحدث لو ان الشحنتين متساويتى المقدار؟

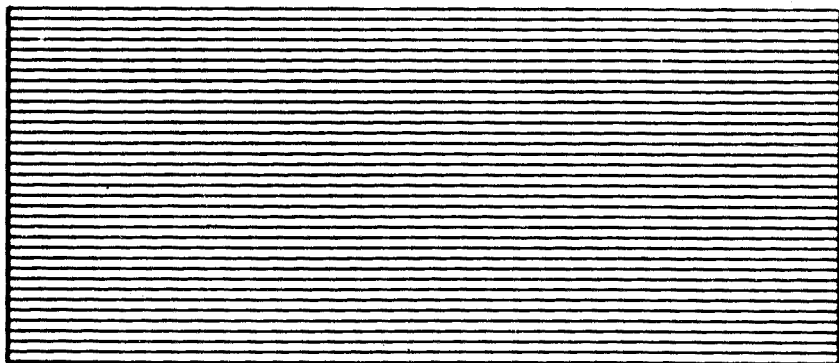
13-1 ثنائيان كهربائيان A و B وضعا بشكل يكون فيه اتجاه الشئائي A يمر خلال B واتجاه الشئائي B عمودي على A. برهن ان اتجاه القوة المسلطة من قبل A على B ليس هو نفس اتجاه القوة المسلطة من قبل B على A. الا يخالف هذا الشئء قانون نيوتن الثالث في الحركة ؟

14-1 شحنتان قيمة كل منها Q - وتفصل بينهما مسافة مقدارها $2a$. وضع بينهما جسم كتلته m ويحمل شحنة مقدارها +Q . اذا ازيح هذا الجسم مسافة صغيرة بالاتجاه العمودي على الخط الواصل بين الشحنتين ثم ترك حراً. جد الفترة الزمنية لمحصلة الحركة الاهتزازية. ماذا يحصل لو ان الجسم اعطي ازاحة صغيرة على نفس الخط الواصل بين الشحنتين ؟

الفصل الثاني

الكهربائية المستقرة في المواد العازلة

Electrostatics in Dielectrics



الفصل الثاني

الكهربائية المستقرة في المواد العازلة

Electrostatics in Dielectrics

درسنا في الفصل الاول المجال الكهربائي الناتج من وجود شحنات في الفراغ، ومعروف منذ فترة طويلة ان للوسط (medium) دور مهم في ايجاد القيمة المطلقة للمجال.

يتباين المجال الكهرومغناطيسي (electromagnetic field) تبايناً واضحاً بين جسم وآخر على مستوى المسافات الفاصلة بين الذرات، لذلك في دراستنا للظاهرة الكهرومغناطيسية سوف لانعير اهمية للتراوح الحاصل في قيم المجال على مستوى الذرات. وسندرس في هذا الفصل نموذج بنيوي منسجم للمادة يمكن بواسطته الحصول على قيم المجالات الصحيحة دائماً. لذا يجب الاشارة الى ان المجالات البنيوية ليست بالضرورة المجالات الفعلية المؤثرة على الجسيمات داخل المادة.

2-1 الموصلات والعوازل (Conductors and Insulators) :-

تصف المواد بصورة عامة من ناحية خواصها الكهربائية الى صنفين رئيسيين حسب تصرفها تحت تأثير مجال كهربائي خارجي وهما :

1 - المواد الموصلة (Conductors) :-

وهي تلك المواد التي تحتوي ذراتها على الكترونات حرة تستطيع تحت تأثير مجال كهربائي (الالكترونات جسيمات خفيفة جداً تستطيع الحركة اذا كانت حرة) يولد هذا المجال الكهربائي خلال هذه المواد سيلاً متدفقاً من الشحنات يسمى التيار الكهربائي (electric current) مثل هذه المواد مادة الكربون، هناك بعض المواد عناصر كانت ام مركبات تزول مقاومتها نهائياً في درجات حرارة معينة وتصرف كموصلات فائقة التوصيل (super conductors) مثل الزئبق في درجة حرارة 4.2°K .

2- المواد العازلة (Dielectrics or Insulators) :-

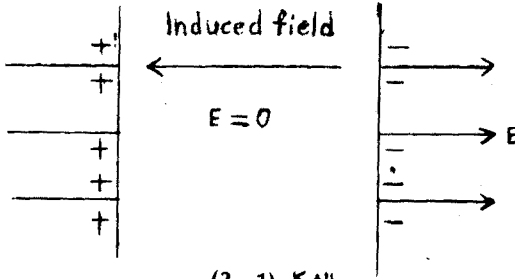
وهي تلك المواد التي تكون فيها الالكترونات مرتبطة بقوة كبيرة بالذرات او الجزيئات الأم المكونة لها فتعجز عن الحركة تحت تأثير مجال كهربائي خارجي (في الحقيقة الالكترونات تتحرك تحت تأثير المجال الكهربائي لكن حركتها هذه بسيطة جداً وبذلك لايتكون سيل من الالكترونات المتحركة). مثل هذه المواد الكبريت (Sulphur)، والمايكا (mica)، والبورسلين (Porcelain). قد يحدث ان تنهار مقاومة المواد العازلة فجأة تحت تأثير مجال كهربائي عالي جداً ، والعازل الجيد مثلاً تنهار مقاومته تحت تأثير مجال يصل الى 10^9 فولت / متر.

ان هناك مواد جيدة التوصيل ومواد جيدة العزل وبينهما يقع صنف ثالث يسمى اشباه الموصلات (Semiconductors) لها مواصفات وسطية بين التوصيل والعزل ويجدر الذكر ان تقنية العصر الحديث تعتمد على مثل هذه المواد.

2-2 الموصل في مجال كهربائي (Conductor in an electric field) :-

ماذا يحدث اذا وضع موصل تحت تأثير مجال كهربائي؟ يرينا الشكل (1-2) قطعة من مادة موصلة موضوعة تحت تأثير مجال كهربائي. الالكترونات ستتحرك بحرية على سطح القطعة نتيجة وجود المجال (لكن لايمكنها مغادرة السطح لوجود قوة كبيرة تربطها) ونتيجة حركتها يتولد مقدار من شحنة الصافية على سطحي القطعة. تحت هذه الشحنات على الاسطح مولدة مجالاً كهربائياً داخل القطعة نفسها معاكس في اتجاهه للمجال الخارجي. تستمر هذه الالكترونات بالحركة الى ان تصبح قيمة المجال الداخلي صفراً. اي زوال المجال الكهربائي المستقر في القطعة. بما ان $E = -\nabla\Phi$ ويساوي صفراً، والجهد Φ لايتغير من نقطة الى اخرى فان الموصل يصبح في هذه الحالة منطقة متساوية الجهد (equipotential region) بالاضافة لذلك ولكون المجال مساوياً للصفر ولان تدرج المجال يساوي $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon = 0$

فهذا يعني ان μ تساوي صفراً ($\mu = 0$) ايضاً وهذا معناه ان الشحنة ليست موزعة على الحجم وانما هي مستقرة على الاسطح الخارجية فقط وتسمى هذه الاسطح بالاسطح المتساوية الجهد. اما اذا كانت الشحنات متحركة على الاسطح الخارجية فعنى هذا وجود مجال كهربائي مستقر الذي يولد تياراً في السطح. المجال يكون عمودياً على الاسطح المتساوية الجهد.

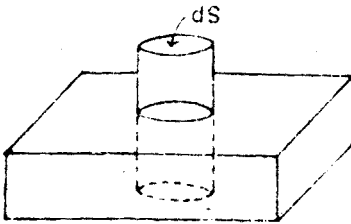


الشكل (2.1)

2-3 المجال الكهربائي عند سطح موصل مشحون

:- (Electric field at the surface of a charged conductor)

تصور اسطوانة مساحة قاعدتها (dS) موضوعة على سطح موصل بحيث يكون نصفها داخل السطح والنصف الآخر في الهواء وقاعدتها موازيتين للسطح كما في الشكل (2-2).



الشكل (2.2)

إذا كان المجال يساوي E . الفيض على السطح هو $E \cdot dS$. وقية الفيض على الاسطح الاخرى تساوي صفراً وذلك لعدم وجود مجال داخلي في الموصل ، لذلك وحسب قانون كاوس فان الفيض يساوي:

$$E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0}$$

حيث σ هي الكثافة السطحية للشحنة.

$$E = \sigma / \epsilon_0 \quad (2.1)$$

2-4 المتسمات (Capacitors) :

المتسمة هي وسيلة اوجهاز لتخزين الطاقة ، وتتكون من زوج من الموصلات ذات قطبين مختلفين يحملان نفس المقدار من الشحنة. اذا فرضنا ان مقدار الشحنة هو $+Q$ موزعة على السطح بكثافة سطحية هي $+$ σ و $-$ σ على كل من السطحين الموصلين والكثافة هنا لا تكون ثابتة مثل الجهد Φ_+ و Φ_- لكون السطحين متساوي الجهد. فاذا كان فرق الجهد V بين الموصلين يساوي :

$$V = \Phi_+ - \Phi_- \quad (2.2)$$

ويتناسب فرق الجهد طردياً مع قيمة الشحنة Q ، اي ان :

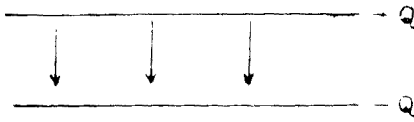
$$Q = CV \quad (2.3)$$

حيث ان C هو ثابت يسمى سعة المتسمة (capacitance or capacity of the capacitor) ويعتمد على قابلية المتسمة في الاحتفاظ بالشحنات وكذلك على الشكل الهندسي للموصل المتكونة من المتسمة.

فما يلي حساب سمات بعض انواع المتسمات البسيطة :

(1) المتسعة ذات الألواح المتوازية (parallel plate capacitor):

لو اخذنا لوحين مساحة كل منهما A تفصل بينهما مسافة صغيرة هي d ، الشكل (2-3). نشحن اللوحين بشحنتين متساويتين المقدار احدهما موجبة والاخرى سالبة $+Q$ و $-Q$. اذا كانت ابعاد اللوحين الجانبية اكبر بكثير من المسافة الفاصلة بينهما في هذه الحالة يمكن اهمال تأثير الظاهرة الحافية (edge effect) ، (نتوء المجال الكهربائي على طرفي اللوحين في المتسعة). اي ان المجال يكون منتظماً ويكون فرق الجهد هو الجهد اللازم لنقل وحدة شحنة من لوح الى الآخر.



الشكل (2 - 3)

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \left(\because \sigma = \frac{Q}{A} \right)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.4)$$

(2) سعة متسعة على شكل كرة معزولة

: (Capacitance of an isolated sphere)

نفرض ان كرة نصف قطرها a ، تحمل شحنة مقدارها Q ولنتخيل كرة اخرى كبيرة جداً ذات نصف قطر يساوي مالانهاية (infinite radius) تحمل شحنة مقدارها $-Q$ - بذلك يمكن اعتبار هاتين الكرتين متسعة كروية والجهد الكهربائي V يساوي :

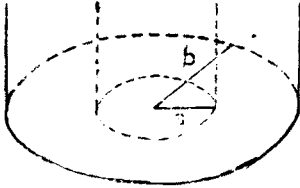
$$V = - \int_{\infty}^a E dr = - \int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (2.5)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (2.6)$$

(3) متسعة كبل ذي موصلين متحدي المحور (Co-axial cable capacitor) :

نفرض ان اسطوانتين ذواتي موصلين متحدي المحور لها طول لامتناه ، نصف قطرها a و b كما في الشكل (4-2) اذا كانت الكثافة الخطية للشحنة هي $+\lambda$ في الاسطوانة الداخلية ، فالجهد E يساوي :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{انظر 1.35})$$



الشكل (4 - 2)

وفرق الجهد بين الاسطوانتين يساوي :-

$$\begin{aligned} V &= \Phi_a - \Phi_b = - \int_b^a E dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln a - \ln b) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.7)$$

اذن السعة C (لطول مقداره l) يساوي :

$$C = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.8)$$

2-5 طاقة المتسعة (The energy of a capacitor) :-

بما ان الشحنة في المواد الموصلة تستقر على الاسطح لذا فان الطاقة الكامنة لموصل يمكن حسابها من المعادلة (1-56) بتحويل الجمع الى التكامل :

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS \quad (2.9)$$

وفي حالة المتسعة الطاقة الكامنة تساوي :

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma_+ \Phi_+ dS + \frac{1}{2} \int \sigma_- \Phi_- dS$$

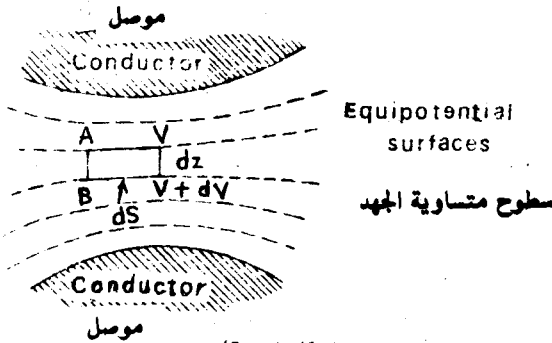
حيث Φ_+ , Φ_- هو جهد قطبي المتسعة و σ_+ , σ_- كثافة الشحنات السطحية على

$$W = \frac{1}{2} Q(\Phi_+ - \Phi_-) = \frac{1}{2} QV \quad (2.10) \text{ الموصلين.}$$

ويمكن صياغة هذه المعادلة لتلائم حسابات المتسعة كالاتي :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.11)$$

يمكن التعبير عن هذه الطاقة باشكال مختلفة اذاماتم اعتبار توزيعها في الفراغ بين الشحنات المؤلفة او المشغولة لجالها الكهربائي ، ولتوضيح ذلك نفرض ان سطحين متساويي الجهد قريبين جداً من بعضهما وضعا بين موصلين كما هو موضح في الشكل (2-5) وان هناك فرق جهد صغير جداً dV بينها.



الشكل (2-5)

إذا تم ادخال موصلين جهدهما مساوي لجهد الاسطح المتساوية الجهد ولا تتقاطع معها فان حال المثال تبقى بدون تغيير. ان الموصلين في هذه الوضعية يمكن اعتبارها متسعة سعتها تساوي $\frac{\epsilon_0 dS}{dz}$ حيث dS مساحة كل لوح dz المسافة الفاصلة بينهما. اما طاقة هذه المتسعة تساوي :

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 dS}{dz} (dV)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 dS}{dz} (Edz)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dS dz \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \end{aligned}$$

حيث $d\tau$ تساوي $dS dz$ وتعني مقدار الحجم الذي تشغله المتسعة

$$\therefore W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

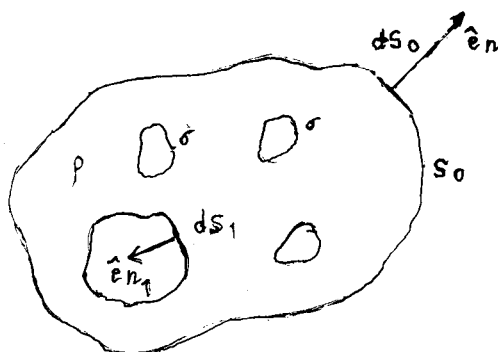
لذلك يمكننا اعتبار هذه الطاقة كأنها موزعة خلال المجال وكثافتها في اي نقطة تساوي

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

الآن سنشتق من هذه النتيجة حالات اكثر شدة يرينا الشكل (8-2) مجعاً من الموصلات ضمن سطح بعيد جداً عنها بحيث لا يؤثر المجال الموجود فيه عليها ويمكن اهماله. نفرض ان كمية من الشحنة موزعة على حجم هذا السطح بكثافة حجمية مقدارها ρ وكثافة سطحية مقدارها σ على الموصلات فان الطاقة الكهربائية المستقرة تساوي

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau + \frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS_1 \quad (2.12)$$

حيث ان التكامل السطحي اخذ لاسطح كل الموصلات والتكامل الحجمي لكل الحيز المشغول بالمجال ، اي الحجم المحدد بالسطح S_0 .



الشكل (6 - 2)

باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاولس $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ يمكن كتابة :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau &= \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla \cdot E) \Phi d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \left\{ \text{div} (\Phi E) - E \cdot \nabla \Phi \right\} d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \text{div} (\Phi E) d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi E \cdot \hat{e}_n dS + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \end{aligned}$$

باستخدام مبرهنة التباعد (divergence theorem) فان التكامل الاول اخذ للسطح المغلق S_0 الذي يحدد الحجم وكذلك لاسطح الموصلات .

$$\therefore \frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi E \cdot \hat{e}_n dS_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi E \cdot \hat{e}_{n_1} dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

(على اسطح الموصلات)

حيث ϵ_0 and \hat{e}_{n_1} هما متجهات الوحدة العمودية على الاسطح المتعاقبة dS_0 و dS_1 . بما ان الجهد Φ يتناسب عكسياً مع المسافة r^{-1} والمجال E يتناسب عكسياً مع مربع المسافة r^{-2} بينما dS تتناسب طردياً مع مربع المسافة r^2 ، فان التكامل الاول يتناسب عكسياً مع المسافة $\frac{1}{r}$ لذلك فان قيمته تزول (تقترب من الصفر) عندما تكون r كبيرة جداً (اي على السطح S_0 مثلاً).

وبما ان التكامل الثاني هو حول اسطح الوسط ، والمتجهات المرسومة نحو خارج الوسط هي $\hat{e}_{n_1} dS_1$ تصبح هنا داخل اسطح الموصلات كما هو موضح في الشكل ، ونظراً لان المجال E يساوي $E = -\sigma/\epsilon_0$ في هذا الاتجاه فان :

$$\frac{1}{2} \int \rho \Phi d\tau = -\frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

والطاقة الكلية تساوي :

$$W = -\frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS_1 + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS_1 = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (2.13)$$

بما ان المجال E يساوي صفراً داخل الموصلات لذلك يمكن اعتبار هذه الطاقة متوزعة خلال الوسط المحيط بالموصلات وكثافتها تساوي $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

الصيغة (2-13) محدودة نسبياً فلو اردنا حساب الطاقة الكهربائية المستقرة لشحنة نقطية q ، باستخدام هذه الصيغة سنجد ان الطاقة تساوي :

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_0^\infty \end{aligned}$$

= ∞

وهذا يعني ان طاقة شحنة نقطية تساوي مالانهاية وهذه النتيجة مرفوضة فيزيائياً، لذلك فان مصطلح مثل كثافة الطاقة لا يتفق ومصطلح شحنة نقطية.

2-6 الاستجابة الكهربائية لوسط غير موصل للمجال الكهربائي

(Electric Response of a Non-conducting Medium to an Electric Field)

درسنا فيما سبق رد فعل المواد الموصلة عند وضعها في مجال كهربائي. سندرس الآن تصرف مواد المجموعة الثانية المذكورة في الجزء (2.1) والسماة في حينها بالموازل (dielectrics) التي ليس لها قابلية التوصيل الكهربائي.

لاحظ كافندش (Cavendish) وبعده فاراداي (Faraday) ان سعة الموصل لاتعتمد فقط على شكل وحجم اللوح الموصل ولكن تعتمد ايضاً على طبيعة المادة العازلة الموضوعة بينها، لذا فسعة المتسعة تزداد اذا ما وضعت قطعة من مادة عازلة بين لوحيهما. ونفرض ان السعة C تساوي Q/V وهي تزداد عند وضع مادة عازلة، وبما ان Q ثابتة، اذن وكما لاحظ كل من كافندش وفاراداي زيادة السعة ناتجة من انخفاض في فرق الجهد V اي ضعف المجال الكهربائي. فاذا ما ازدادت السعة بعامل مقداره ϵ_r فان المجال سيضعف بعامل مقداره $\frac{1}{\epsilon_r}$ لذلك فان المجال في وسط عازل يسوي

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |r|^2} \quad (2.14)$$

ان المقدار المتغير القيمة ϵ_r والذي يعتمد على طبيعة المادة العازلة يسمى ثابت العزل (Dielectric constant) للوسط. على سبيل المثال فمقداره للفراغ يساوي واحداً وللهواء يساوي 1.00057 ولمعظم المواد الصلبة يتراوح من واحد الى عشرة وللماء يساوي (81).

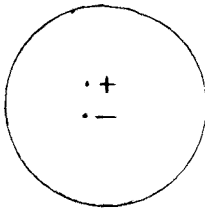
2-7 الاستقطاب (Polarization) :

لمعرفة كيفية ارتباط ثابت العزل ϵ_r بخصائص المادة المحصنة سندرس ماذا يحدث للعازل عندما يسלט عليه مجال كهربائي.

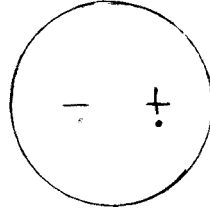
نفرض ان ذرة معزولة عددها الذري (atomic number) يساوي Z . في غياب المجال الكهربائي (كما في الشكل 2-7A) فان النواة تكون في حالة توازن مستقر (Stable equilibrium) وذلك لتطابق مركز ثقل (Centre of gravity) شحناتها الموجبة مع شحناتها السالبة، اذا وضعت هذه الذرة تحت تأثير مجال كهربائي خارجي، فاذا سيحدث؟ ان المجال سيدفع شحنات النواة الموجبة باتجاهه سيدفع شحنات الالكترن السالبة بالاتجاه المعاكس (الشكل 2-7B) حالما تبدأ السحابة الالكترونية بالحركة بعيداً عن النواة تنشأ قوة جذب كهربائي مستقر قوي بين النواة والسحابة الالكترونية محاولة اعادة الشحنات المتحركة الى وضعها الاصلي المستقر وتبقى الشحنات الموجبة والسالبة متباعدة الى ان تتوازن قوة الجذب مع المجال الخارجي، ولا يعد مركز ثقل الشحنات الموجبة

والسالبة متطابقاً فتتصرف الذرة كأنها ثنائي قطب ذو عزم يتناسب طردياً مع مقدار المجال الخارجي المؤثر عليها فكلما كان المجال كبيراً تكون إزاحة الشحنات بعضها عن بعض كبيرة والعكس صحيح، وتسمى الذرة في هذه الحالة مستقطبة (polarized) تحت تأثير مجال خارجي. إذا كانت الإزاحة بين مركزي الشحنات هي δ فإن عزم ثنائي القطب يكون :

$$p = \delta \cdot \delta \quad (2.15)$$



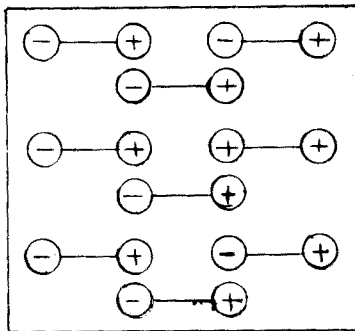
(a) Unpolarized atom.



(b) Polarized atom.

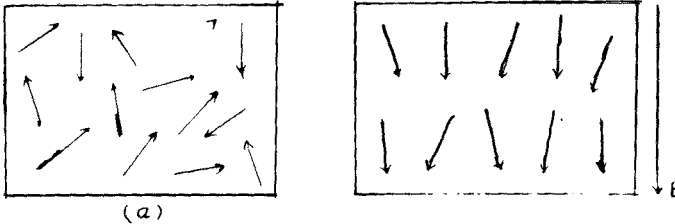
(A) ذرة غير مستقطبة (B) ذرة مستقطبة الشكل (2 - 7)

عند وضع عازل في مجال كهربائي فإن جميع ذراته تصبح مستقطبة لذلك فإن الوسط كله يكون مستقطباً (استقطاب الكتروني (electronic polarization) كما في الشكل (2-8).



الشكل (2 - 8)

أن المواد العازلة بصورة عامة تنقسم الى نوعين رئيسيين، الأول هو المواد العازلة التي لا تتصرف جزيئاتها كثنائي قطب الا تحت تأثير مجال كهربائي خارجي، والثاني هو المواد العازلة التي تتصرف جزيئاتها كثنائي القطب حتى في غياب المجال الكهربائي، أي انها ثنائيات قطب دائمية. الا انه نتيجة للتهيج الحراري (thermal agitation) تكون عزوم الثنائيات مرتبة بصورة عشوائية (الشكل 9A-2) وعليه فان المادة كلها تبقى غير مستقطبة (unpolarized). وعند تسليط مجال كهربائي خارجي عليها تعيد الثنائيات ترتيب نفسها تحت تأثير هذا المجال لتتجه جميعها باتجاهه (الشكل 9B-2) ان جزيئات النوع الاول تسمى جزيئة لاقطبية (non - polar molecule) . مثال ذلك جزيئة (H₂O₂) و (CO₂) والنوع الثاني تسمى جزيئة قطبية (Polar molecule) ومن امثلتها جزيئة (H₂O, NaCl). لذلك فان الاستقطاب يمكن ان ينتج تحت تأثير المجال في تراصف الجزيئات التي لها لاتماثل طبيعي في توزيع شحناتها (الجزيئات القطبية) او من اللاتماثل المستحث في الجزيئات المتماثلة طبيعياً.



(b) Oriental polarization

الشكل (9 - 2)

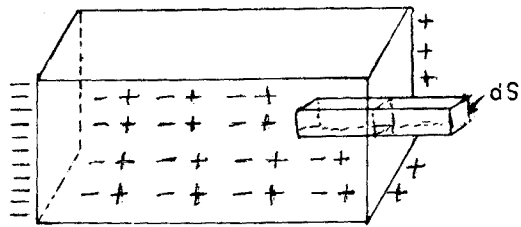
عندما نتعامل مع النظم الكبيرة لاتكون في تماس بصورة رئيسة مع القوى المسلطة من ذرة او جزيئة على اخرى وأما مع معدل عدد كبير من الذرات او الجزيئات، وهذا هو ما يعرف بالوصف العيني للمجال والذي تهمل فيه تفاصيل التأثيرات الدقيقة للذرات او لما في داخل الذرات ويكون المعنى بالقياس هو مقدار المجال في منطقة اكبر بكثير من الذرة الواحدة وهذا النوع من المجال يتولد عندما لا يكون للمادة بناء او تركيب ذري (atomic Structure).

تعرف كثافة الاستقطاب العيني (macroscopic polarization) بأنها مقدار عزم ثنائي القطب الكهربائي لوحدة الحجم. وتساوي المجموع الاتجاهي (vector sum) لعزوم ثنائي القطب الجهري. (microscopic dipole moments) الموجودة في وحدة الحجم. ويكون الناتج متجهاً باتجاه عزم ثنائي القطب المفرد أي باتجاه المسافة الفاصلة بين الشحنات (S) ويرمز لها بالرمز P فإذا كان عدد الجزيئات في وحدة الحجم يساوي N وعدد الشحنات الموجبة والسالبة في كل جزيئة هو +q ومفصولة بعضها عن بعض بمسافة S فان كثافة الاستقطاب (Polarization density) تساوي :

$$P = Nq\delta \quad (2.16)$$

أما وحدة الكثافة (p) فهي كولومب / متر² .

إذا كان الاستقطاب في لوح عازل موضوع في مجال كهربائي منتظماً (الشكل 10-2) فإنه لا يتكون أي مقدار صافي لكثافة الشحنة في هذه القطعة وذلك لأن ثنائيات القطب المفردة تصطف جميعها بصورة موازية للمجال فتصبح الشحنة السالبة للثنائي بجانب الشحنة الموجبة للثنائي الذي يليه. لهذا فان كثافة الشحنات الموجبة والسالبة المزاحة تحت تأثير المجال هي نفسها. ومقدار الشحنة الصافي يساوي صفراً. وتجدر الإشارة هنا إلى ان في حالة كون الاستقطاب منتظماً فان التعادل الكهربائي قد لا يتحقق وذلك لوجود شحنات موجبة على سطح اللوح وشحنات سالبة على السطح الآخر، تسمى شحنات صورية أو كاذبة (fictitious charges) أو شحنات مقيدة (bound charges) ولكن التسمية المتداولة هي شحنات الاستقطاب (Polarization charges) .



الشكل (10 - 2)

اما اذا كان الاستقطاب غير منتظماً فيجب ان نتوقع وجود بعض الشحنات في الحجم المعين للوح وذلك لعدم تساوي ازاحة الشحنات الموجبة مع ازاحة الشحنات السالبة. نفرض ان عنصر مساحة dS في سطح اللوح (الشكل 10-2) اذا كانت الكثافة السطحية لشحنة الاستقطاب هي ρ فمقدار الشحنة الكلية في عنصر المساحة يكون ρdS . وهذا المقدار هو نفسه اذا كان بدل عنصر المساحة dS صندوق مساحة مقطعه العرضي dS ايضاً وطوله S يساوي المسافة الفاصلة بين الشحنات الموجبة والسالبة.

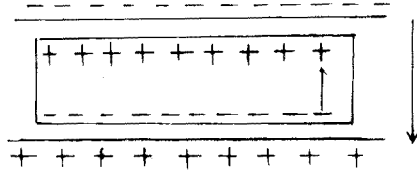
$$\begin{aligned} \therefore \sigma_p dS &= Nq\delta dS \\ \sigma_p &= Nq\delta = P \end{aligned} \quad (2.17)$$

حيث أن P هو مقدار متجه الاستقطاب P . لذا فان الكثافة السطحية للشحنة تساوي قيمة الاستقطاب في المادة. والمعادلة اعلاه صحيحة اذا كان متجه الاستقطاب عمودياً على السطح اما للحالات العامة فتصبح بالشكل الآتي :

$$\sigma_p = P \cdot \hat{e}_n \quad (2.18)$$

والآن سنتفحص كيفية زيادة سعة المتسعة اذا ما وضعت قطعة عازلة بين لوحيهما. نفرض ان متسعة متوازية اللوح شحنتها السالبة في الاعلى والموجبة في الاسفل (كما في الشكل 11-2) لتكن مساحة كل لوح تساوي A وكثافة الشحنة السطحية تساوي σ والمسافة الفاصلة بين اللوحين هي d .

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.19)$$



الشكل (11 - 2)

فاذا وضعنا قطعة عازلة بين لوحي المتسعة (كما هو في الشكل) (لاحظ وجود فجوة بين القطعة ولوحي المتسعة وهذه الفجوة موجودة دائماً حتى اذا كان سمكها قطر جزيئة واحدة) نتيجة الحث فستصبح الشحنات الموجبة في الجهة العليا للقطعة العازلة والشحنات السالبة في الجهة السفلى وهذا سيولد مجالاً بنوياً في المادة معاكس في اتجاهه

للمجال الموجود بين لوحَي التسعة وبالنتيجة فهو يقلل منه وهذا المجال البنيوي يسمى مجال ازالة الاستقطاب (depolarization field) وعرفنا ان الكثافة السطحية لشحنة الاستقطاب هي P لذلك فان المجال الفعلي داخل متسعة فيها قطعة عازلة يكون.

$$E = \frac{(\sigma - P)}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

وبما ان قوة الاستقطاب P (strength of the polarization) تتناسب مع المجال E أي :

$$\begin{aligned} P &= \text{constant} \times E \\ &= \epsilon_0 \chi E \end{aligned} \quad (2.21)$$

ثابت التناسب اعتيادياً يكتب كما يلي $E_0 \chi$ نعوض في المعادلة (2.20).

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \chi E$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi}$$

نلاحظ أن المجال يختزل بالعامل $\frac{1}{1 + \chi}$ ثابت التناسب عرف بالفقرة (2.6). أي أن :

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad (2.22)$$

$$\therefore V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0(1 + \chi)} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} C &= Q/V = \frac{\sigma A}{\sigma d / \epsilon_0(1 + \chi)} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d} (1 + \chi) \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \end{aligned} \quad (2.24)$$

كذلك ان السعة تزداد بالعامل ϵ_r قيم ϵ_r عند درجة حرارة الغرفة لبعض المواد اعطيت في الجدول (2.1).

الجدول (2-1)

Material	المادة	ϵ_r
Carbon tetrachloride	تتراكلوريد الكاربون	2.24
Paraffin wax	شمع البارافين	2.25
Polythelene	بولي اثلين	2.30
Nylon	النايلون	3.50
Porcelain	(فخار) بورسلين	6.00
Mica	مايكا	7.00
Water	الماء	81.00

2-8 قوانين المجال الكهربائي المستقر عند وجود عازل

-(Law's of Electrostatic field in the presence of Dielectrics)

لاحظنا في المعادلة (2-14) ان المجال العازل ليس نفسه المتوقع في قانون كولومب لذا فان هذا القانون ليس نافذاً في جميع الحالات وقد برهن عملياً في الهواء الا انه اختلف في العوازل لذا فان القوانين الكهربائية المستقرة المبينة عليها تحتاج الى اعادة صياغتها للتلائم مع العوازل.

لقد ركزنا فيما مضى على الاستقطاب المنتظم الا انه عملياً عادة ما نجد الاستقطاب في العوازل غير منتظم نتيجة لكون العازل غير منتظم او لتباين المجال في العازل المنتظم. وستتناول الآن حالة عدم كون الاستقطاب متساوياً في جميع مناطق العازل. عند وضع

قطعة غير مستطبة من عازل معين في مجال كهربائي. تمر كمية من الشحنة خلال عنصر مساحة (dS) من العازل نتيجة عملية الاستقطاب، وهذه الكمية تساوي حاصل ضرب مركبة الاستقطاب p العمودية على عنصر المساحة dS في كمية المساحة dS اي تساوي $P \cdot \hat{e}_n dS$ وكما ذكرنا سابقاً، ان ازاحة معينة تحدث للشحنات في الكثافة الحجمية للشحنة اذا كانت P غير منتظمة الشحنة الكلية المزاحة خارج اي حجم (ليكن V مثلاً) نتيجة الاستقطاب تساوي :

$$\int_S P \cdot \hat{e}_n dS$$

حيث S تمثل السطح الذي يحدد الحجم. اما كمية الشحنات الماكسة في اشارتها للشحنات الخارجة والمتبقية في هذا الحجم (نرمز لها بالحرف q') فتساوي :

$$q' = - \int_S P \cdot \hat{e}_n dS \quad (2.25)$$

فاذا كانت ρ هي كثافة شحنات الاستقطاب داخل هذا الحجم.

$$\therefore q' = \int_V \rho' d\tau$$

(2-26) لذلك

$$\int_V \rho' d\tau = - \int_S P \cdot \hat{e}_n dS \quad (2.26)$$

وباستخدام مبرهنة التباعد (Divergence theorem) نحصل على :

$$\int_V \rho' d\tau = - \int_V \nabla \cdot P d\tau \quad (2.27)$$

$$\therefore \rho' = - \nabla \cdot P \quad (2.28)$$

لذلك نجد أن كثافة شحنة الاستقطاب P (مقاسة بالكولومب / متر) تعطى بالتباعد السالب لكثافة الاستقطاب p .
ان صيغة قانون كاوس في الفضاء الحر هي

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

ويمكن كتابة صيغة مكافئة لهذا القانون للوسط العازل مع الاخذ بنظر الاعتبار وجود شحنات الاستقطاب بجانب الشحنات الحرة لذلك :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (2.29)$$

وسندخل الآن مجالاً متجهاً جديداً هو D ويساوي :

$$D = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.30)$$

وهكذا فان المعادلة (2-29) يمكن صياغتها بادخال المتجه D بالشكل الآتي :

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.31)$$

وهذه هي الصيغة المطورة لقانون كاوس والتي تتضمن تأثير شحنات الاستقطاب في حساسيتها. وعليه فان دفع المجال D الخارج من السطح المغلق S يساوي المجموع الكلي للشحنات الحرة داخل هذا السطح. ان هذه الصيغة لقانون كاوس ملائمة جداً للحسابات. والمتجه D له نفس مقاسات (او ابعاد) P ويسمى الازاحة الكهربائية (electric displacement).

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

ومن المعادلة (2-30) نحصل على :

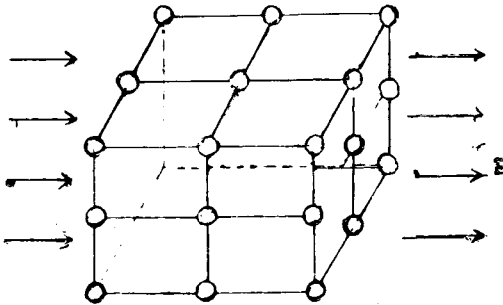
$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \\ &= (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ &= \epsilon \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.32)$$

حيث أن ϵ متساوي $\epsilon_0 \epsilon_r$ وتسمى سماحية الوسط (Permittivity of the medium) و ϵ_0 هو سماحية الفضاء الحر (permittivity of the free space) بينما ϵ_r هو السماحية النسبية للوسط (relative permittivity of the medium). لذلك فان قانون كاولس (المعادلة 2-31) يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$\nabla \cdot \epsilon E = \rho \quad (2.33)$$

لاحظ ان المعادلة الكهربائية المستقرة الأخرى والتي هي $\nabla \times E = 0$ تبقى بدون تغير في العوازل.

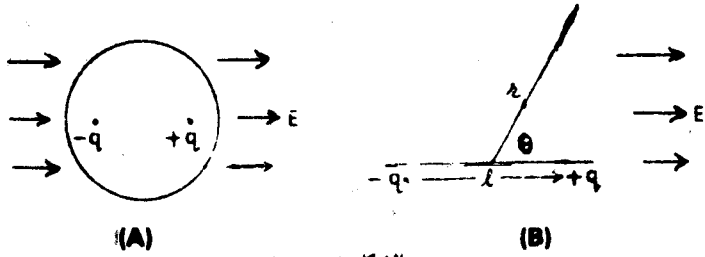
مثال (2-1) : عازل اصطناعي (artificial dielectric) يتكون من عدد كبير من الكرات المعدنية ذات حجم عيني (macroscopic size) مرتبة بحيث تصبح ذات تركيب تشابكي (lattice structure) ثلاثي الأبعاد (الشكل 2-12). جد سماحية هذا العازل ؟



الشكل (2 - 12)

نفرض ان مجالاً منتظماً مقداره E مسلط على العازل. هذا العازل سيولد شحنة محتثة على كل كرة كما في الشكل (2-13A) وبهذا تصبح كل كرة مشابهة في الحقيقة لذرة مستقطبة لها عزم ثنائي القطب (Dipole moment) هو P ويساوي q_1 (الشكل 2-13B). فإذا كان عدد الكرات لوحدة الحجم هو N فان الاستقطاب P يساوي :

$$P = Nq_1$$



الشكل (2.13)

من المعادلتين 2.30 و 2.32

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\therefore \epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} = \epsilon_0 + \frac{Nql}{E} \quad (2.34)$$

اما الجهد في نقطة معينة والناتج من المجال المنتظم يساوي :

$$V_0 = - \int_0^r E \cos \theta dr = - Er \cos \theta \quad (2.35)$$

حيث r المسافة بين النقطة ومركز المجال وللسهولة اختير هنا في مركز ثنائي القطب. و θ هي الزاوية بين محور ثنائي القطب والخط الشعاعي (radial line). والجهد الناتج من ثنائي القطب يساوي :

$$V_d = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.36)$$

الجهد الكلي عند النقطة هو :

$$V = V_0 + V_d = - Er \cos \theta + \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.37)$$

ونظراً لكون عدد الشحنات الموجبة مساوياً لعدد الشحنات السالبة في الكرة المعدنية فان الجهد فيها يكون صفرأ. لذلك فاذا كان نصف قطر الكرة هو (a) فان :

$$0 = -E a \cos \theta + \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad (2.38)$$

$$\therefore \frac{ql}{E} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \quad (2.39)$$

وبالتعويض في المعادلة (2-34) نحصل على :

$$\epsilon = \epsilon_0 + 4\pi\epsilon_0 Na^3$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + 4\pi Na^3 \quad \text{أو} \quad (2-40)$$

$$\epsilon_r = 1 + 3VN \quad (2.41)$$

حيث V هو حجم الكرة ويساوي ($\frac{4}{3}\pi a^3$). وهكذا نجد أن ساحة هذا العازل تعتمد على كل من عدد وحجم الكرات المعدنية المتكون منها.

2-9 طاقة المجال بوجود عازل

(Energy of the field in the presence of a dielectric)

لاحظنا في الجزء (2-5) اذا كانت الشحنة موزعة بكثافة حجمية P وكثافة سطحية σ فالطاقة الكامنة (Potential energy) تساوي .:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau + \frac{1}{2} \int_S \sigma \Phi dS_1$$

وهذه النتيجة لاتتأثر بوجود العازل. حسب مبرهنة كوس $\nabla \cdot D = \rho$ فان :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau &= \frac{1}{2} \int_V \Phi (\nabla \cdot D) d\tau = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \nabla \cdot (\Phi D) - D \cdot \nabla \Phi \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_S \Phi D \cdot \hat{e}_n dS + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E d\tau \end{aligned} \quad (2.42)$$

حيث استخدمنا تعريف مطابقة المتجه التي تنص على :

$$\text{div}(\Phi D) = \Phi \text{div} D + D \cdot \text{grad} \Phi$$

ومبرهنة التباعد (Divergence theorem). ان التكامل الاول يجب ان يأخذ حول السطح المغلق الذي يحدد الحجم كله (والذي يساوي صفراً) وكذلك حول اسطح الموصلات، وبما أن التكامل مأخوذ حول سطح الوسط، فان المتجه $\hat{e}_n dS$ المرسوم باتجاه خارج الوسط، أي يصبح باتجاه داخل الموصلات، كما هو موضح في الشكل (6-2).
بالإضافة الى ذلك يمكننا بسهولة ايضاح ان المركبة العمودية لـ D هي :

$$\begin{aligned} D \cdot \hat{e}_n dS_1 &= -\sigma dS_1 \\ \therefore \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau &= -\frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \Phi dS_1 + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E d\tau \end{aligned}$$

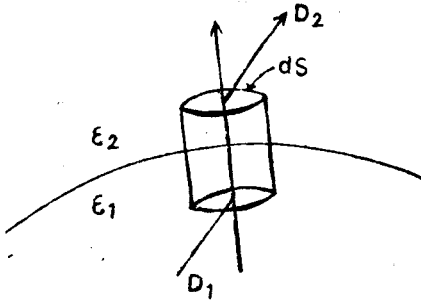
والطاقة الكلية W تساوي :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \Phi dS_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_V D \cdot E d\tau \end{aligned} \quad (2.43)$$

وهذا التعبير يرينا انه بإمكاننا اعتبار الطاقة وكأنها متوزعة على الفضاء كله، وبكشافة تساوي $\frac{1}{2} DE$.

2-10 الشروط الحدودية (Boundary conditions):

عند حل اي مسألة كهربائية مستقرة تتضمن أكثر من وسط عازل واحد يكون من المهم معرفة ماذا يحدث على الاسطح الحدودية (boundary surfaces) التي تفصل المواد المختلفة بعضها عن بعض.
تصور ان قرصاً يحتوي على جزء من سطح حدودي يفصل بين وسطين ومحوره عمودي على السطح الحدودي (الشكل 2-14).



الشكل (2 - 14)

لتكن ϵ_1 و ϵ_2 هما السماحيات النسبية (relative permittivities) للوسطين ، وليكن سمك هذا القرص صغير جداً بحيث ان الزيادة الحاصلة في الفيض الخارج ، الناتجة عنه تأتي فقط من سطحية المستويين. بتطبيق قانون كاوس فان :

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot D d\tau = \int_V \rho d\tau \quad (2.44)$$

حيث ان ρ هي كثافة الشحنات الحرة وبما انه لا توجد اي شحنة حرة على السطح فان :

$$\int_V \nabla \cdot D dr = 0$$

وباستخدام مبرنة التباعد :

$$\int_V \nabla \cdot D dr = \int_S D \cdot \hat{e}_n dS \quad (2.45)$$

$$\therefore \int_S D \cdot \hat{e}_n dS = D_1 \cdot \hat{e}_{n1} dS + D_2 \cdot \hat{e}_{n2} dS = 0$$

حيث أن D_1 و D_2 هما قيم D في الوسطين و \hat{e}_{n1} و \hat{e}_{n2} هما متجهات الوحدة بالاضافة الى ذلك :

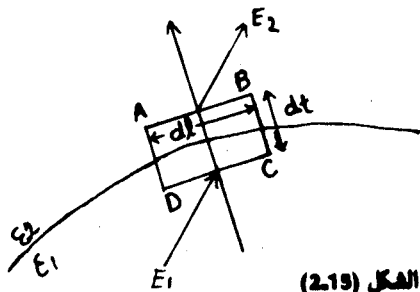
$$\hat{e}_{n1} = -\hat{e}_{n2} = \hat{e}_n$$

$$\therefore (D_1 \cdot \hat{e}_n - D_2 \cdot \hat{e}_n) dS = 0 \text{ or } D_1 \cdot \hat{e}_n = D_2 \cdot \hat{e}_n \quad (2.46)$$

لذلك فان المركبات العمودية لـ D متساوية في الوسطين. وهذا يعني أن D مستمرة.

لنبين الآن المسار المستطيل ABCD على الحدود الفاصلة (الشكل 2.15) بحيث ان الجانبين $CD = AB = dl$ موازيين للسطوح والجانبين الاخرين ايضاً $dt = DA = BC$ عمودياً على السطح.

ليكن E_1 ، E_2 هما المجالان في كلا الوسطين بما أن المجال الكهربائي يمكن حفظه فسوف لا ينجز شغل صافي عند نقل وحدة شحنة حول المسار المغلق ABCDA.



$$\begin{aligned} \therefore \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= E_{||(1)} dl - E_{||(2)} dl + \text{contribution from } BC \text{ and } DA \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

حيث $E_{||(1)}, E_{||(2)}$ يمثلان مركبتي المجال E في الوسطين والموازية للسطح فإذا فرضنا ان BC, DA أي dt هي في الصغر بحيث تقترب من الثلاثي نحصل على :

$$\begin{aligned} E_{||(1)} dl - E_{||(2)} dl &= 0 \\ \therefore E_{||(1)} &= E_{||(2)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

هذا يعني ان المركبة المماسية (tangential component) للمجال E ، $E_{||}$ مستمرة عبر الحدود الفاصلة.

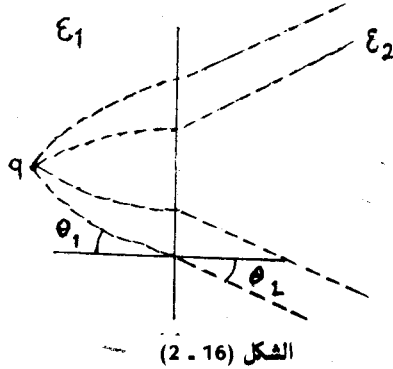
أن المعادلتين (2-48) و (2-49) تحققان الشرطين الخاصين بمتجه الازاحة (Displacement vector) D والمجال الكهربائي E في منطقة الحدود الفاصلة. ويمكن صياغة هذه الشروط بالتعبير عنها بمصطلحات الجهد. فإذا كان لدينا وسطان على اتصال مع الجهود ، Φ_1 و Φ_2 على التعادل متساوية في جميع نقاط الاتصال بين الوسطين أي :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.49)$$

لاحظ ان الشرط الخاص بمتجه الازاحة في المعادلة (2-46) قد تتحقق لافتراضنا عدم وجود شحنات حرة على الحدود الفاصلة. فإذا كان هناك اي شحنة على الحدود الفاصلة ولتكن كثافتها σ فان المعادلة (2.46) تتغير الى الصيغة الآتية

$$D_1 \cdot \hat{e}_n - D_2 \cdot \hat{e}_n = \sigma \quad (2.50)$$

وهذه هي في الحقيقة المركبة العمودية لـ D فقد ابدلت هنا
 مثال (2-2) : بين انه عند تغير الوسط العازل تنكسر خطوط المجال بموجب القانون
 حيث $\theta_1 \cot \theta_1 = \theta_2 \cot \theta_2$ هي الزاوية بين
 اتجاه المجال والخط العمودي على السطح الحدودي الفاصل (كما في الشكل (2-16) و
 ϵ_1, ϵ_2 هما السماحيات النسبية للوسطين .



بموجب شرط الحد الفاصل الاول (2-46) فان :

$$\begin{aligned} D_1 \cdot \hat{e}_n &= D_2 \cdot \hat{e}_n & \text{أي} \\ D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 & \text{أو} \\ \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 &= \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 & (2.51) \end{aligned}$$

ومن الشرط الثاني نحصل على :

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (2.52)$$

بدمج المعادلتين (2-51) و (2-52) نحصل على :

$$\epsilon_1 \cot \theta_1 = \epsilon_2 \cot \theta_2$$

تعامل العوازل في النظرية الكهرومغناطيسية على انها اوساط مستمرة (Continuous medium) والكميات العينية (macroscopic quantities) مثل كثافة الشحنة (charge density) والاستقطاب الكهربائي (electric polarization) تعرف ايضاً بالدوال المستمرة (Contionuous functions). ونظراً لكون العازل حقاً مجعماً من الشحنات الموجبة والسالبة يكون من الضروري ايجاد علاقة تربط بين الخواص الكهربائية للجسيمات ذات التركيب المتقطع والخواص القابلة لها للاوساط المستمرة، وسنحاول في هذا الجزء والذي يليه بناء هذه العلاقة. اذا لم يكن المجال كبيراً فان قوة ثنائي القطب المتولد بالحث تتناسب طردياً مع المجال الفعلي المسلط على الجسم ايوناً كان ام جزيئاً وسنسميه

• E_{local}

$$\therefore p = a\epsilon_0 E_{local} \quad (2.53)$$

حيث $a\epsilon_0$ هو ثابت التناسب و P هو عزم ثنائي القطب المتولد بالحث.

تجدر الاشارة هنا الى ان المجال الموضعي ($local\ field, E_{local}$) المؤثر على جسم معين ليس هو نفس المجال العيني (macroscopic field)، الذي هو عبارة عن معدل المجال في بقعة هي في الكبر بحيث تحتوي على عدد كبير من الجسيمات ويحسب بأخذ معدل المجموع الاتجاهي للمجالات الكهربائية المسلطة على كل ثنائيات القطب الموجودة في الوسط بضمنها الجسم الذي نريد متجه مجاله الموضعي E_{local} ان المجال الموضعي E_{local} في الحقيقة يساوي المجال العيني E والنتائج من بعض الذرات القريبة من الذرات المعينة التي يمكن معاملتها على انها وسط مستمر ذي استقطاب مقداره p ، بالاضافة الى الزيادة الناتجة من ثنائيات القطب القريبة ومجال الثنائي الذي نريد حساب مجاله الموضعي. لان مجال هذا الثنائي لا يؤثر على نفسه. وهذا صحيح في حالة المواد السائلة والصلبة، اما في حالة الغازات ولكون الجزيئات بعيدة بعضها عن بعض معظم الوقت فان المجالات قصيرة المدى تهمل لذلك فان المجال الموضعي E_{local} يساوي المجال العيني E لذلك ففي حالة الغازات تكون :

$$p = \alpha \epsilon_0 E$$

$$P = Np = N\alpha \epsilon_0 E = \epsilon_0 \chi E \text{ (by 2.21)} \quad (2.54)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\chi}{N} \quad (2.55)$$

حيث أن α تسمى قابلية استقطاب (Polarizability) الذرة أو الجزيئة ويقاس مقاومة الجسيم للازاحة الحاصلة في سحابه الالكترونية (electron cloud)، اما العامل او المقدار χ الذي ظهر في المعادلتين (2-21) و (2-54) فيسمى المتأثرية الكهربائية (electric susceptibility) للوسط.

مثال 3-2 : اشتق معادلة تعبر عن عزم ثنائي القطب المحتث ومنها للتعبير عن قابلية الاستقطاب لذرة ذات نموذج قديم (تقليدي) بسيط.

ان الذرة بنموذجها التقليدي البسيط هي عبارة عن شحنة نقطية موجبة Ze محاطة بسحابة كروية متناظرة سالبة الشحنة $-Ze$ كثافتها منتظمة، في المسافة التي تساوي نصف قطر الذرة r_0 وتصبح صفراً في انصاف الاقطار الاكبر (larger radii) من ذلك. اذا وضعت الذرة في مجال كهربائي E ، ستزاح النواة بمسافة لتكن d ، باتجاه المجال والقوة المسلطة عليها باتجاه المجال ايضاً تساوي ZeE . أن قوة كهربائية مستقرة تنشأ بين النواة وسحابة الشحنة وتحاول اعادة الذرة الى وضعها الاصلي. ان الشحنة السالبة التي تجذب النواة هي بموجب قانون كاوس جزء من السحابة الموجودة ضمن الكرة التي نصف قطرها هو d وهذه الشحنة تساوي :

$$\frac{4}{3}\pi d^3 \rho = \frac{4}{3}\pi d^3 \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{Zed^3}{r_0^3}$$

حيث ان ρ هي كثافة الشحنة.

$$\therefore \frac{(Ze)(Zed^3/r_0^3)}{4\pi\epsilon_0 d^2} = ZeE$$

$$Zed = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 E$$

أي أن

لكن ثنائي القطب الذري P هو :

$$p = Zed = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 E = a\epsilon_0 E \quad (2.56)$$

$$\therefore a = 4\pi r_0^3 \quad (2.57)$$

نجد أن قابلية الاستقطاب هنا لا تعتمد على المجال أو العوازل التي تتحقق فيها هذه الحالة تسمى العوازل الخطية (linear dielectric).

مثال (2-4) : احسب عزم ثنائي القطب المفرد p في جزيئة رابع كلوريد الكربون (Carbon tetrachloride) مستخدماً البيانات الآتية، ثم جد كذلك معدل ازاحة الإلكترون :

$$\epsilon_r = 2.24 \text{ (السماحية النسبية) (relative permittivity)}$$

$$\text{Density (الكثافة)} = 1.60 \text{ gm / cm}^3$$

$$\text{Molecular Weight (الوزن الجزيئي)} = 156$$

$$\text{Field (المجال)} = 10^7 \text{ Volts / metre}$$

$$\text{الكثافة} \times \text{density} = N = \frac{\text{عدد أفوكادرو (Avogadro's number)}}{\text{Molecular Weight (الوزن الجزيئي)}} \times \text{الكثافة الجزيئية}$$

$$= \frac{6.02 \times 10^{23}}{156} \times 1.60$$

$$= 6.17 \times 10^{21} \text{ molecules/cm}^3$$

$$= 6.17 \times 10^{27} \text{ molecules / m}^3$$

ان عزم ثنائي القطب لجزيئة واحدة p يساوي :

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P}{N} = \frac{\epsilon_0 \times E}{N} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1) E}{N} \quad (\because \epsilon_r = 1 + \chi) \\
 &= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1.24 \times 10^7}{6.17 \times 10^{27}} \\
 &= 1.77 \times 10^{-32} \text{ coulomb metres}
 \end{aligned}$$

نفرض ان معدل ازاحة الالكترن تساوي 'd' بما ان هناك 74 الكتروناً في جزيئة CCl_4 فان :

$$\begin{aligned}
 p &= 74 de \text{ and} \\
 d &= \frac{p}{74e} \\
 &= \frac{1.77 \times 10^{-32}}{74 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\
 &= 1.5 \times 10^{-16} \text{m}
 \end{aligned}$$

12-2 العوازل الغازية القطبية (Gaseous polar dielectrics)

سندرس الآن تصرف العوازل التي تمتلك جزيئاتها عزم ثنائي قطب دائم. كما رأينا سابقاً فان المجال الموضعي المؤثر على جزيئة واحدة في الغازات هو نفس المجال الخارجي .E

ان هذا المجال يولد عزم ثنائي قطب محتث آخر على الجزيئة معطياً اياها نفس نوع قابلية الاستقطاب للجزيئات اللاقطبية ومن جهة اخرى فان هذا المجال يحاول ان يرتب ثنائيات القطب المفردة في خط واحد بالرغم من كون هذه المحاولة ضعيفة وغير مؤثرة نتيجة الحركة الحرارية للجزيئات. نحن نعرف ان الطاقة الكامنة لثنائي القطب موضوع في مجال كهربائي تساوي :

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p E \cos \theta$$

(انظر المعادلة 1-66)

وتتباين هذه الطاقة مع اختلاف اتجاه ثنائي القطب، فتصبح اقل ما يمكن عندما تكون الزاوية θ تساوي صفراً، اي عندما يكون اتجاه محور ثنائي القطب باتجاه المجال. ولاخذ فكرة عن قيم هذه الطاقة سنحسب مقدار الطاقة اللازم لعكس ثنائي القطب اي جعله باتجاه معاكس لاتجاه المجال وهذا المقدار ببساطة يساوي $2pE$ وسنفرض ان مسافة الفاصل الذري (atomic spacing) تساوي 10^{-10} متراً والمجال E يساوي 10^6 فولت / متر فان اقصر طاقة يمكن تحقيقها في العوازل الغازية (gaseous dielectric) في هذه الحالة تحسب كالآتي :

$$\therefore p = e \times \text{atomic spacing} \quad (\text{مسافة الفاصل الذري})$$

$$= 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-10}$$

$$2pE = 2 \times 1.6 \times 10^{-29} \times 10^6 \text{ joules}$$

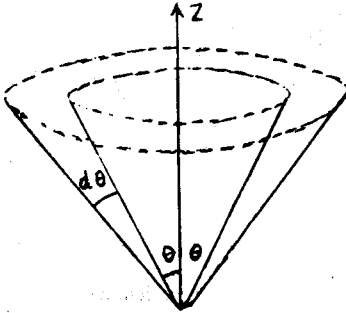
$$= 2 \times 10^{-4} \text{ eV} \quad (2.58)$$

وهذه الطاقة اقل من الطاقة الحركية (Kinetic energy) للجزيئة في درجة حرارة الغرفة والتي تكون ذات قيمة 0.04 eV . لذلك فان الحركة الحرارية العشوائية (random thermal motion) لن تتأثر كثيراً بوجود المجال E فيبقى ثنائي قطب بعض الجزيئات في اتجاهات مختلفة على كل حال وبشكل عام ستحاول ثنائيات القطب الاصطفاف بالاتجاه الذي تكون فيه طاقتها الكامنة اقل ما يمكن اي باتجاه المجال فنجد بهذا السبب عدداً من الجزيئات تشير بهذا الاتجاه، وستحسب الآن القيمة الصافية للاستقطاب الناتج في هذا الاصطفاف وهذا الحساب ممكن باستخدام طرق الميكانيك الاحصائي (Statistical mechanics).

نفرض أن عدد الجزيئات الموجودة في وحدة الحجم يساوي N . بما انه في غياب المجال الكهربائي تكون احتمالية اتخاذ الجزيئات لطاقة الاتجاهات متساوية (أي ان عدد الجزيئات المتجهة شرقاً يساوي عدد الجزيئات المتجهة غرباً مثلاً) لذلك فان عدد الجزيئات التي تكون ثنائيات قطبها ضمن الزاوية المجسة $d\Omega$ يساوي $N \frac{d\Omega}{4\pi}$ ومقدار الزاوية المجسة التي تتراوح بين θ و $\theta + d\theta$ (كما في الشكل 2-17 يساوي :

$$d\Omega = \frac{2\pi r \sin \theta r d\theta}{r^2} \equiv 2\pi \sin \theta d\theta \quad (2.59)$$

$$\therefore N \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} N \sin \theta d\theta \quad (2.60)$$



الشكل (1 - 17)

فاذا سلطنا الآن مجالاً مقداره E وباتجاه محور Z فان ثنائيات القطب تحتاج الى طاقة اضافية مقدارها $W = -p E \cos \theta$ ليشكل اتجاه زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال واحتمالية التوزيع هنا تعتمد على عامل بولتزمان (Boltzmann factor) وهو $e^{-W/kT}$ و عدد الجزيئات لوحدة الحجم التي توجد ثنائيات اقطابها ضمن المدى بين θ و $\theta + d\theta$ يساوي :

$$N(\theta) d\theta = C e^{-W/kT} d\Omega \quad (2.61)$$

ونظراً لكون المقدار W/kT صغيراً جداً فيمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} N(\theta) d\theta &= C \left(1 - \frac{W}{kT} \right) d\Omega \\ &= C 2\pi \sin \theta \left(1 + \frac{pE \cos \theta}{kT} \right) d\theta \end{aligned} \quad (2.62)$$

العدد الكلي للجزيئات لوحدة الحجم يساوي :

$$= 4\pi C$$

$$\therefore C = \frac{N}{4\pi}$$

and

$$N(\theta) = \frac{N}{2} \sin \theta \left(1 + \frac{pE \cos \theta}{kT} \right) \quad (2.63)$$

وهذه المعادلة ترينا ان عدد الجزيئات التي تكون باتجاه المجال (اي $\cos \theta = 1$) هو أكبر من تلك التي تكون بعكس اتجاه المجال (اي $\cos \theta = -1$) وهذا يطابق المشاهد التي استنتجناها مبكراً وهي ان عدد من ثنائيات القطب سوف يصطف عند وضع المجال. بما ان مركبة ثنائي القطب باتجاه θ مع المجال تساوي $P \cos \theta$ فان المقدار الصافي لعزم ثنائي القطب لوحدة الحجم يساوي :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi N(\theta) p \cos \theta d\theta \\ &= \frac{N}{2} \int_0^\pi \sin \theta \left(1 + \frac{pE \cos \theta}{kT} \right) p \cos \theta d\theta \\ &= \frac{Np^2 E}{3kT} \end{aligned} \quad (2.64)$$

ان هذا المقدار هو ماتساهم به عزوم ثنائي القطب الدائمة الى الاستقطاب. ان الكمية عادة ماتسمى بقابلية الاستقطاب التوجيهية (orientational polarizability) $\frac{p^2}{3kT}$ اضافة الى ذلك فان الجزيئات ستحتاج الى عزم ثنائي قطب محث باتجاه المجال دون الاخذ بنظر الاعتبار اتجاه عزم ثنائي القطب الدائم مما يؤدي الى زيادة الاستقطاب بمقدار $\epsilon_0 \epsilon_0 N a_0$ حيث ان a_0 هو مايسمى بقابلية الاستقطاب التشويهية (deformation polarizability) لذلك فان مقدار الاستقطاب الصافي P يساوي :

$$P = \left(N \alpha_0 \epsilon_0 + \frac{Np^2}{3kT} \right) E \quad (2.65)$$

والتأثرية X (Susceptibility) تساوي :

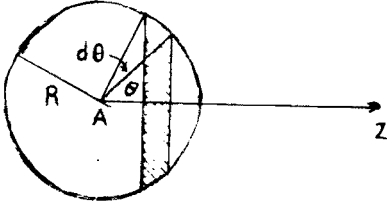
$$X = N \left(\alpha_0 + \frac{p^2}{3kT\epsilon_0} \right) \quad (2.66)$$

ان المعادلة (2.66) كيف تعطينا قياس التأثرية الكهربائية في درجات الحرارة المختلفة ومعلومات عن عزوم ثنائي القطب الدائمة والمحتثة والخط البياني للعلاقة بين $1/T$ هو خط مستقيم ويمثل ميله عزوم ثنائي القطب الدائم وتقاطعها في النقطة $1/T=0$ يعطينا التأثرية الكهربائية الناتجة عن الاستقطاب المحتث بالإضافة الى ذلك يمكن استنتاج معلومات مهمة عن اشكال الجزيئات من معرفتنا للتأثرية الكهربائية وعزوم ثنائي القطب. على سبيل المثال لو اخذنا جزيئي ثاني كبريتيد الكاربون CS_2 والماء H_2O كلتاهما تحتويان على ذرتين متماثلتين باواصر مع ذرة مشتركة. وهناك الكترول (كهرب) ينتقل عبر هذه الاصرة والتي هي C-S في الجزيئة الاولى وO-H في الثانية وهناك عزوم ثنائي القطب لكل أصرة. نظراً لكون عزوم ثنائي القطب في جزيئة الماء H_2O يساوي 6×10^{-30} كولومب / متر ويساوي صفرأ في جزيئة CS_2 ويمكننا ان نقول بما ان عزوم ثنائي القطب يلغي احدهما الآخر في الجزيئة CS_2 فان هذه الجزيئة هي خطية اي S-C-S، وان جزيئة H_2O ليست خطية (لاحظ الشكل 1.33).

2-13 السوائل اللاقطبية (Non-polar Liquid)

في بعض العوازل الصلبة والسائلة تكون الجزيئات قريبة بعضها من بعض لذلك لايمكن غض النظر عن تأثير المجالات قصيرة المدى (Short - range fields) على بعضها. ويصبح الامر اكثر تعقيداً عند وجود جزيئات قطبية بينها لان المجالات المتولدة من ثنائيات القطب الدائمة تكون احياناً اكبر بكثير من اي مجال بنيوي ، على كل حال فان المجالات قصيرة المدى في السوائل اللاقطبية ليست قوية ويمكن الحصول على قيمة تقريبية جيدة للمجال الموضعي E_{local} وذلك باتباع الطريقة الآتية :

تصور ان فجوة كروية صغيرة مأخوذة من مادة منتظمة الاستقطاب بما ان الوسط مستقطب فان شحنات الاستقطاب ستظهر على اي سطح من الوسط. المجال في نقطة مثل A داخل الفجوة (وهو المجال الموضعي E_{local}) يساوي المجال النيوي زائداً المجالات المتولدة من شحنات الاستقطاب على سطح الفجوة (الشكل 2-18).



الشكل (2 - 18)

ليكن المجال النيوي المسلط باتجاه المحور Z.

ان كمية شحنات الاستقطاب في عنصر مساحة dS من سطح الفجوة تساوي $\sigma_p dS$ حيث σ_p هي الكثافة السطحية لشحنات الاستقطاب.

$$\begin{aligned}\sigma_p dS &= P \cdot \hat{e}_n dS = \epsilon_0 \chi E \cdot \hat{e}_n dS \\ &= -\epsilon_0 \chi E \cos \theta dS\end{aligned}\quad (2.67)$$

حيث ان θ هي الزاوية بين الخط العمودي على dS واتجاه المجال. والاشارة السالبة تظهر في المعادلة وذلك لكون الخط العمودي الخارج من العازل هو الخط العمودي الداخل الى الفجوة. مقدار المجال الصافي في نقطة A والناتج من شحنات الاستقطاب سيكون باتجاه المحور Z نتيجة التناظر اما مركبة هذا المجال في نقطة A باتجاه Z فتساوي:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0 \chi E \cos \theta dS \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} \\ dS = 2\pi R \sin \theta R d\theta \text{ حيث } R \text{ هو نصف قطر الفجوة والمجال الناتج من عنصر المساحة كله} \\ \frac{\epsilon_0 \chi E \cos^2 \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta\end{aligned}$$

يساوي :

وقية المجال الكلي في نقطة A والناتج من كافة شحنات الاستقطاب على السطح يساوي :

$$\frac{1}{2} \times E \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} \times E$$

لذلك فان المجال المؤثر في نقطة A يساوي :

$$\begin{aligned} E_{\text{local}} &= E + (1/3) \times E \\ &= E \{1 + (1/3) \times\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \therefore P &= N \alpha \epsilon_0 E_{\text{local}} \\ &= N \alpha \epsilon_0 E \{1 + (1/3) \times\} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \therefore \epsilon_0 \times E &= N \alpha \epsilon_0 E \{1 + \frac{1}{3} \times\} \\ \text{i.e.} \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\times = \frac{N \alpha}{1 - N \alpha / 3} \quad (2.71)$$

ويمكن صياغة هذه المعادلات بأشكال مختلفة اذا ماتذكرنا أن $\times = (\epsilon_r - 1) E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$ فيمكن كتابة المعادلة (2.70) بالشكل الآتي :

$$\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = N \alpha \epsilon_0 E + \frac{N \alpha \epsilon_0 E}{3} (\epsilon_r - 1)$$

$$\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) = N \alpha \epsilon_0 \left\{ \frac{2 + \epsilon_r}{3} \right\} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N \alpha}{3} \quad \text{كذلك} \quad (2.72)$$

وكان اول من اشتق هذه المعادلة هما كلاوسيس (Clausuis) وموسوتي (Mossotti)

وتعرف بصورة عامة بمعادلة كلاوسيس وموسوتي (Clausuis - Mossotti) equation وترينا هذه المعادلة ان المجال الموضعي اكبر من المجال العميني وتعطينا مقدار هذه الزيادة ايضاً. على كل حال يجب ان يتبادر الى الذهن ان هذه المعادلة او الصيغة (formula) ليست دقيقة جداً لانه استخدم في اشتقاقها كميات تقريبية.

جدول (2-2)

«السماحية النسبية لبعض المواد في الظروف الطبيعية (درجة الحرارة والضغط) N.T.P»

Substance المادة	الغاز Gas		السائل Liquid	
	ϵ_r	الكثافة ρ (density)	ϵ_r	الكثافة ρ (density)
CS ₂	1.0029	0.0034	2.64	1.293
C Cl ₄	1.0030	0.0030	2.24	1.590
O ₂	1.0005	0.0014	1.51	1.190
CO ₂	1.0010	0.0019	1.61	0.975

4-2 العوازل الصلبة - اجسام عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية

: (Solid Dielectrics - Electrets)

من السهل تحضير مواد في الحالة الصلبة تمتلك استقطاباً دائماً يبقى حتى في غياب المجال الخارجي. وعلى سبيل المثال اذا صهرنا كمية من الشمع وتم تسليط مجال كهربائي قوي عليه وهو في حالته السائلة فان ثنائيات القطب تصطف جزئياً وتبقى على هذه الوضعية عند انجماد الشمع. لذلك فان المواد الصلبة المشكلة بهذه الطريقة تمتلك كالغناطيس عزم ثنائي قطب دائماً وتسمى اجساماً عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية (electrets) على كل حال فان شحناتها تتفرغ (discharge) عندما تجتذب

شحنات حرة في الهواء. كذلك وجد استقطاب داخل دائم في بعض البلورات (Crystals) المعقدة، ولكن لانلاحظها لأن مجالاتها الخارجية تتفرغ كما في الاجسام العازلة ذات الاقطاب الكهربائية المختلفة الدائمة (electret).

يمكن تطبيق نظرية ثابت العزل على البلورات التي لها عزم ثنائي قطب دائم بنفس الخطوات المطبقة في السوائل اللاقطبية.

15-2 اجهادات المجال الكهربائي (Electric Field Stresses) :

سندرس في هذا الجزء كيفية حساب القوى على الاجسام المشحونة والمستقطبة في المجال الكهربائي المستقر، طرق اجهادات المجال (field stresses). لاحظ فراداي (Faraday) في اثناء دراسته لانحناء خطوط القوى في المجال الكهربائي المستقر ان الخطوط المتجاورة تميل بشكل ظاهر الى التناثر فيما بينها وكان كل انبوب من انابيب القوى يرغب في طبيعته التي هي الشد والانسباط جانبياً، بالاضافة الى ذلك اعتقد فراداي بوجود هذا الضغط والشد (pressures and tensions) في المجالات الكهربائية المستقرة.

لنحاول الآن معرفة كيفية امكان ادخال مضعل الاجهادات المستعملة عادة في الميكانيك واستخدامها في منظومة القوى الكهربائية، حيث ان استخدام كلمة اجهاد في جسم مادي لا يخلق اي مشكلة او صعوبة الا ان استخدامها في مجال القوى الكهربائية لا يمكن تصوره لاسمها وان هذه القوى تؤثر في الفضاء الخالي فكيف يكون الاجهاد بغياب اي شيء مادي، لذلك فان فكرة الاجهاد في الفضاء الخالي تبدو عديمة المعنى الا اذا آمننا بوجود الاثير (ether) الذي يقوم بنقل الاجهاد وفكرة الاثير كانت مألوفة قبل ظهور النظرية النسبية التي قادت الفيزيائيين الى التخلي عنها. اذن ماهو المخرج؟ حسناً، سوف لاندرس كيفية تأثير الشحنات بعضها على بعض عبر الفضاء الخالي، وانما فقط سراقبها وهي تفعل ذلك وتسمى لبناء هيكل فكري يتضمن الاجهاد والتوتر (strain) الذي يمكننا من حساب مثل هذا التفاعل التبادلي (interaction). سنحاول

الآن الحصول على تعبير تحليلي (analytical expression) للاجهادات والضغط في المجال الكهربائي ، ان الشد (tension) بمحاذاة خطوط القوى يفترض به ان يحافظ على قوة الحركة الحارقة (ponder motive force) التي تعمل على الموصل الذي تتجمع فيه نهايات خطوط القوة. هذه القوة تعجل في ابتعاد عنصر المساحة بعيداً عن الموصل $\frac{\sigma^2}{2\epsilon} = \frac{1}{2} \sigma E$ لوحدة المساحة، حيث ان σ هي كثافة الشحنة السطحية و E هي شدة المجال الكهربائي، فاذا كانت الاناييب يمثل هذه الحالة من الشد فيجب عليها ان تسلط ضغطاً جانبياً على الاناييب المجاورة واذا لم تتصرف بهذا الشكل فعليها ان تنكمش (Shrink) لتصبح خطأ مستقيماً وبالامكان ايجاد تعبيراً لهذا الضغط بافتراض حالة خاصة نفرض ان مكثف كروي مكون من كرتين نصف قطريها 'a' و 'b'. وان مستوياً قطع هذا المكثف الى نصفين متساويين عبر مركزه، ان هذين النصفين سيتنافران فيما بينهما، ويرجع سبب ذلك الى الاجهادات في وسط مستوى القطع، وبما ان خطوط القوى شعاعية فاننا نرى ان الاجهادات عمودية على خطوط القوى وهكذا هناك ضغطاً مثل $\frac{1}{2} \sigma E \pi a^2$ والمساحة التي يعمل عليها الضغط هي $\pi(b^2 - a^2)$ والتنافر الكلي بين النصفين يكون $-\frac{1}{2} \sigma E \pi a^2$ والقوى على وحدة المساحة حول كل نصف كرة هي $\frac{1}{2} \sigma E \pi a^2$ والقوة الكلية المسلطة على نصف الكرة الداخلي $\frac{1}{2} \sigma E \pi b^2$ وعلى نصف الكرة الخارجي هي $\frac{1}{2} \sigma E \pi (b^2 - a^2)$

$$\frac{1}{2} \sigma E \pi (b^2 - a^2) = - \frac{1}{2} \sigma E \pi (b^2 - a^2)$$

$$Q = -\frac{1}{2} \sigma E$$

(2.73)

فاذا كانت هذه الاجهادات موجودة فستحسب من فعلها الآلي الملحوظ على الموصلات، ومصطلح اجهادات المجال كما طبق في المجال الكهربائي المستقر هو مثال للعلاقة المثرة بين الآلية او النظرية الكهربائية.

تمارين الفصل الثاني

2-1 لوحان كبيران متوازيان مساحة كل منهما تساوي (A) وتفصل بينهما مسافة (d)، جهد اللوح الاول يساوي صفرأ وجهد اللوح الثاني يساوي (V). وضع بينهما لوح ثالث مقدار شحنته (q). جد جهد هذا اللوح؟.

2-2 جد مقدار النقص في الطاقة الذي يحصل عند ربط موصلين سعتهما C_1, C_2 وجهدهما V_1, V_2 على التوالي بعضها مع بعض.

2-3 متسعة ذات الواح موصلة متوازية تفصل بينهما مسافة (t) ، فاذا وضع بين لوحيهما لوح موصل ثالث سمكه (d). برهن على أن الزيادة في السعة ستكون بمقدار $\frac{t}{t-d}$.

2-4 موصل متوازي الالواح تم ملؤه بمادتين عازلتين متساويتين في الحجم ومختلفتين بثابت العزل ϵ_1, ϵ_2 جد سعة هذا الموصل؟

2-5 جد المجال الكهربائي داخل وخارج كرة من مادة عازلة منتظمة الاستقطاب؟

2-6 اذا علمت ان ثابت العزل لغاز الهيليوم في درجة الصفر المئوي وضغط واحد جو هو 1.000074. جد عزم ثنائي القطب المحتث لكل ذرة اذا ماوضع الغاز في مجال كهربائي ؟

2-7 مكثف كروي يتكون من كرتين متحدتي المركز نصف قطريهما "a" و "d" ($a < d$)، وقشرة كروية ساحتها ϵ_1 محصورة بين كرتين نصف قطريهما "b" و "c" ومركزها يتطابق مع مركز الكرة، برهن ان السعة C في المكثف تحسب من المعادلة :

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{C} = \frac{1}{a} - \frac{1}{d} + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

2-8 إذا كان مركز كرة موصلة نصف قطرها (r) وتحمل شحنة مقدارها (q) يقع على الحد المستوي الفاصل بين عازلين سماحية كل منها ϵ_1 و ϵ_2 ، جد جهد هذه المنظومة، وتوزيع الشحنة على سطوح الكرة؟

2-9 كرة كتلتها (M) ونصف قطرها R عائمة على سطح سائل كثافته (m) وسماحيته ϵ فإذا كان ربع الكرة غاطساً في السائل عندما كانت غير مشحونة. كم يجب ان تكون شحنتها ليفتس نصفها تماماً في السائل؟

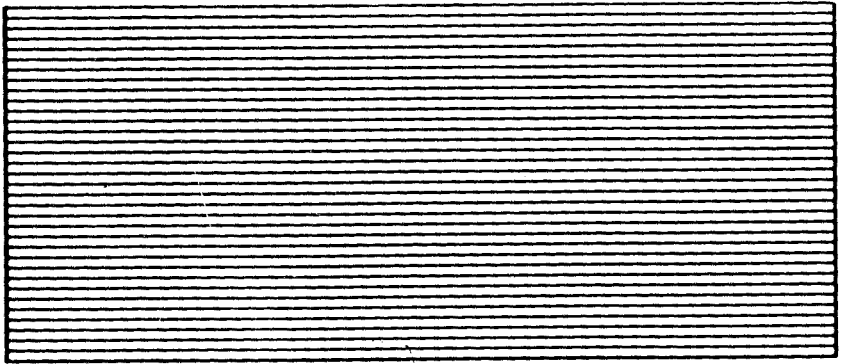
2-10 إذا كانت السماحية النسبية لغاز الامونيا NH_3 اذا ماقيست في درجة الحرارة 273°K و 373°K وضغط واحد جوها 1.00834 و 1.00487 على التوالي. احسب عزم ثنائي القطب الدائم لهذا الغاز، وعلى فرض ان قابلية استقطابه هي نفسها لموصل كروي. جد ايضاً نصف قطر جزيئته؟

2-11 برهن ان الطاقة المبذولة في استقطاب عازل هي $\frac{(E_V - E_0)E^2}{2}$

2-12 ان سطحين موصلين طويلين اسطوانيين الشكل ذوي محور واحد تم غطسها عمودياً في سائل عازل. وعندما يصبح مقدار فرق الجهد بين السطحين V فان السائل يرتفع بين (electrodes)، بين السطحين بارتفاع مقداره h . جد المتأثرية الكهربائية لهذا السائل؟

الفصل الثالث

مسائل القيمة الحدودية في مجالات الكهرباء المستقرة
"Boundary Value Problems in Electrostatic Fields"



الفصل الثالث

مسائل القيمة الحدودية في مجالات الكهرباء المستقرة

"Boundary Value Problems in Electrostatic Fields"

سنقدم في هذا الفصل بعض التقنيات المستخدمة عادة في حل المسائل التي تتعلق بالكهربائية المستقرة وسنأخذ قليلاً من المسائل التي يكون فيها استخدام هذه التقنيات ذا فائدة كبيرة. وستوضح الامثلة المختارة الخصائص المهمة للمجال الكهربائي.

3-1 معادلات بواسون ولاپلاس (Poisson's and Laplace equations)

لاحظنا ان المجال الكهربائي يمكن التعبير عنه بوضوح تام بدالات جهده حسب المعادلة الآتية :

$$E = -\nabla\Phi$$

وبأخذ تباعد هذه المعادلة نحصل على :

$$\nabla \cdot E = -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\nabla^2\Phi$$

ونعرف ايضاً باستخدام قانون كاوس ان :

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0 \quad (3.1)$$

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$$

وتعرف هذه المعادلة باسم معادلة بواسون (Poisson's equation).

وإذا لم تكن هناك اي شحنة في الحيز المعني فان ρ تساوي صفراً.

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.2)$$

وهذه هي معادلة لابلاس (Laplace's equation) وتطبق في الحيز الحر من

المساحات.

من لإبلاسيان ∇^2 هو مؤثر غير متجه وله الصيغة الآتية في نظم الاحداثيات الثلاثة المستخدمة بصورة عامة.

(i) نظام الاحداثيات المتعامدة (Cartesian system) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.3)$$

(ii) نظام الاحداثيات القطبية الكروية (Spherical polar coordinate system) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.4)$$

(iii) نظام الاحداثيات القطبية الاسطوانية (Cylindrical polar coordinate system) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.5)$$

يمكن الحصول على حل لمسألة الكهربائية المستقرة عندما يعين الجهد في كل النقاط. وبمعنى آخر يمكن حل المسألة مباشرة بحل معادلة بواسون أو لابلاس. ذلك لأن الجهد المستخلص بهذه الطريقة والمتحقق في شروط حدودية (boundary conditions) معينة تلائم التصورات الخاصة بالالكترودات. مثل هذه المسائل تسمى مسائل القيمة الحدودية (boundary value problems) ان مسائل القيمة الحدودية تخلق مصاعب رياضية مستعصية لكن يمكن حلها تقريباً باستخدام التقنيات العددية (numerical techniques). مع ذلك هناك مسائل قليلة يمكن حلها بصورة دقيقة جداً لكون درجة التناظر فيها عالية جداً وذلك باستخدام سلسلة من الدوال المعروفة وقبل الدخول في مناقشة هذه المسائل سنتناقش احدى النظريات المهمة التابعة من معادلتى بواسون ولاپلاس.

3-2 مبرهنة إيرنشو (Earnshaw's Theorem) :-

تنص المبرهنة على ان «الجسم المشحون لا يمكن ان يبقى في توازن مستقر (stable equilibrium) تحت تأثير القوى المستقرة منفردة».

ان اي قيمة قصوى (extremum value) للجهد Φ يجب ان تحقق الشرط $\nabla^2\Phi \neq 0$. فاذا كان الجهد Φ اعظم ما يمكن فان قيمة $\nabla^2\Phi$ تكون سالبة اما اذا كان الجهد

Φ وطاً ما يمكن فتكون $\nabla^2\Phi$ موجبة في الحيز الخالي من الشحنات تكون $\nabla^2\Phi = 0$ مساوية للصفر (معادلة لابلاس Laplace's equation) وهذا يعني عدم وجود قيمة عظمى وقيمة صغرى للجهد. ولكي تستقر الشحنة موجبة يجب ان تكون في نقطة يكون فيها الجهد اصغر ما يمكن اي $\nabla^2\Phi$ يجب ان تكون موجبة - على كل حال عرفنا في الفقرة (3-1) ان كون $\nabla^2\Phi$ تدل على متجه قيمة عظمى ولذلك

فان الشحنة تكون غير مستقرة، اما في حالة كون الشحنة سالبة فان حالة الاستقرار تتطلب ان يكون الحد $\nabla^2\Phi$ سالباً بينما في معادلة بواسون نعرف ان $\nabla^2\Phi = \rho/\epsilon_0$ وهذا يعني انه لا توجد نقطة في حالة توازن مستقر في المجال الكهربائي المستقر.

هذا لا يعني انه لا يمكن موازنة شحنة بالقوى الكهربائية المستقرة. وعلى سبيل المثال اذا كان هناك اربع شحنات سالبة في الرؤوس الاربعة لمربع، فان محصلة القوى على شحنة موجبة في مركز هذا المربع تساوي صفر. ولكن التوازن هنا ليس مستقراً اي اذا ازيمحت الشحنة الموجبة قليلاً فانها لن ترجع الى وضعها المتوازن.

قد تتساءل هنا عن كيفية استقرار الذرات والجزيئات وهي متكونة من شحنات موجبة وسالبة والجواب اذا كانت القوى الكهربائية المستقرة هي القوى الوحيدة السائدة في الذرات فان شحناتها كانت ستلتئم مع بعضها وتتبادل الآن حقيقة كون الذرات والجزيئات مستقرة فعلاً وهذا يعني ان هناك قوى اخرى من طبيعة مختلفة موجودة بجانب القوى الكهربائية المستقرة في الذرات والجزيئات.

3-3 الشروط الحدودية ونظرية التوحيد

: (Boundary conditions and uniqueness theorem)

المسائل في الكهربية المستقرة عادة ماتضمن حيز محدد من الفضاء. ومن الضروري ان يكون الحل الفيزيائي المنطقي لمعادتي بواسون او لابلاس الخاص بالمسألة هو الحل الصحيح والوحيد لها، وسنوضح هنا ان الجهد Φ حقيقي في مشتقته الاولى والثانية هو حقاً مستمر في حيز معين وان :

أ- قيمة الجهد Φ على سطح مطلق هو قيمة نوعية (شرط ديرخليت) (Dirichlet condition) أو

ب - المشتقة الاعتيادية للجهد $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ، أي متجه المجال هو نوعي ايضاً في كل مكان على السطح المطلق (شرط نيومان) وان الحل احادي فقط.

ان البرهنة التي سنبرهن عليها تسمى برهنة التوحيد (Uniqueness theorem) وتعتبر من البرهينات الاساسية لنظرية الجهد.

نفرض ان ليس هناك حلاً واحداً فقط وانما حلان لمعادلة لابلاس Φ_1 و Φ_2 ضمن الحيز المحدود وتحقق الشروط الحدودية.

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \text{ at the boundary.} \quad \text{(عند الحدود)} \quad (3.6)$$

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \quad \text{لتكن}$$

$$\Phi = 0 \text{ and } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ at the boundary.} \quad \text{(لذلك عند الحدود)} \quad (3.7)$$

بما أن Φ_1 و Φ_2 هما حلان لمعادلة لابلاس.

$$\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0$$

$$\nabla^2 (\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.8)$$

أي ان ϕ هي أيضاً حل آخر لمعادلة لابلاس، سنستخدم الآن نظرية كرين المعروفة (Green's theorem) ونعني :

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V [\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] d\tau \quad (3.9)$$

حيث ψ و ϕ هما دالتان عدديتان اعتباطيتان و $-\frac{\partial \phi}{\partial n}$ هي المشتقة الاعتيادية ل ϕ على السطح و dS و $d\tau$ هما عنصري مساحة وحجم على التوالي. اذا جعلنا $\psi = \phi = \Phi$ فاننا نحصل على :

$$\int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_V [\Phi \nabla^2 \Phi + |\nabla \Phi|^2] d\tau \quad (3.10)$$

لأي شرط كان من الشروط الحدودية فان الجانب الايسر للمعادلة (3.6) يضمحل او يزول، بالاضافة لذلك فان الحد $\nabla^2 \Phi$ يساوي صفرأ في المعادلة (3.8).

$$\int_V |\nabla \Phi|^2 d\tau = 0 \quad (3.11)$$

بما ان التكاملية (integrand) هو قيمة محددة موجبة

$$\nabla \Phi = 0 \quad (3.12)$$

وبالتالي فان $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = C$ و C ثابت خلال الحجم. اذا تحقق شرط ديرخليت على السطح فان $C=0$ على السطح (من المعادلة (3.6) وعليه فهو يساوي صفر خلال الحيز وان $\Phi_1 = \Phi_2$ أي هناك حلاً واحداً فقط، من جهة اخرى فان شرط نيومان يتحقق أيضاً على السطح.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{a constant}$$

بما ان الثابت عشوائي فيمكن اعتباره صفرأ ويكون الحل أيضاً احادياً

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

لاحظ انه اذا تحقق شرط ديرخليت على جزء من السطح S وتحقق شرط نيومان على الجزء المتبقي فان الطرف الايسر من المعادلة (30-1) يزول ويبقى هناك حلاً واحداً فقط.

3.4 حل معادلة لابلاس في احداثيات متعامدة
(Solution of Laplace's Equation in Rectangular Coordinates)

سنتناول الآن بعض الطرق لحل المسائل التي لا يوجد فيها شحنات حرة. ولذلك فاننا سنهتم بمعادلة لابلاس والتي يعبر عنها في الاحداثيات المتعامدة بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

سنفرض ان حل هذه المعادلة، $\Phi(x, y, z)$ يتمثل في حاصل ضرب دوال هي $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$. وكل واحد منها يعتمد على احداثي واحد فقط لذلك، ولتكن :

$$\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (3.14)$$

وبالتعويض في المعادلة (3.13) مع القسمة على $X(x) Y(y) Z(z)$ نحصل على :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.15)$$

لاحظ اننا قفنا باحلال مشتقات كلية (total derivatives) محل مشتقات جزئية (Partial derivatives) وهذا ممكن في هذه الحالة لان كل مشتقة تتضمن احداثي واحد فقط.

ولكي تسري المعادلة (3.15) على اي قيم عشوائية للاحداثيات المستقلة فان كل حد في الطرف الايسر يجب ان يساوي ثابتاً، لذلك :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_1^2; \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_2^2; \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_3^2 \quad (3.16)$$

وتحققاً للشرط الذي ينص على أن :

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0 \quad (3.17)$$

فاننا نجد ان كل هذه الثوابت ليست حقيقية وليست كلها خيالية. وعلى الاقل يجب ان يكون احدها حقيقي والآخر خيالي. والثالث اما حقيقي او خيالي. اما اذا فرضنا ان الثوابت k_1^2, k_2^2, k_3^2 ما :

$$k_1^2 = -\alpha^2, k_2^2 = -\beta^2, \text{ and } k_3^2 = \gamma^2$$

فان المعادلة (3-16) يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2, \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \gamma^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

ويمكن التحقق من ان حل هذه المعادلات هو :

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{i\beta y} + B_2 e^{-i\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (3.19)$$

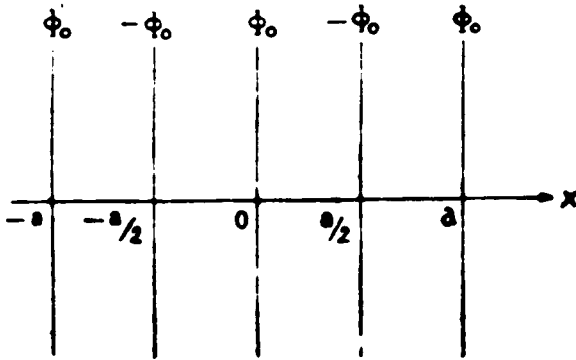
من الواضح ان الحلين الاوليين هما حلين متذبذبين (oscillatory) بينما الحل الاخير ذو طبيعة اسية (exponential) - الجهد Φ هو حاصل ضرب هذه الدوال ويمكن ايجاد هذه الثوابت من الشروط الحدودية التي يحققها الجهد.

ربما يلاحظ ان المعادلة (3-19) هي احد الحلول الخاصة للمعادلة (3-15) ، اي لقد تكون هناك قيم اخرى لـ α, β, γ لاتعطي حلولاً صحيحة اخرى. لذلك فان الصيغة العامة للحلول تكتب بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \sum_{r, s, t} (A_1^r e^{i\alpha_r x} + A_1^s e^{-i\alpha_r x}) \\ &\times (B_1^s e^{i\beta_s y} + B_1^t e^{-i\beta_s y}) (C_1^t e^{\gamma_t z} + C_1^r e^{-\gamma_t z}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

وسنوضح طريقة استخدام هذه الطريقة في حل المثالين الآتيين :

مثال (3-1): لديك ، مجموعة اسلاك موضوعة بصورة موازية للمحور (Y) وتقع في المستوى الذي تكون فيه Z مساوية للصفر. ومرتببة على محور X بحيث تفصل بينها مسافات متساوية هي $x = \pm n \left(\frac{a}{2} \right)$ حيث ان n تساوي صفر، 1، 2، 3... الخ. الاسلاك الفردية الموقع (اي ان n تساوي عدد فردي) لها جهد قيمته Q - والاخرى زوجية الموقع لها جهد قيمته Q_0 . جد الجهد في كل نقاط الفراغ.



الشكل (3-1)

ان الجهد Φ لا يعتمد على y ويتغير دورياً مع X. وبما انه دالة زوجية لـ (X) ، فيمكن تمثيله بتسلسلة الجيب تمام (Cosine series). $\left(\cos \frac{2\pi kx}{a} \right)$ اما اعتمادية دالة الجهد Φ على Z فهي غير معروفة ولكن كما قلنا اعلاه يمكن التوقع بانها اسية (exponential) لذلك فان Φ لها الصيغة العامة :

$$\Phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(z) \cos \frac{2\pi kx}{a} \quad (3.21)$$

مع ذلك لازلنا بحاجة لتعيين الصيغة $f(z)$ ، اذا كان هذا الجهد Φ جهداً صحيحاً، فانه يجب ان يحقق معادلة لابلاس وهي $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ في المنطقة الموجودة فوق الاسلاك حيث لا توجد اي شحنة .

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} f_k(z) \cos \frac{2\pi k x}{a} + \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial z^2} \cos \frac{2\pi k x}{a} \right\} = 0.$$

وهذه المعادلة يجب ان تكون صحيحة لأي قيمة للعامل k .

$$\therefore -\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} f_k(z) + \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial z^2} = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$f_k(z) = A_k e^{\pm \frac{2\pi k}{a} z}$$

حيث ان A_k هو ثابت.

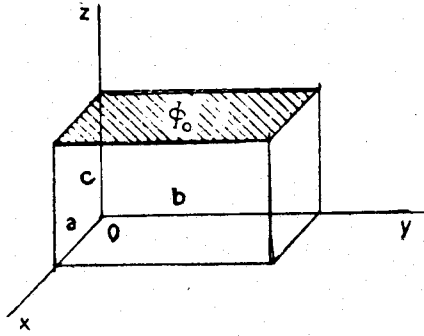
ان طبيعة السؤال هذا تتطلب ان تكون قيمة Z اكبر من الصفر، لذلك فاننا سنحتفظ بالقيمة السالبة لهذا الاس.

$$\therefore f_k(z) = A_k e^{-\frac{2\pi k}{a} z}$$

$$\Phi(x, z) = \sum_k A_k e^{-\frac{2\pi k}{a} z} \cos \frac{2\pi k x}{a} \quad \text{for } z > 0 \quad \text{، لذلك} \quad (3.22)$$

عندما تكون $Z=0$ ، فان الجهد Φ المحسوب من المعادلة (3.22) يجب ان يطابق الجهد الموصوف (**prescribed potential**) وهذا يتطلب تعيين الثابت A_k .

مثال (3-2): صندوق متوازي المستطيلات ابعاده باتجاه المحاور الثلاثة x, y, z a, b, c على التوالي كما موضح في الشكل (3.2). فاذا كان جهد السطح المظلل Φ_0 يبيننا جهد الاسطح الاخرى هو صفر. جد الجهد في نقطة ما داخل الصندوق.



الشكل (2 - 3)

بما ان الجهد يساوي صفر في النقاط $x=a$ و $x=0$ وكذلك في النقاط $y=b$ و $y=0$ فان الدالتين Y, X يجب ان تكونان بالصيغة الآتية :

$$X = \sin \alpha x, \quad Y = \sin \beta y$$

$$\text{where } \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

بالاضافة لذلك ولكون Y, X متذبذبان فان Z وهي جزء من الجهد يجب ان تكون اسية لذلك فان صيغة الجهد يجب ان تكون كالآتي :

$$\Phi = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sinh \gamma_{mn} z$$

$$\text{where } \gamma_{mn} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (\text{see 3.17}).$$

(انظر (1-73).

لقد تم التعبير عن العامل الاسي بصيغة دالة الجيب الزائدي (hyperbolic sine function)

$$\{\text{Note: } e^{\pm \gamma_{mn} z} = \cosh \gamma_{mn} z \pm \sinh \gamma_{mn} z\}$$

لاحظ أن :

لذلك فان الحل العام يكون :

$$\Phi = \sum_{m,n} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sinh \gamma_{mn} z \quad (3.23)$$

3.5 معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكروية

-(Laplace's Equation in Spherical polar Coordinates)

عندما يكون للسؤال تناظر محوري يكون من الملائم عادة استخدام احداثيات قطبية

كروية r, θ, ϕ ، واتخاذ محور التناظر كحور قطبي (polar axis) $\theta = 0$

تأخذ معادلة لابلاس الصيغة الآتية في الاحداثيات القطبية الكروية :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.24)$$

لقد استخدمنا الرمز V للتعبير عن الجهد وذلك تلافياً للاتباس الذي قد يحصل مع

رمز الاحداثي ϕ .

سنستخدم اسلوب فصل المتغيرات كما في حالة الاحداثيات المتعامدة للبحث عن حل

للصيغة (3.25) :

$$V = RS \quad (3.25)$$

حيث R هي دالة r فقط و S هي دالة الاحداثيات الزاوية θ و ϕ فقط. وبالتعويض

في المعادلة (3.24) نحصل على :

$$\frac{S}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.26)$$

وبتقسيم المعادلة على الحد RS نحصل على :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{S \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{S \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.27)$$

وهكذا نجد ان الحد الاول هو دالة لـ r فقط، بينما الحدين الباقيين لا يعتمدان على r .
وتتحقق هذه المعادلة اذا اعتبرنا الحد الاول مقدار ثابت ليكن K أي :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = K \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{S \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{S \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = -K \quad (3.29)$$

ان حل هذه المعادلات يأخذ صيغة حسبت اذا ما اعتبرنا الثابت K مساوياً لـ $l(l+1)$ حيث ان l حد ثابت اختياري أيضاً لذلك فان حل المعادلة (3-28) يكون:

$$R = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (3.30)$$

حيث A و B هما ثابتان اختياريان ،والآن يمكن كتابة المعادلة (3-29) بالشكل الآتي :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = -l(l+1)S \quad (3.31)$$

اي حل لهذه المعادلة يكون السطح S_l دالة θ و ϕ وتسمى توافقاً سطحياً (surface harmonic) ذا درجة l ، لذلك يكون حل معادلة لابلاس (3-24) كالآتي :

$$V = RS = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) S_l \quad (3.32)$$

اي حل لمعادلة لابلاس يسمى توافق كروي (spherical harmonic) ستبقى نفس التقنية المستخدمة لحل المعادلة (3-24) في حل المعادلة (3-21) وعليه :

$$S = P(\theta) Q(\phi) \quad (3.33)$$

حيث $P(\theta)$ هو دالة لـ θ فقط و $Q(\phi)$ هو دالة لـ ϕ فقط. وبالتعويض في المعادلة (3-31) نحصل على :

$$\frac{Q}{\sin^2\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{P}{\sin^2\theta} \frac{d^2Q}{d\phi^2} + l(l+1) PQ = 0 \quad (3.34)$$

وبتقسيم المعادلة على $PQ/\sin^2\theta$ نحصل على :

$$\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2\theta + \frac{1}{Q} \frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0 \quad (3.35)$$

نجد ان الثوابت هنا منفصلة ايضاً والحدين الاوليين هما دالة لـ θ فقط وان الاخير دالة لـ ϕ فقط.
لتكن:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad (3.36)$$

حيث ان m^2 هو ثابت ، وحل هذه المعادلة هو :

$$Q_m = C e^{\pm im\phi} \quad (3.37)$$

حيث ان C هو ثابت ، ولتكن هناك قيمة واحدة للجهد فقط يكون من الضروري ان نجعل :

$$e^{\pm im\phi} = e^{\pm im(\phi+2\pi)} \quad (3.38)$$

وهذا يكون صحيحاً فقط عندما تكون m عدداً صحيحاً. ولجعل دوال Q_m عيارية او متناسقة يجب اختيار قيمة للثابت C بحيث ان :

$$\int_0^{2\pi} Q_m^* Q_m d\phi = 1.$$

ولتحقيق هذا يجب ان تكون قيمة C هنا مساوية لـ $(1/\sqrt{2\pi})$ ان دوال Q_m هي ايضاً متعامدة (orthogonal) اي ان :

$$\text{i.e. } \int_0^{2\pi} Q_m^* Q_n d\phi = 0 \quad \text{if } m \neq n$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} Q_m^* Q_n d\phi = \delta_{mn} \quad (3.39)$$

3-6 معادلة ليكندر (Legendres' Equation) :-

باستخدام المعادلة (3-31) يصبح الجزء الخاص بـ θ في المعادلة (3-35) بالشكل الآتي :

$$\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

او بتقسيم المعادلة على الحد $\sin^2 \theta / P$ نحصل على :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + l(l+1) P - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P = 0 \quad (3.40)$$

سنحول هذه المعادلة بجعل $x = \cos \theta$.

$$\left(\because \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} \right)$$

فان المعادلة تتغير الى :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (3.41)$$

وهذه تسمى المعادلة العامة لليكندر ، اما اذا جعلنا قيمة m تساوي صفراً ، فاننا نحصل على المعادلة الاعتيادية لليكندر ونعني :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1) P = 0$$

$$(1 - x^2) P'' - 2x P' + l(l+1) P = 0 \quad (3.42)$$

سنحاول اولاً الحصول على حل للمعادلة (3-42) وذلك عن طريق سلسلة من التكاملات. لنفرض ان الحل هو :

$$P(x) = a_0 x^\lambda + a_1 x^{1+\lambda} + a_2 x^{2+\lambda} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda} \quad (3.43)$$

اذ علينا ايجاد الثابتين a_k و λ ، وبالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \lambda) (k + \lambda - 1) x^{k+\lambda-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(k + \lambda) (k + \lambda - 1) + 2(k + \lambda) - l(l+1) \right] x^{k+\lambda} = 0 \quad (3.44)$$

وهذه المعادلة يجب ان تقبل اي قيمة لـ x . لذلك فان معامل اي قوة لـ x يجب ان يزول. يمكن ايجاد اوطاً قوة لـ x من المعادلة (3-44) اذا ما جعلنا $(k=0)$ فيكون $(\lambda - 2)$ لذلك فان معامل الحد $x^{\lambda-2}$ يجب ان يكون صفراً اي

$$a_0 \lambda (\lambda - 1) = 0 \quad (3.45)$$

وتعرف هذه المعادلة باسم المعادلة الاسية (indicial equation) ومادام $a_0 \neq 0$ (لأن المفروض ان تكون معامل اوطاً طاقة ممكنة) فاما : $\lambda = 1$ أو $\lambda = 0$

ان معامل $x^{j+\lambda}$ (عندما تكون ز هي اي قيمة لـ K) يمكن ايجاده من المعادلة (3-44) ، اذا فرضنا ان K تساوي لـ $(j+2)$ في الحد الاول وتساوي لـ j في الحد الثاني :
اي :

$$a_{j+2} (j + \lambda + 2) (j + \lambda + 1) - a_j [(j + \lambda) (j + \lambda + 1) - l(l + 1)]$$

ويجب ان تكون صفراً وبذلك فان

$$\therefore a_{j+2} = \frac{(j+\lambda)(j+\lambda+1) - l(l+1)}{(j+\lambda+2)(j+\lambda+1)} a_j \quad (3.46)$$

لذلك اذا عرف a_j فان a_{j+2} تعرف ايضاً. واذا ابتدأنا بقيمة اختيارية لـ a_0 يمكن حساب a_2 و a_4 الخ ومن جهة اخرى يمكن ايجاد قيم a_3 , a_5 , ... ، الخ بتعيين قيمة اختيارية ايضاً لـ a_1 اخذين في حسابنا هذا قيمة $\lambda = 0$ على انها

$$\therefore a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \quad (3.47) \quad \text{صفر}$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\frac{l(l+1)}{2!} a_0 \\ a_4 &= \frac{6 - l(l+1)}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{6 - l(l+1)}{4 \cdot 3} \frac{l(l+1)}{2!} a_0 \\ &= \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!} a_0 \\ a_6 &= -\frac{(l-4)(l-2)l(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} a_0 \\ \dots & \\ a_3 &= \frac{2 - l(l+1)}{3 \cdot 2} a_1 = -\frac{(l-1)(l+2)}{3!} a_1 \\ a_5 &= \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 \\ \dots & \end{aligned} \right\} (3.48)$$

لذلك

$$P_1 = a_0 \left\{ 1 - \frac{l(l+1)}{2!} x^2 + \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!} x^4 \dots \right\} \quad (3.49)$$

$$P_2 = a_1 \left\{ x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} x^3 + \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!} x^5 \dots \right\} \quad (3.50)$$

وهذان حلان لمعادلة ليكندر (3-42) والحل العام هو

$$W = AP_1 + BP_2 \quad (3.51)$$

وهكذا وجدنا حلول معادلة لكيندر. ولكن هل لهذه الحلول اهمية اعتماداً على خواصها المتقاربة، السلسلة متقاربة اذا كانت النسبة بين حدين ناتجين اي

$$\frac{a_{j+2}}{a_j} x^2$$

اصغر من وحدة واحدة لـ z الكبيرة .

وجدنا من (3-47) ان النسبة :

$$\frac{a_{j+2}}{a_j} = 1 \text{ as } j \rightarrow \infty$$

السلسلة ستتقارب اذا كانت $x^2 < 1$ ، اي ان قيمة x تقع في المدى -1 الى $+1$. وبما ان x في مسألتنا نخص $\cos \theta$ اذا فهي تقع في المدى -1 الى $+1$ على كل حال اذا كانت $x = \pm 1$ فان السلسلة ستباعد والحل يصبح غير مقبول الا اذا انتهت او تحددت السلسلة لتصبح متعددة الحدود (polynomial) تفحص المعادلتين (3-49)، (3-50) سيبين ان p تنتهي او تتحدد مع امتلاك x لأعلى أس من المألوف معادلة متعددة

الحدود هذه لجمالها تمتلك قيمة وحدوية في $x=1$ وعندها تسمى متعددة الحدود ليكندر من الترتيب 1. ويرمز لمتعددة الحدود هذه بالرمز $P_l(x)$: ويحدث التعادل عند اخذ :

$$a_0 = \frac{1}{1 - \frac{l(l+1)}{2!} + \dots \text{up to the coefficient of the highest power of } x} \quad (3-52)$$

(الى معامل اعلى أس لـ X)

$$a_1 = \frac{1}{1 - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} + \dots \text{up to the coefficient of the highest power of } x} \quad (3.53)$$

وهكذا نأخذ من المعادلتين (3 - 49) و (3-50) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{for } l=0, a_0 = 1 \text{ and } P_0(x) = 1 \\ \text{for } l=1, a_1 = 1 \text{ and } P_1(x) = x \\ \text{for } l=2, a_0 = -\frac{1}{2} \text{ and } P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \text{for } l=3, a_1 = -\frac{3}{2} \text{ and } P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array} \right\} \quad (3.54)$$

والصيغة العامة لـ $P_l(x)$ هي :

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^r (2l-2r)!}{2^l r! (l-r)! (l-2r)!} x^{l-2r} \quad (3.55)$$

حيث $N = \frac{l}{2}$ اذا كان (l) زوجياً و $N = \frac{l-1}{2}$ اذا كان (l) فردياً .

وتعطينا صيغة رودريك (Rodrigues formula) ابسط تمثيل لمتعددة حدود ليكندر

(Legendre polynomials) ونعني بها

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (3.56)$$

وبإمكانك اقتناع نفسك بأن هذه الصيغة تعطي نفس التعبير لـ $P_l(x)$ كالذي تعطيه المعادلة (3-55) عند اخذ نفس قيم l .

هناك طريقة أخرى بعد للتعبير عن متعددة حدود ليكنندر إذا مددنا المقدمار $(1 - 2xs + s^2)^{-1/2}$ حسب مبرهنة ماكلورين (Maclaurians theorem) نجد ان معاملات قوى مختلفة لـ S هي متعددة حدود ليكنندر اي :

$$(1 - 2xs + s^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) s^l \quad (3.57)$$

والدالة $(1 - 2xs + s^2)^{-1/2}$ تسمى الدالة المولدة (generating function) لمتعددة حدود ليكنندر.

سنبرهن الان ان متعددة الحدود ليكنندر تكون مجموعة تعامدية كاملة (Complete orthogonal set) من الدوال. سنكتب معادلة ليكنندر بالصيغة الآتية :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) P_l'(x) \right] + l(l+1) P_l(x) = 0. \quad (3.58)$$

وعند ضربها بالمقدار $P_q(x)$ وتكاملها ضمن الحدود $(-1,1)$ نحصل على :

$$\int_{-1}^1 P_q(x) \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) P_l'(x) \right] dx + l(l+1) \int_{-1}^1 P_q(x) P_l(x) dx = 0$$

$$\therefore \left[P_q(x) \left\{ (1 - x^2) P_l'(x) \right\} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1 - x^2) P_l'(x) P_q'(x) dx$$

$$+ l(l+1) \int_{-1}^1 P_q(x) P_l(x) dx = 0$$

الحد الاول يزول عند كلتا النهايتين .

$$\therefore - \int_{-1}^1 (1 - x^2) P_l'(x) P_q'(x) dx + l(l+1) \int_{-1}^1 P_q(x) P_l(x) dx = 0 \quad (3.59)$$

و بتبادل (inter changing) l و q نحصل على :

$$-\int_{-1}^1 (1-x^2) P'_q(x) P'_l(x) dx + q(q+1) \int_{-1}^1 P_l(x) P_q(x) dx = 0 \quad (3.60)$$

ويطرح (3-60) من (3-59) نحصل على :

$$\{l(l+1) - q(q+1)\} \int_{-1}^1 P_l(x) P_q(x) dx = 0 \quad (3.61)$$

$$\text{If } l \neq q, \quad \int_{-1}^1 P_l(x) P_q(x) dx = 0 \quad (3.62)$$

الذي يثبت ان متعددات حدود ليكندر لمتكثف الرتب هي متعامدة. اذا كانت $l = q$, فان التكامل يصبح عدداً وقيمة المقدار $\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx$ يمكن ايجادها بسهولة باستخدام الدالة المولدة $(1-2xs+s^2)^{-1/2}$. وهكذا.

$$(1-2xs+s^2)^{-1} = \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) s^l \right]^2 \quad (3.63)$$

$$\int_{-1}^1 (1-2xs+s^2)^{-1} dx = \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) s^l \right]^2 dx.$$

وبتكامل الطرف الايسر :

$$\frac{1}{s} \ln \frac{1+s}{1-s} = \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} s^l P_l(x) \right]^2 dx$$

بما ان حاصل الحدود في الجمع في الطرف الايمن يزول نتيجة حالة التعامد ، لذلك .

$$\frac{1}{s} \ln \frac{1+s}{1-s} = \sum_{l=0}^{\infty} s^{2l} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx \quad (3.64)$$

بتحديد الطرف الايسر وتسوية معاملات اس S^2 نحصل على :

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

ويمكن كتابة حالة التعامد بالشكل الآتي :

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_o(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ol} \quad (3.66)$$

والتعامد العياري لدوال ليكندر هو :

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

لذلك عندما تكون $m=0$ اي في المسائل التي لها تماثل سمعي (azimuthal symmetry) يكون حل معادلة لابلاس هو :

$$\begin{aligned} V &= R(r) S(\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.67)$$

بما ان متعددات الحدود ليكندر تكون مجموعة تعامدية كاملة في الدوال فان اي دالة $f(x)$ ضمن فاصل (interval) $-1 \leq x \leq 1$ يمكن التعبير عنها بصيغة متعددة الحدود ليكندر على الشكل الآتي :

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + \dots \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x) \end{aligned} \quad (3.68)$$

لاجل ايجاد معامل C_l سنضرب الطرفين بالحد $P_m(x)$ ونأخذ التكامل :

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2C_m}{2m+1}$$

$$\therefore C_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx \quad (3.69)$$

ووجد ان هذه الخاصية مفيدة في حل بعض المسائل.

3-7 دوال ليكندر المرافقة (Associated Legendre functions)

سنناقش الآن حل معادلة لابلاس عندما يكون للجهد تغيير سمتي (azimuthal variation) اي ان $m \neq 0$ نحن نعرف ان $y = P_l(x)$ هو حل المعادلة :

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \quad (3.70)$$

وعند تفاضلها m من المرات ، نحصل على :

$$(1-x^2) \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} - 2x(m+1) \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + (l-m)(l+m+1) \frac{d^m y}{dx^m} = 0 \quad (3.71)$$

اذا جملنا .

$$v = \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (3.72)$$

ستغير المعادلة (3-71) الى :

$$(1-x^2) \frac{d^2 v}{dx^2} - 2x(m+1) \frac{dv}{dx} + (l-m)(l+m+1)v = 0 \quad (3.73)$$

وهذه المعادلة متحققة بوضوح بالتمويض :

$$v = \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

وإذا وضعنا تعويضاً آخر مثل :

$$w = v(1 - x^2)^{m/2} \quad (3.74)$$

سنحصل على :

$$(1 - x)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] w = 0 \quad (3.75)$$

وهذه هي نفسها معادلة ليكندر العامة (3-41) وحلها هو :

$$w = v(1 - x^2)^{m/2} = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = P_l^m(x). \quad (3.76)$$

حيث مثلناها بالرمز $P_l^m(x)$ والدوال $P_l^m(x)$ المعرفة كما في اعلاه تسمى متعددة الحدود ليكندر المرافقة (associated Legendre poly nomials). شروط التعامد المتعددة الحدود المرافقة لليكندر هي :

$$2(l+m)! \delta \quad (3.77)$$

لذلك فان التوافقيات السطحية العيارية :
(surface harmonics) يعطي حسب المعادلة الآتية :

$$S_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (3.78)$$

ويمكن كتابة الحل العام لمعادلة لابلاس بالشكل الآتي :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right] S_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.79)$$

ويوضح الجدول (3-1) بعض الدوال التوافقية الكروية (Spherical harmonic functions)

جدول (3-1)

$$\begin{aligned}
 S_{1,0} &= + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \\
 S_{1,1} &= - \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{i\varphi} \\
 S_{1,-1} &= + \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\
 S_{2,0} &= + \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
 S_{2,1} &= - \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\varphi}
 \end{aligned}$$

ربما سنعتقد ان المعالجة التي اعطيت في الاجزاء القليلة الماضية عبارة عن هراء في هراء (hocus - focus) ولكن لاتياس تمالك نفسك ولنحل بعض الامثلة وسنجد فائدة الصيغ المعطاة ومدى سهولة استخدامها وتسهيلها حل بعض المسائل الفيزيائية المعقدة ولكن قبل البدء بالاسئلة يجب ملاحظة مايلي :

(ii) اذا كان الحيز المعني يتضمن الفضاء الكلي داخل كرة ما، فيجب هنا ازالة الحدود التي تقترب من اللانهاية في الحيز اي كل B_{lm} يجب جعلها صفراً، ذلك لأننا نعني بحل محدد فقط.

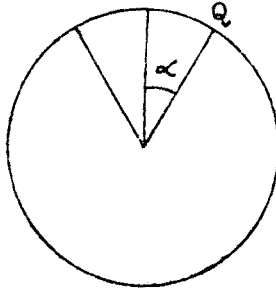
(ii) اذا كان الحيز لايتضمن نقطة الاصل يجب اعادة B_{lm} .

(iii) اذا كنا نعني الشروط الحدودية المتماثلة

(Spherical Symmetrical boundary conditions) سنأخذ بنظر الاعتبار الحدود

ذات $m = 0$ فقط.

مثال (3-3) : جد جهد قبة كروية (spherical cap) ذات زاوية α ومشحونة الى الحد الذي اصبح لها كثافة سطحية منتظمة مقدارها σ_0 (الشكل 3-3).



الشكل (3 - 3)

يمكن اعتبار القبة الكروية على انها جزء مقطوع من سطح كرة بواسطة مخروط دائري ذي زاوية شبه رأسية مقدارها α (right circular cone of semivertical angle α) للحصول على حل للمسألة هذه سنعتبر ان الكرة كلها مشحونة وكثافتها السطحية σ حيث :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \quad \text{from } \theta = 0 \quad \text{to } \theta = \alpha \\ &= 0 \quad \text{from } \theta = \alpha \quad \text{to } \theta = \pi \end{aligned}$$

بما ان للمسألة لها تماثل سمّي (Azimuthal symmetry) ، بر عن ϕ بصيغ التوافق.

$$\sigma = a_0 + a_1 P_1(\cos \theta) + a_2 P_2(\cos \theta) + \dots \quad (\text{see 3.68}) \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \sigma P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad \text{حيث} \\ &= \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\pi}^{\theta=\alpha} \sigma P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) + \frac{2l+1}{2} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} \sigma P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ &= \frac{2l+1}{2} \sigma_0 \int_{\theta=\pi}^{\theta=\alpha} P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad (\because \sigma = 0 \text{ from } \theta = \pi \text{ to } \theta = \alpha) \\ \therefore a_0 &= \frac{1}{2} \sigma_0 \int_{\theta=\pi}^{\theta=\alpha} d(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

والآن يمكن ملاحظته ،

$$\int_{\theta=\pi}^{\theta=0} P_l (\cos \theta) d(\cos \theta) \\ = \left[\frac{P_{l+1} (\cos \theta) - P_{l-1} (\cos \theta)}{2l+1} \right]_{\theta=\pi}^{\theta=0} \quad (\text{المسألة 3-1})$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{2} \sigma_0 \left[(1 - \cos \alpha) \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ P_{l-1} (\cos \alpha) - P_{l+1} (\cos \alpha) \right\} P_l (\cos \theta) \right] \quad (3.81)$$

والآن يمكن حساب الجهد في نقطة P على المحور القطبي والتي تبعد مسافة r من المركز من المعادلة الآتية :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{PQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}} \quad (3.82)$$

حيث dS تمثل عنصر المساحة في Q على سطح الكرة و a نصف قطر الكرة. إذا كانت $a < r$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma}{a} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} \cos \theta \right)^{-1/2} dS \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma}{a} \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\cos \theta) \left(\frac{r}{a} \right)^n dS \quad \text{by (3.57)} \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{2a} \left[(1 - \cos \alpha) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ P_{l-1} (\cos \alpha) - P_{l+1} (\cos \alpha) \right\} P_l (\cos \theta) \right] \\ \times \left[1 + P_1 (\cos \theta) \left(\frac{r}{a} \right) + P_2 (\cos \theta) \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \dots \right] 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a\sigma_0}{4\epsilon_0} \int_{-1}^1 \left[(1 - \cos \alpha) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ P_{l-1}(\cos \alpha) - P_{l+1}(\cos \alpha) \right\} P_l(\cos \theta) \right] \\
&\quad \times \left[1 + P_1(\cos \theta) \left(\frac{r}{a} \right) + P_2(\cos \theta) \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \dots \right] d(\cos \theta) \\
&= \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[(1 - \cos \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\cos \alpha) - P_{n+1}(\cos \alpha)}{2n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]
\end{aligned}$$

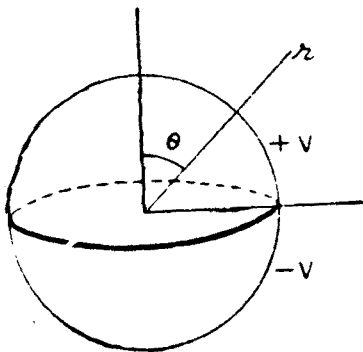
حيث استخدمنا (3-66)، وهكذا فإن الجهد في نقطة (r, θ) يعطى حسب المعادلة الآتية :

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) = \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[(1 - \cos \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\cos \alpha) - P_{n+1}(\cos \alpha)}{2n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right. \\
\left. \times P_n(\cos \theta) \right] \quad (3.83)
\end{aligned}$$

If $r > a$

$$\begin{aligned}
V_P = \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[(1 - \cos \alpha) \left(\frac{a}{r} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\cos \alpha) - P_{n+1}(\cos \alpha)}{2n+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right] \\
(3.84)
\end{aligned}$$

مثال 3-4 : كرة موصلة نصف قطرها a مصنوعة من نصفين كروييين تفصل بينهما حلقة عازلة والجهد في نصف الكرة العلوي هو $+V$ في نصفها السفلي هو $-V$ جد الجهد في نقطة ما داخل الكرة.



الشكل (3-4)

بما ان المسألة لها تماثل سمتي، $m=0$ والجهد يعطى من المعادلة :

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta) \quad (3.85)$$

فيجب ان يكون للجهد قيمة محددة في نقطة الاصل ، اذا لم تكن هناك شحنات لذلك ، فان الحد الثاني داخل القوس والذي يعطي الجهد اللا محدود في نقطة الاصل يجب ازالته اي $B_l = 0$ لكل قيم l ، وهكذا .

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (3.86)$$

الجهد على سطح الكرة ($r=a$) هو :

$$V(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \quad (3.87)$$

اما المعامل A_l فيمكن ايجاده باستخدام المعادلة (3-69)

$$\begin{aligned} A_l a^l &= \frac{2l+1}{2} \int_0^{\pi} V(a, \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.88) \\ &= \frac{2l+1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} V(a, \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} V(a, \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned}$$

والآن $V(\theta)$ بحسب من المعادلة :

$$V(\theta) = \begin{cases} +V & \text{for } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \text{for } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.89)$$

إذا عوضنا عن $\cos \theta$ بالرمز X نحصل على :

$$A_l a^l = \frac{2l+1}{2} \left[- \int_{-1}^0 V P_l(x) dx + \int_0^1 V P_l(x) dx \right] \quad (3.90)$$

$$\therefore A_0 = 0$$

$$A_1 = \frac{3}{2a} \left\{ -V \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-1}^0 + V \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^1 \right\} = \frac{3V}{2a} \quad (3.91)$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = \frac{7}{2a^3} \left\{ -V \left(\frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right)_{-1}^0 + V \left(\frac{5x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right)_0^1 \right\} = -\frac{7V}{8a^3}$$

لاحظ ان كل المعادلات الزوجية تزول .
والجهد داخل الكرة هو :

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= A_1 r P_1(\cos \theta) + A_3 r^3 P_3(\cos \theta) + \dots \\ &= \frac{3Vr}{2a} P_1(\cos \theta) - \frac{7V}{8a^3} r^3 P_3(\cos \theta) + \dots \end{aligned}$$

مثال (3-5) : جد الجهد عند جميع نقاط الفضاء المحيط بكرة موصلة نصف قطرها a

موضوعة في مجال كهربائي منتظم E_0 .

إذا اخذنا محاورنا بالشكل الذي يكون فيه المحور القطبي متطابقاً مع اتجاه المجال فيكون للسألة تماثل سمي ، وليكن محور التماثل محور Z مثلاً حيث $\theta = 0$ ، والجهد على محور التماثل يعطى من :

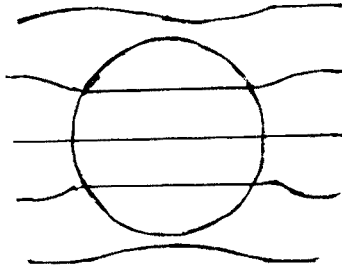
$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] \quad (\because P_l(\cos \theta) = 1) \quad (3.92)$$

مع $r = Z$ ، إذا قيم هذا الجهد بوسيلة ما وفي نقطة اعتباطية وتم تمديد دالة الجهد بسلسلة اسية كما في (3-92) عند ذاك يمكن إيجاد الجهد لاي نقطة في الفضاء بضرب اس الحدين l و $\frac{1}{r^{l+1}}$ بالمقدار $P_l(\cos \theta)$.

يرتبط المجال المنتظم E_0 باتجاه المحور Z مع جهده بالعلاقة الآتية :

$$E_0 = -\nabla \Phi_0$$

ربما ستفرض تعريف Φ هذا مادام انه لا يحقق الشرط $\Phi_0 =$ كلما اقترب r من اللانهاية $r \rightarrow \infty$ مع ذلك لاحظ اننا افترضنا مجالاً منتظماً ذا تمدد لانهاية ومصدره يقع في اللانهاية ، هكذا Φ لاتضحل مع اقتراب r من اللانهاية



الشكل (3 - 5)

ان المجال حول الكرة مباشرة يتشوه (distorted) نتيجة الشحنة المحتشة على السطح ، ولكن سيكون مساوياً لـ E في المسافات الكبيرة (الشكل 3-5). والجهد الكلي في تقطة $V(r, \theta)$ هو Φ زائداً الجهد الناتج من الشحنة المحتشة في الكرة الموصلة (3-94). وهذا الجهد يكون عديم الهمية في القيم الكبيرة لـ r ، و :

$$V(r, \theta) = \Phi_0$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l-1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (3.95)$$

عندما تكون قيمة r كبيرة فان المقادير المتضمنة لـ B_l في المعادلة (3-95) يمكن اهمالها وهكذا ،

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ = A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) + A_2 r^2 P_2(\cos \theta) + \dots \quad (3.96)$$

وبما ان هذه يجب ان تكون مساوية لـ $\Phi_{0,1}$ المعطاة في (3-93)

$$A_1 r P_1(\cos \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

وهكذا ، فان $A_1 = -E_0$ وكل $A_l = 0$ الاخرى تزول لذلك من المعادلة (3-95)

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= A_1 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.97)$$

عندما توضع كرة موصلة في مجال منتظم تولد الشحنات المحتثة مجالاً كهربائياً داخل الكرة يلغي المجال الخارجي ومعطية مجالاً مقداره صفر في الفضاء وهكذا فان الجهد على السطح ($r=a$) هو صفر.

$$\begin{aligned} \therefore V(a, \theta) &= -E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0 \\ E_0 a P_1(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.98)$$

ويمكن ايجاد المعامل B_l بنفس الطريقة المتسببة في المثال السابق

$$\begin{aligned} B_l a^{-(l+1)} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 E_0 a P_l(x) P_l(x) dx \\ \therefore B_l &= \frac{(2l+1)a^{l+2}}{2} E_0 \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx \\ &= \frac{(2l+1)a^{l+2}}{2} E_0 \frac{2}{2l+1} \delta_{l,1} \text{ (by 3.66)} \\ \therefore B_1 &= E_0 a^3; B_2 = B_3 \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

وهكذا

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{E_0 a^3}{r^2} P_1(\cos \theta) \\ &= -E_0 r \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (3.100)$$

ويمكن إيجاد مركبات المجال من هذه المعادلة باستخدام العلاقات الآتية :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

مثال (3-6) : جد الجهد عند أي نقطة ، في الفضاء نتيجة شحنة مقدارها q موزعة بانتظام حول حلقة دائرية نصف قطرها a ومحورها هو المحور Z ويقع مركزها في النقطة $Z = b$

الجهد في نقطة p التي تقع على محور التائل في $Z = r$ هو :

$$V(z = r) = \frac{q}{AP} = \frac{q}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \alpha)^{1/2}} \quad (3.101)$$

حيث A هي أي نقطة في الحلقة تبعد عن نقطة الاصل O مسافة C و α هي الزاوية التي يصنعها المستقيم AO مع المحور Z .

$$\begin{aligned} (r^2 - 2rc \cos \alpha + c^2)^{-1/2} &= r^{-1} \left(1 - \frac{2c \cos \alpha}{r} + \frac{c^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= r^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{c}{r} \right)^l \quad (\text{by 3.57}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \end{aligned}$$

وهكذا ،

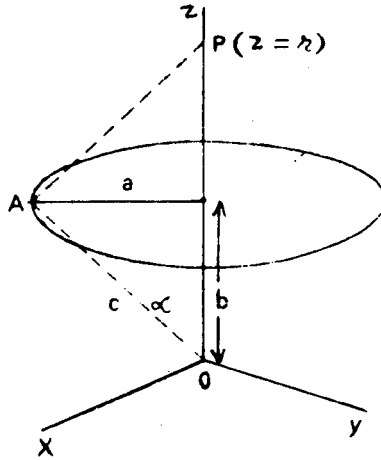
$$V(z = r) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \quad (3.102)$$

والجهد عند أي نقطة في الفضاء

$$V(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) \quad (3.103)$$

If $r < c$,

$$V(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) \quad (3.104)$$



الشكل (3 - 6)

3-8 معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية
: (Laplace's Equation in cylindrical coordinates)

تاخذ معادلة لابلاس الشكل الآتي في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.105)$$

ومرة اخرى نستخدم طريقة المتغيرات وتكتب :

$$V(r, \phi, z) = R(r) Q(\phi) Z(z) \quad (3.106)$$

حيث :

R هي دالة r فقط

Q هي دالة ϕ فقط

Z هي دالة z فقط.

وبالتعويض في (3-105) نحصل على :

$$\frac{QZ}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{RZ}{r^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} + RQ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (3.107)$$

وبتقسيم المعادلة على $\frac{RQZ}{r^2}$ نحصل على :

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = - \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} \quad (3.108)$$

نجد ان الطرف الايمن هو دالة ل ϕ فقط وان الطرف الايسر لا يعتمد على ϕ ،
والمعادلة تتحقق اذا كان كل طرف مساوياً لثابت ، لتكن :

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} = -\nu^2, \quad (3.109)$$

حيث ν مقدار ثابت ، وحل هذه المعادلة هو:

$$Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi} \quad (3.110)$$

لنضمن امتلاك $Q(\phi)$ قيمة واحدة فقط ، يجب ان نأخذ ν القيم التكاملية
(integral values) (انظر 3-38) والطرف الايسر من المعادلة (3-108) يصبح الآن

بالشكل الآتي :

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \nu^2$$

بالقسمة على r^2 والنقل نحصل على :

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\nu^2}{r^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad (3.111)$$

وكما فعلنا في السابق ليكن :

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 \quad (3.112)$$

حيث K مقدار ثابت .

عليك هنا ان لا تختار لان الثابت في المعادلة (3-109) اخذ اشارة سالبة وحل في المعادلة (3-112) اشارة موجبة فهي مسألة ملائمة لاكثر لانهم بها من ناحيتك، حل المعادلة (3-112) هو :

$$Z(z) = e^{\pm kz} \quad (3.113)$$

والجزء r في المعادلة يصبح الآن بالشكل الآتي :

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\nu^2}{r^2} = -k^2 \quad (3.114)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + (k^2 r^2 - \nu^2) R = 0 \quad (3.115)$$

اذا جعلنا $x=Kr$ تحول المعادلة الى الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (3.116)$$

وتسمى هذه معادلة بيسل (Bessels' equation) وكما في كتابة معادلة ليكندر سنحاول ايجاد حلها بالصيغة الآتية :

$$R(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+1} \quad (3.117)$$

وبالتعويض في (3-116) نحصل على :

$$\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} (k + \lambda)(k + \lambda - 1) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} (k + \lambda) - \nu^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} \right] x^{k+\lambda-2} \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda} = 0$$

i.e.

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} \{(k + \lambda)^2 - \nu^2\} x^{k+\lambda-2} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda} = 0 \quad (3.118)$$

معامل اقل أس $\lambda = 0$ يعطي معادلة أسية (indicial equation)

$$a_0 (k^2 - \nu^2) = 0 \quad \therefore k = \pm \nu \quad (3.119)$$

إذا اخذنا اقرب أس اعلى $\lambda = 1$ ، يكون معاملها $a_1 \{(k + 1)^2 - \nu^2\}$ ويجب ان تكون صفراً.

$$\therefore a_1 \{(k + 1)^2 - \nu^2\} = 0$$

لأن $k = \pm \nu$ لدينا :

$$a_1 (2\nu \pm 1) = 0$$

وبما ان ν عدد صحيح فان $(2\nu \pm 1) \neq 0$ وهكذا :

$$a_1 = 0.$$

(3.120)

معامل x^{k+j} هو :

$$a_{j+2} \{(k + j + 2)^2 - \nu^2\} + a_j = 0$$

$$a_{j+2} = - \frac{a_j}{(k + j + 2)^2 - \nu^2} \quad (3.121)$$

وهذه تعطينا العلاقة بين معامل الحدود المتغيرة ، لأن $a_1 = 0$ فان كل الارقام الفردية تزول.

إذا كانت $k = \nu$ فان معامل الارقام الزوجية تكون :

$$a_0 - \frac{a_0}{2^2(\nu+1)} + \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)} \frac{a_0}{2!} \dots$$

$$\dots \frac{(-1)^s}{2^{2s}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+s)} \frac{a_0}{s!} \dots$$

and

$$R(r) = a_0 \left[x^\nu - \frac{1}{2^2(\nu+1)} x^{\nu+2} + \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)} \frac{1}{2!} x^{\nu+4} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(-1)^s}{2^{2s}(\nu+1)\dots(\nu+s)} \frac{1}{s!} x^{\nu+2s} \dots \right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^s x^{\nu+2s}}{2^{2s} s! (\nu+1) \dots (\nu+s)} \quad (3.122)$$

من المؤلف تعريف a_0 كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (3.123)$$

وهكذا ،

$$R(r) = J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+2s}}{2^\nu \Gamma(\nu+1) 2^{2s} s! (\nu+1) \dots (\nu+s)}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1) \Gamma(\nu+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} \quad (3.124)$$

وتعرف هذه باسم دالة بيسل (Bessel's function) من النوع الاول ذات ترتيب ν ويرمز لها بالرمز $J_\nu(x)$. وبين الاختبار النسبي (ratio test) ان الدالة تتباعد

(Converges) لأي قيمة ل x .

If $k = -\nu$

$$R(r) = J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1) \Gamma(s-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \quad (3.125)$$

الصيغة العامة لمعادلة بيسل لذلك يجب ان يكتب على النحو الآتي :

$$R = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x) \quad (3.126)$$

حيث ان B,A ثابت ، وهذه صحيحة حقاً عندما لا تكون ν رقماً صحيحاً عندها تكون $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ كما عرفنا في المعادلتين (3-124),(3-125) حلين خطيين مستقلين اما اذا كانت ν رقماً صحيحاً (كما في حالتنا هذه) يمكن اعتبار ان الحلين خطيين مستقلين (linearly dependent) ، اذا كانت ν رقماً صحيحاً فان حدود الاولوية في مقام المعادلة (3-25) والتي يكون لها $(\nu - 1), \nu, \nu + 1, \dots$ تنزول، لان $\frac{1}{\Gamma(s - \nu + 1)} = 0$. وهكذا يمكن كتابة (3-125) على النحو الآتي :

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\Gamma(s-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \quad (3.127)$$

Put $p = s - \nu$

$$\begin{aligned} \therefore J_{-\nu}(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu} \\ &= (-1)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x) \end{aligned} \quad (3.128)$$

لذلك عندما تكون ν عدداً صحيحاً فان المعادلة (3-126) ليست حلاً عاماً لمعادلة بيسل من الدرجة الثانية ، ويكون من الضروري ايجاد حل خطي مستقل آخر (linearly independent solution) ، والحل الملائم هو اخذ دالة نيومان (Neumann function) أو ما يعرف ايضاً بدالة بيسل من الدرجة الثانية ، والتي تعرف :

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (3.129)$$

من السهولة الادراك انها تتوافق مع معادلة بيسل ، ويمكن ايضا اثبات ان $N_\nu(x)$ لاتعتمد على $J_\nu(x)$ والحل الفاعل لمعادلة بيسل في المحاور الاسطوانية هو:

$$V(r, \phi, z) = \sum_{m,\nu}^{\infty} \left[A_{m\nu} J_\nu(k_m r) + B_{m\nu} N_\nu(k_m r) \right] e^{\pm i\nu\phi} e^{\pm kz} \quad (3.130)$$

ذلك لاننا اخذنا بنظر الاعتبار حقيقية ادخال مختلف قيم K لتمطينا حلاً مقبولاً. وندرج في ادناه بعض الخواص المفيدة لدوال بيسل :

(1) يمكن اثبات باختيار نفس الاسلوب المتبع في حالة متعددة الحدود ليكندر (Legendre polynomials) ان دوال بيسل تحقق الشرط التعمادي الآتي :

اذا $x = k_m r$ هو الجذر من درجة m (mth root) للمقدار $J_\nu(x)$ اي $J_\nu(k_m r) = 0$ في الفاصل (interval) $0 \leq r \leq \rho$

$$\int_0^\rho J_\nu(k_m r) J_\nu(k_{m'} r) r dr = \frac{\rho^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_m \rho) \delta_{mm'} \quad (3.131)$$

(2) بما ان $J_\nu(k_m r)$ تشكل مجموعة متعامدة كاملة (Complete orthogonal Set) فان اي دالة $f(r)$ يمكن ان تمتد ضمن المجال $0 \leq r \leq \rho$ بصيغتها :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{m\nu} J_\nu(k_m r) \quad (3.132)$$

$$D_{m\nu} = \frac{2}{\rho^2 J_{\nu+1}^2(k_m \rho)} \int_0^\rho f(r) J_\nu(k_m r) r dr \quad (3.133)$$

$$3. J_0'(k_m r) = \frac{d J_0(k_m r)}{dr} = -k_m J_1(k_m r) \quad (3.134)$$

$$4. J_\nu'(k_m r) = \frac{\nu}{r} J_\nu(k_m r) - k_m J_{\nu+1}(k_m r) \quad (3.135)$$

$$5. \int J_1(k_m r) dr = -\frac{1}{k_m} J_0(k_m r) \quad (3.136)$$

$$6. \int (k_m r) J_0(k_m r) dr = r J_1(k_m r) \quad (3.137)$$

مثال 3-7 : - في كبل ذي موصلين متحدي المحور (coaxial cable) تم الحفاظ على الجهد في الاسطوانة الخارجية التي نصف قطرها 'b' مساوياً للصفر، والجهد في الاسطوانة الداخلية التي نصف قطرها "a" هو V_1 . جد تعبيراً للجهد في حيز بين الاسطوانتين.

بما ان الكبل ذا الموصلين متحدي المحور والمتماثل اسطوانياً ، لا يوجد هناك اعتماد على ϕ ، لذلك فان $v = 0$ بالإضافة الى ذلك اذا كان الكبل طويلاً يمكن الغناء تأثير النهاية (end effect) اي لا يوجد اعتماد على Z وهكذا فان $-K=0$ وتتقلص معادلة لابلاس تحت هذه الظروف الى :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0. \quad (3.138)$$

تكامل $r \frac{dV}{dr}$ يساوي A (ثابت).

$$V(r) = A \ln r + C \quad (3.139)$$

حيث C ثابت آخر. والشروط الحدودية تعطينا :

$$\text{at } r = b, V(b) = A \ln b + C = 0 \quad C = -A \ln b$$

$$\text{and at } r = a, V(a) = A \ln a - A \ln b = V_1,$$

$$\therefore A = -\frac{V_1}{\ln(b/a)}$$

$$\text{and } \ln V(r) = -\frac{V_1}{\ln(b/a)} (\ln r - \ln b) = -\frac{V_1}{\ln(b/a)} \ln \frac{r}{b} \quad (3.140)$$

مثال (3-8) : - اسطوانة لانهاية الطول نصف قطرها "a" ومحورها منطبق على المحور Z تم الحفاظ على الجهد في سطحها الاسطواني مساوياً للصفر. اذا غلفت هذه الاسطوانة بلوح جهده V_1 عند النقطة $Z=0$ احسب الجهد في نقطة ما داخل الاسطوانة.
 الحل لا يعتمد على ϕ . اذن $v = 0$ في القيم الكبيرة لـ Z، تقترب V من الصفر وهكذا لا يمكن ادخال e^{+kz} اضافة لذلك يجب ان يكون لـ V قيمة محددة في نقطة الأصل، وهذا لا يحدث اذا كان $B_r = 0$ لان الحد الثاني داخل القوس (انظر 130-3) يعطي زيادة لانهاية الى الجهد في نقطة الاصل ما لم تكن $B_z = 0$ صفرأ. ذلك يمكن حساب الجهد من المعادلة الآتية :

$$V(r, \phi, z) = \sum_m A_{m0} J_0(k_m r) e^{-k_m z} \quad (3.141)$$

والشروط الحدودية تعطينا :

$$V(a, \phi, z) = - \sum_m A_{m0} J_0(k_m a) e^{-k_m z} = 0.$$

$$V(r, \phi, 0) = \sum_m A_{m0} J_0(k_m r) = V_1 \quad (3.142)$$

من المعادلة (3-133) :

$$A_{m0} = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_m a)} \int_0^a V_1 J_0(k_m r) r dr$$

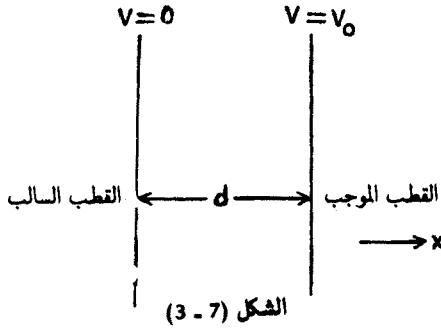
$$= \frac{2V_1}{a^2 J_1^2(k_m a)} \frac{a}{k_m} J_1(k_m a) \quad (\text{by 3.137})$$

$$= \frac{2V_1}{a k_m J_1(k_m a)}$$

$$\therefore V(r, \phi, z) = \frac{2V_1}{a} \sum_m \frac{J_0(k_m r)}{k_m J_1(k_m a)} e^{-k_m z} \quad (3.143)$$

3-9 حل معادلة بواسون باستخدام دالة كرين (Solution of Poisson Equation Using Green Function)

درسنا طرق حل معادلة لابلاس ، وسنطرح الآن طريقة لحل معادلة بواسون .
سنوضح أولاً استخدام معادلة بواسون بدراسة مثال بسيط له تطبيقات عملية مهمة ،
هو مسألة توزيع الجهد في صمام ثنائي محدد بالشحنة الحيزية
(Space charge limited diode) .



تصور صماماً ثنائياً ذا لوحين متوازيين (الشكل 3-7) ومساحة قطبية (electrodes) الجانبية من الكبر بحيث يمكن إلغاء تأثير الحافة (edge effect) من الحسابات، عند التشغيل يغادر الكاتود من القطب السالب (حيث $x=0$ عندما $V=0$) ويتسارع باتجاه القطب الموجب ($x=d$ عندما $V=V_0$) خلال هذه العملية تتجمع شحنة حيزية في الحيز بين القطبين تحدد من سريان التيار. وبما ان الحيز بين اللوحين فارغ تأخذ معادلة بواسون الشكل الآتي :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\rho/\epsilon_0 \quad (3.144)$$

حيث ρ تمثل كثافة الشحنة.
إذا كانت J تمثل التيار لوحدة المساحة ولما سرعة الالكترون فان :

$$J = -\rho u \quad (3.145)$$

على فرض ان سرعة انبعاث الالكترونات (emission velocity of electrons) يمكن
الفاؤها ، يصبح لدينا باخذ اعتبارات الطاقة :

$$\frac{1}{2}mu^2 = eV \quad (3.146)$$

باستخدام المعادلتين (3-145) و (3-146) يمكن كتابة المعادلة (3-144) على النحو
الآتي :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{u\epsilon_0} = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

وعند اجراء التكامل نحصل على :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = \frac{2J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} V^{1/2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2J^{1/2}}{\epsilon_0^{1/2}} \left(\frac{mV}{2e} \right)^{1/4}$$

وبالتكامل مرة اخرى مع استخدام الشروط الحدودية نحصل على :-

$$V^{3/4} = (3/2) \left(\frac{J}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/4} x.$$

$$V = (3/2)^{4/3} \left(\frac{J}{\epsilon_0} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/3} x^{4/3} \quad (3.147) \quad \text{لذلك}$$

نظراً لطبيعة المعادلة غير المتجانسة فان مسائل القيم الحدودية التي تتضمن معادلة
بواسون تكون بصورة عامة اكثر صعوبة ، ويمكن الحصول على حل لمعادلة بواسون
(وايضاً معادلة لابلاس) عن طريق مايعرف بدالة كرين (Green's function) ولهذا
الدالة اهمية نظرية كبيرة وذلك لانها تساعد في حل معادلة تفاضلية ذات شروط
حدودية مناسبة بالتربيع سنقدم اولاً دالة كرين ثم نوضح باختصار طريقة حل معادلة
بواسون بواسطتها ، لتكن \mathcal{L} عاملاً تفاضلياً (differential operator) و $g(x)$ دالة
مستمرة (Continuous function) ، وسنجد كيف ان إيجاد دالة $f(x)$ مثل :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{g(x)}{\epsilon_0} \quad (3.148)$$

هو ممكن على الرغم من انها تتوافق مع المعادلة التفاضلية غير المتجانسة ولها شروط حدودية نوعية معينة. اذا كان هناك حل وحيد لكل $g(x)$ على انفراد يجب ان يوجد في المقابل عامل عكسي (inverse operator) هو \mathcal{L}^{-1} لكي يصبح الحل الاصولي (formal solution) لمجموع $g(x)$ في المعادلة (3-148) هو:

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \frac{g(x)}{\epsilon_0} \quad (3.149)$$

لقد فرضنا ان العامل \mathcal{L}^{-1} لا يعني فقط العملية المقلوبة لما يمثله العامل \mathcal{L} وانما استخدام الشروط الحدودية المرافقة. ولناخذ على سبيل المثال المعادلة:

$$\frac{d}{dx} y = 2x$$

والتي نضع للشروط $y=1$ عندما $x=0$ ، العامل العكسي لـ $\frac{d}{dx}$ هو $\int dx$.

$$\therefore y = \int 2x dx = x^2 + b$$

حيث b ثابت، واستخدام الشروط الحدودية يعطي $b=1$. لذلك نفرض ان عمل العامل $\int dx$ على المقدار $2x$ يعطي الحل الوحيد الآتي:

$$y = x^2 + 1$$

يمكن التعبير عن الحل (3-149) بصيغ دالة دلتا لديراك (Dirac Delta function) كالاتي:

$$f(x) = \int \mathcal{L}^{-1} \delta(x-x') \frac{g(x')}{\epsilon_0} dx' \quad (3.150)$$

من التعريف فان حل المعادلة (3-148) عندما تكون $g(x) = \delta(x-x')$ تسمى دالة كرين $G(x-x')$ للعامل \mathcal{L} والشروط الحدودية المعطاة، ودالة كرين $G(x-x')$ اذا تتوافق والمعادلة:

$$\mathcal{L} G(x, x') = \frac{\delta(x-x')}{\epsilon_0} \quad (3.151)$$

وبنفس الشروط الحدودية في الدالة $f(x)$:

$$\therefore G(x, x') = \int_{-1}^{-1} \frac{\delta(x-x')}{\epsilon_0} \quad (3.152)$$

لهذا فان الحل $f(x)$ للمعادلة (3-148) هو :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \int_{-1}^{-1} \frac{\delta(x-x')}{\epsilon_0} g(x') dx' \\ &= \int G(x, x') g(x') dx' \end{aligned} \quad (3.153)$$

وتختصر المشكلة هذا الى ايجاد دالة كرين المناسبة للعامل المعطى ، وحال ايجادها يمكن الحصول بسهولة على الحل $f(x)$ بالتكامل.

يجب ان نلاحظ انه على الرغم من اننا اخذنا للسهولة بمسألة احادية البعد الا ان الصيغة (3-153) قد تتوسع لتصبح ثلاثية الابعاد كالآتي :

$$G(r, r') = \int_{-1}^{-1} \frac{\delta(r-r')}{\epsilon_0} \quad (3.154)$$

$$f(r) = \int G(r, r') g(r') dr' \quad (3.155)$$

وسنبين الآن كيفية ايجاد حل معادلة بواسون مع اما الشروط الحدودية لديرخلت (Dirichlet) او لنيومان (Neumann) وذلك باستخدام مقارب لدالة كرين. معادلة بواسون هي :

$$\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (3.156)$$

وقد قنا سابقاً بايجاد تعبير للجهد العددي (1-41)

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (3.157)$$

لنعتبر ان هذا التعبير يتوافق ومعادلة بواسون (3-156) وتطبيق لابلاسيان على طرفي المعادلة (3-157) ، نحصل على :

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \int \frac{\rho(r) dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dr \quad (3.158)$$

ونعرف بالحساب المباشر ان عندما $r \neq 0$ ، فان :

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (3.159)$$

فعندما تكون $r=0$ تصبح غير معرفة ، على كل حال يمكن معرفة قيمة $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dr$ عند الحالة $r=0$ باجراء العملية المحددة الآتية ، ونفرض ،

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dr = \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) dr$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) = - \frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad \text{الآن}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dr &= \lim_{a \rightarrow 0} \iiint \left\{ - \frac{3a^2 r^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right\} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-12\pi \int_0^\infty \frac{a^2 r^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} dr \right] \end{aligned}$$

Put $r = ap$

$$\begin{aligned} \therefore \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dr &= \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dr \\ &= -12\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(p^2 + 1)^{5/2}} = -4\pi \quad (3.160) \end{aligned}$$

Hence,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-4\pi) = -\rho/\epsilon_0$$

لذلك فان التعبير (3-157) الخاص بالجهد العددي يتوافق مع معادلة بواسون. ويمكن صياغة النتيجةين (3-159) و (3-160) بعبارة واحدة.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r) \quad (3.161)$$

أو بصورة ام ،

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) = -4\pi\delta(r-r') \quad (3.162)$$

وبمقارنتها مع المعادلة (3-151) نستنتج ان المقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}$ هو دالة كرين للعامل ∇^2 وهو مساوي للجهد الناتج من وحدة شحنة نقطية، وعلى كل حال هذه هي احدى دوال كرين للعامل ∇^2 ، والصفة العامة لدالة كرين هي :

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} + F(r, r') \quad (3.163)$$

تمثل F هنا دالة توافقية (harmonic function) وهكذا فانها تتوافق مع معادلة لابلاس.

$$\nabla^2 F(r, r') = 0. \quad (3.164)$$

ويمكن تصور $F(r, r')$ على انه الجهد الناتج من منظومة من الشحنات خارج الحجم الذي نحن بصدد دراسته.

نحن نعرف ان حل معادلة بواسون يجب ان يتوافق مع شروط حدودية معينة : شرط ديرخليت (Dirichlet condition) هو ان Φ محده او شرط نيومان (Neumann condition) الذي ينص على ان $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ هو المحدد. ولمعرفة كيفية التعامل مع الشروط الحدودية ، سنحول معادلة بواسون الى صيغة تكامل متخذين مبرهنة كرين ، ونعني :

$$\int_V [\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi] d\tau = \int_S \left[\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] dS \quad (3.165)$$

حيث ψ و Φ تمثلان دالتين احتمائيتين عدديتين يمكن تحويل معادلة بواسون الى معادلة تكاملية اذا جعلنا $\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}$ في (3-165) وان يكون Φ جهداً عددياً يتوافق ومعادلة بواسون.

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (3.166)$$

بهذه التعويضات يمكن كتابة المعادلة (3-165) على النحو الآتي :

$$\begin{aligned} & \int_V \left[-\Phi \frac{\partial(r-r')}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0^2|r-r'|} \right] dr \\ &= \int_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} \right] dS \end{aligned} \quad (3.167)$$

حيث استخدمنا المعادلة (3-162) اذا كانت r ضمن الحجم V ، فان تكامل الحد الاول من الطرف الايسر يساوي $-\frac{\Phi(r)}{\epsilon_0}$ ، ويتبع ذلك من ثم :

$$\Phi(r) = \int_V \frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} dr + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{|r-r'|} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \right\} dS' \quad (3.168)$$

لاحظ ان هنا ليس حلاً لمعادلة بواسون وانما ببساطة هو الصيغة التكاملية لها. ويمكن ايجاد تصميم لها بسهولة اذا اخذنا كما في السابق Φ على انها الجهد و $\psi = G(r, r')$ هي دالة كرين ، وسوف نحصل بصيغ $G(r, r')$ على مايلي :

$$\frac{\Phi(r)}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho G(r, r')}{\epsilon_0} dr + \int_S \left[G(r, r') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} \right] dS' \quad (3.169)$$

Here $G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} + F(r, r')$

لاجل التخلص من واحد او الآخر من التكاملات السطحية في (3-169) سنختار $F(r, r')$ بحيث تتوافق او تحقق شرط ديرخليت او نيومان ، وهكذا لتحقيق شرط ديرخليت الحدودي.

$$G_D(r, r') = 0 \text{ for } r' \text{ on } S \quad (3.170)$$

$$\Phi(r) = \int_V \rho G(r, r') d\tau - \epsilon_0 \int_S \Phi \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS' \quad (3.171)$$

ولتحقيق شرط نيومان يجب تحديد $\frac{\partial G_N}{\partial n}$ على السطح.

$$\nabla^2 G(r, r') = - \frac{\delta(r - r')}{\epsilon_0} \quad \text{بما ان}$$

$$\int_V \nabla^2 G(r, r') d\tau = - \int \frac{\delta(r - r')}{\epsilon_0} d\tau = - \frac{1}{\epsilon_0}.$$

وباستخدام مبرهنة التباعد :

$$\int_S \frac{\partial G}{\partial n'} dS' = - \frac{1}{\epsilon_0} \quad (3.172)$$

لذلك فان ابط شرط لنيومان على G_N هو :

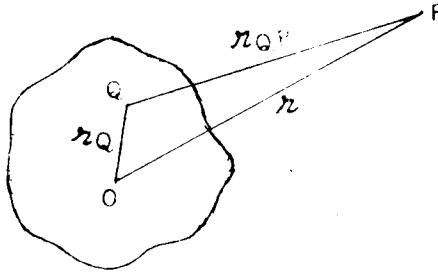
$$\frac{\partial G_N(r, r')}{\partial n'} = - \frac{1}{\epsilon_0 S} \text{ for } r' \text{ on } S \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \int_V \rho(r') G(r, r') d\tau + \int_S G(r, r') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' + \frac{\Phi_s}{\epsilon_0 S} \\ &= \int_V \rho(r') G(r, r') d\tau + \int_S G(r, r') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' + \frac{\langle \Phi \rangle_s}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.174)$$

حيث $\langle \Phi \rangle_s$ تمثل متوسط قبة الجهد حول السطح S واذا كان السطح لانهاياً فان $\langle \Phi \rangle_s = 0$

3-10 التمدد متعدد الاقطاب (The Multipole Expansion)

سنبين في هذا الجزء كيف يمكن التعبير عن الجهد الناتج من التوزيع الساكن للشحنات على انه مجموع الاضافات الناتجة من اقطاب مختلفة التعمديه ، أي ، أحادي القطب (monopoles) ، ثنائي القطب (dipoles) ، رباعي القطب (quadrupoles) .. الخ -
نفرض أن كثافة توزيع معين للشحنة في الحجم V هي ρ_e (الشكل (8 - 3)).



الشكل (8 - 3)

الجهد الناتج من هذه الشحنة في نقطة P هو :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e d\tau}{r_{QP}} \quad (3.175)$$

حيث $d\tau$ يمثل عنصر حجم في Q ، وتمطينا r_Q و r المسافة بين P والنقطتين Q و O (نقطه الاصل) اذا كانت P بعيده أي $r \gg r_Q$ يمكننا الحصول على أقل تقريب صفرى الترتيب (lowest - zero order - approximaton) بالغاء تجميع حول نقطة الاصل وهذا ممكن بفرض $r_Q = 0$ لكل نقطة Q ، و :

$$r_{QP} = r \quad (3.176) \quad \text{كنتيجة لدينا :}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_e d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho_e d\tau = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.177)$$

حيث $Q = \int \rho d\tau$ تمثل الشحنة الكلية التي يحتوي عليها التوزيع ، وبالتالي فان الجهد في نقطة P عبارة عن جهد ناتج من شحنة نقطية Q في نقطة الاصل ، وللحصول على تقريب افضل للتصرف في (3-175) عند النقطة p يجب الحصول على تقريب اقرب للمقدار $\frac{1}{r_{QP}}$ لذي

$$r_{QP} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (3.178)$$

حيث x_0, y_0, z_0, x, y, z تمثل الاحداثيات الديكارتية (Cartesian coordinate) للنقطتين Q,P على التوالي، وبالتعبير عن $\frac{1}{r_{QP}}$ كسلسلة ماكلورين (Maclaurin series) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{QP}} &= \left(\frac{1}{r_{QP}} \right)_0 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) x_0 + \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) y_0 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) z_0 \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \frac{1}{r_{QP}} \right) x_0^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \frac{1}{r_{QP}} \right) y_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \frac{1}{r_{QP}} \right) z_0^2 \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) x_0 y_0 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial z_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) x_0 z_0 \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z_0} \frac{1}{r_{QP}} \right) y_0 z_0 \right] + \dots \quad (3.179) \end{aligned}$$

ويشير الرمز السفلي الدليلي 0 الى ان الكميات داخل الاقواس احتسبت في نقطة الاصل من الصعوبة احتساب معاملات التدد (expansion coefficients) المختلفة لهذه السلسلة التي تظهر في الاقواس، وعلى كل حال فان الحدود ذات الترتيب الادنى (Low order terms) هي التي تميزنا وهذه يسهل التعامل معها، وهكذا فان الحد الاول هو :

$$\left(\frac{1}{r_{QP}} \right)_0 = \frac{1}{r} \quad (3.180)$$

5. تظهر من (179 - 3) ، ويتفحص المعادلة (178 - 13) نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_Q} \frac{1}{r_{QP}} &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{QP}} \right)_O = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_Q \partial y_Q} \frac{1}{r_{QP}} \right)_O &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r_{QP}} \right)_O = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r_{QP}} &= \frac{1}{r} - \left(x_Q \frac{\partial}{\partial x} + y_Q \frac{\partial}{\partial y} + z_Q \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(x_Q \frac{\partial}{\partial x} + y_Q \frac{\partial}{\partial y} + z_Q \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{r} + \dots \\ &= \frac{1}{r} - (r_Q \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (r_Q \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e d\tau}{r_{QP}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{r} - (r_Q \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (r_Q \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots \right] \rho_e d\tau \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.182)$$

حيث ان كل حد في هذه السلسلة يأتي من الحد المناظر له في السلسلة $\frac{1}{r_{QP}}$. والحد الاول يعطي الجهد في نقطة P الناتج من شحنة Q التي تساوي $\int \rho_e d\tau$ في نقطة الأصل ، ويمكن تسميته جهد احادي القطب (monopole potential) والحد الثاني هو

$$\begin{aligned} V_1 &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int (r_Q \cdot \nabla) \frac{1}{r} \rho_e d\tau \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int r_Q \rho_e d\tau = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot p \\ &\quad (\because p = \int r_Q \rho_e d\tau) \\ &= \frac{p \cdot r}{4\pi\epsilon_0 |r|^3} \end{aligned} \quad (3.183)$$

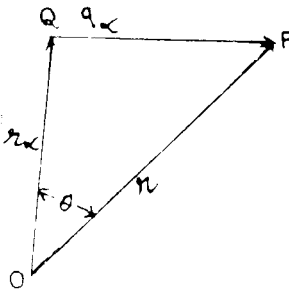
وهذا هو جهد ثنائي القطب (انظر 61-1) ويمكن بنفس الطريقة اثبات ان الحد التالي V_2 يناظر جهد رباعي القطب.

من المناسب في هذه المرحلة تنبيه القاريء الي ان التدد في احداثيات ديكرتية يصبح كثير التعقيد ولاسيما في الحدود العليا (higher terms) ويكون من الملائم تحت هذه الظروف تمديد الجهد باستخدام التوافق الكروي (spherical harmonics) وسنوضح هذه الطريقة بدراسة مثال بسيط.

لنفرض اننا مهتمون الآن بالجهد في نقطة P والناتج من شحنة q في نقطة Q (الشكل 9-3) ونفرض ان الشحنة q_a ونقطة P ونقطة الاصل تقع كلها في المستوى $\phi = 0$ عليه يكون الجهد في نقطة P نتيجة q_a هو :

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0|r-r_a|} = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0(r^2-2r\cdot r_a+r_a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0(r^2-2rr_a\cos\theta+r_a^2)^{1/2}} = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}(r^2-2rr_a\cos\theta+r_a^2)^{-1/2} \\ &= \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(1-\frac{2r_a\cos\theta}{r}+\frac{r_a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.184)$$

حيث r , r_a تمثلان مسافة النقطتين P, Q عن نقطة الاصل، و θ تمثل الزاوية بينهما. ونحن نعرف ان $\left(1-\frac{2r_a\cos\theta}{r}+\frac{r_a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$ هو الدالة المولدة (generating function) لمتعددة الحدود ليكندر (Legendre polynomials) اي :



الشكل (9 - 3)

$$\left(1 - \frac{2r_a \cos \theta}{r} + \frac{r_a^2}{r^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{r_a}{r} P_1(\cos \theta) + \frac{r_a^2}{r^2} P_2(\cos \theta) + \dots$$

$$\therefore V_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_a r_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{q_a r_a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} P_2(\cos \theta) + \dots \quad (3.185)$$

$$\text{Hence, } V = \sum V_a = \sum \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r} + \sum \frac{q_a r_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} P_1(\cos \theta) + \dots \quad (3.186)$$

ويمكن التحقق من ان الحد الاول يعطي الاضافة الناتجة من احادي القطب والحد الثاني من ثنائي القطب وهكذا الى اخره.

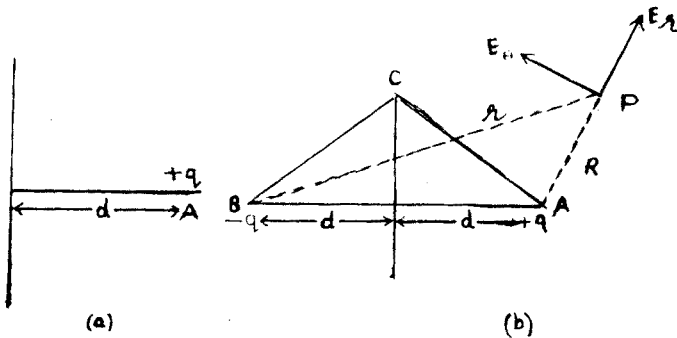
3-11 طريقة صور الكهربائية المستقرة (Method of Electrostatic Images)

سنناقش الآن طريقة عامة لحل مسائل الكهربائية المستقرة دون التحدد بمحل معادلة تفاضلية ، وهذه الطريقة يمكن تطبيقها بصورة مثمرة على بعض الامثلة النوعية. وسنوضح هذه الطريقة بمثال بسيط.

(i) شحنة نقطية ومستوى موصل لانهائي.

(Point charge and an infinite conducting plane)

افرض ان شحنة نقطية موضوعة في نقطة تبعد مسافة عمودية مقدارها d عن لوح موصل لانهائي الامتداد (الشكل 3-10 A).



الشكل (3-10)

بما ان اللوح موصل فان الشحنة q ستحت شحنات على اللوح. وجهدها ثابت على كل النقاط في اللوح ، ولنفرض ان هذا الجهد هو صفر. وهذا يعني ان الشحنة المحتثة ستولد جهداً مساوياً ومعاكساً لجهد الشحنة الحائة. ونعرف ان المجال في الطرف الثاني (الايسر) للوح هو صفر ونريد ان نعرف الجهد والمجال في نقطة ما في الطرف الايمن للوح وكذلك سنهتم بتوزيع الشحنة المحتثة على اللوح الموصل.

ولناخذ مسألة اخرى ، نفرض ان شحنة q وضعت خلف مستوى اللوح وتبعد عنه مسافة d بالضبط. شكل (3-10B) والجهد في اي نقطة من المستوى في نقطة C هو صفر $\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0\right)$ وهذا يعني اذا ماتم رفع اللوح الموصل ووضعت الشحنة -q في النقطة B. فان كل نقطة من المستوى كانت مشغولة سابقاً باللوح الموصل يبقى جهدها صفراً. وهكذا فان ادخال الشحنة q في B ورفع اللوح لا يؤثر ان على الفيض في الطرف الايمن المستوي وبقيت شروط المسألة الاصلية بدون تغير باذخال هذا التدبير. في الحقيقة ان ادخال الشحنة q لا يفسر الوضع مقارنة مع الوضع الواقعي (لأن المجال لم يعد صفراً في الطرف الايسر للمستوي) وعلى كل حال سوف لانغير لهذه الحقيقة اهمية تذكر مازلنا مهتمين بالجانب الايمن للمستوي ، اذن بما ان شروط المسألة بقيت دون تغير بوضع الشحنة q في B. وحسب مبدأ التوحد فان جهد الشحنة +q في A والشحنة -q في B مطابق للجهد الناتج من الشحنة +q في A والشحنة المحتثة على اللوح . وهكذا يمكن حل المسألة ب افتراض الشحنة -q في B. ومن التشابه المرئي تسمى الشحنة q صورة (image) الشحنة +q في A من الضروري الادراك ان الشحنة q ليس لها وجود حقيقي ولكنها صورة مؤثرة (او صورة ذات تأثير فعال) فقط.

الجهد في نقطة P (الشكل 3-10 B) والناتج من الشحنة q والشحنة المحتثة على الموصل هو:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + 4d^2 + 4Rd \cos \theta}} \quad (3.187)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين BA و AP ، وتمثل R المسافة بين P والشحنة. اما مركبات المجال فهي :

$$E_R = -\frac{\partial V_P}{\partial R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{q(R+2d \cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 (R^2+4d^2+4Rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.188)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_P}{\partial \theta} = \frac{2qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 (R^2+4d^2+4Rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.189)$$

لاجل احتساب كثافة الشحنة السطحية في نقطة ما على اللوح الموصل يجب اولاً احتساب المجال العمودي على اللوح E في نقطة C.

$$P = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{R^2} - \frac{R \cos \theta + 2d}{(R^2+4d^2+4Rd \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$\therefore E \text{ at } C = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{R^3} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

قانون كاوس

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \sigma = \frac{qd}{2\pi R^3} \quad (3.190)$$

وتتناسب الكثافة السطحية عكسياً مع مكعب المسافة بين الشحنة +q وموقع النقطة على اللوح.

القوة التي تسطها الشحنة المحته في اللوح على الشحنة +q هي نفسها التي تسطها صورتها عليها :

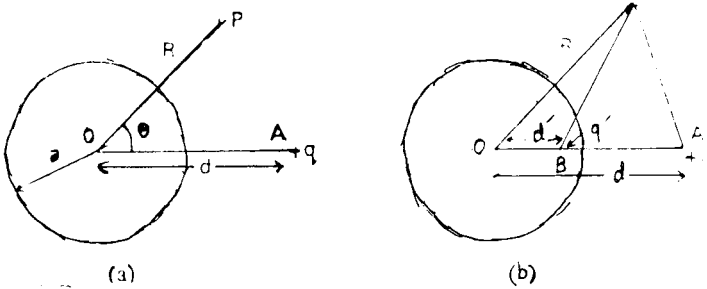
$$F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \quad (3.191)$$

والعلاقة السالبة توضح ان الشحنة تنجذب نحو اللوح. وهكذا نستنتج ان مسألة توزيع الشحنة على السطح والجهد والمجال الناتج من المنظومة يمكن حلها بواسطة ادخال صورة او مجموعة صور موضوعة بشكل مناسب خارج الحيز موضوع البحث وتجاهل سطح التكهرب الواقعي او بعبارة اخرى استبدال الشروط الحدودية بالصور والانجاذ هذه الطريقة يجب ان نحمي توزيع بوري مكافئ بسيط اي التوزيع الذي يبقى السطح فيه سطحاً متساوي الجهد مع الجهد المطلوب.

لتطبيق هذه الطريقة على بعض الحالات البسيطة .

(ii) شحنة نقطية بجوار كرة مؤرضة (A point charge in the vicinity of a ground sphere)

نفرض ان كرة موصلة نصف قطرها "a" تبقى في الجهد الصفري (Zero potential) والشحنة q في نقطة A التي تبعد مسافة d عن مركز الكرة (d > a) ، شكل (3-11A).
 نفرض ان مركز الكرة يتطابق ونقطة الاصل بما ان q تقع خارج الكرة واهتمامنا ينصب على الحيز خارج الكرة ايضاً لذا يجب ان تكون الصورة داخل الكرة. وبالتالي يجب ان تقع على الخط الواصل بين A ومركز الكرة لذلك يمكن استبدال وضعية السؤال بالوضعية المكافئة لها (شكل 3-11B) مع الشروط الحدودية.



الشكل (3-11)

$$V(R, \theta) \Big|_{R=a} = 0 \tag{3.192}$$

ليكن موقع الشحنة الصورة في نقطة B ، OB = d' ، الجهد في نقطة P هو:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |R - d|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |R - d'|} \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |R\hat{e}_R - d\hat{e}_d|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |R\hat{e}_R - d'\hat{e}_d|} \tag{3.193}$$

حيث \hat{e}_d, \hat{e}_R يمثلان متجهات وحدة باتجاه OA, OP على التوالي :

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R |\hat{e}_R - \frac{d}{R}\hat{e}_d|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d' |\hat{e}_d - \frac{R}{d'}\hat{e}_R|} \quad (3.194)$$

على سطح الكرة $R=a$

$$V_P|_{|R|=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a |\hat{e}_R - \frac{d}{a}\hat{e}_d|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d' |\hat{e}_d - \frac{a}{d'}\hat{e}_R|} = 0$$

وهذا يتحقق اذا :

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{d'} \text{ and } \frac{d}{a} = \frac{a}{d'} \text{ i.e. } d' = \frac{a^2}{d}$$

$$q' = -\frac{qd'}{a} = -\frac{qa}{d} \quad (3.195)$$

النقاط B,A تقاط معكوسة (inverse points) بالنسبة للكرة وبالتناوب عندما تكون

: فان $|RI|=a$

$$\begin{aligned} |R-d|_{|R|=a}^{-1} &= \left(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta \right)_{|R|=a}^{-1/2} \\ &= (a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{-1/2} \\ &= d^{-1} (1 - 2h \cos \theta + h^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.196)$$

and

$$\left| R-d' \right|_{|R|=a}^{-1} = a^{-1} (1 - 2h' \cos \theta + h'^2)^{-1/2} \quad (3.197)$$

حيث :

where $h = \frac{d}{a}$ and $h' = \frac{d'}{a}$

Now $(1 - 2hx - h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$

where $|h| < 1$ and $|x| \leq 1$

$$\therefore \left| R-d \right|_{|R|=a}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n d^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (3.198)$$

$$\text{and } \left| \mathbf{R} - \mathbf{d}' \right|_{R=a}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d'^n a^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (3.199)$$

Hence,

$$V(a, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} (q a^n d^{-(n+1)} + q' d'^n a^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) = 0 \quad (3.200)$$

بما ان متعددة الحدود ليكندر مستقلة خطياً ، فان معامل كل متعددة الحدود ليكندر يزول في اثناء التمدد وهكذا عندما $n=0$ ، فان :

$$q d^{-1} + q' a^{-1} = 0 \text{ or } q' = - \left(\frac{a}{d} \right) q \quad (3.195a)$$

and for $n = 1$

$$q a d^{-2} + q' d' a^{-2} = 0$$

i.e.

$$q a d^{-2} - \left(\frac{a}{d} \right) q d' a^{-2} = 0$$

or

$$d' = a^2/d \quad (3.195b)$$

وعندما تكون $n > 1$ فان الشرطين (3-195 A) و (3-195B) يخفضان كل العوامل الناجحة الى الصفر.

وبتعويض قيم q' و d' في المعادلة (3-194) يتحول التعبير المطلوب الى الجهد. لاحظ انه كلما قربت الشحنة q من السطح اكثر فاكتر كبرت الشحنة q اكثر فاكتر ايضاً وتتحرك مبتعدة عن المركز. ويمكن ايجاد كثافة الشحنة على السطح من العلاقة :

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ويمكن بالتكامل المباشر اثبات ان كمية الشحنة المحتثة الكلية على الكرة يساوي في المقدار للشحنة الصورية.

(iii) إذا شحنت الكرة وعزلت ووضع بجوارها شحنة q

(The sphere is charged and insulated
a charge q is placed in its vicinity)

افرض الآن ان الكرة عزلت وتم شحنها بالشحنة Q . والشحنة q تبعد مسافة d عن المركز. والجهد الناتج من هذه المنظومة في نقطة ما يمكن ايجاده بطريقة التراكب الخطي (linear superposition). سنفرض اولاً أن الكرة تم تأريضها لذلك سيكون جهدها صفرأً والشحنة المحتثة q' المساوية لقيمة صورة الشحنة q متوزعة فيها. وسنعزل الكرة الآن بقطع اتصالها بالأرض، ونعطيها شحنة اضافية $(Q-q')$ والآن الشحنة الكلية في الكرة هي Q . وبما ان القوى الناتجة من الشحنة النقطية q متوازنة بوجود الشحنة q فان توزيع الشحنة المضافة $(Q-q')$ يصبح منتظماً على سطح الكرة. والجهد في نقطة ما خارج الكرة الآن هو مجموع جهود الشحنات q ، q' ، والشحنة المضافة $(Q-q')$ ، والاضافة على الجهد، الناتجة من الشحنة المضافة $(Q-q')$ هي نفسها لو كانت شحنة نقطية قيمتها $(Q-q')$ وهكذا.

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |R-d|} - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 d |R - \frac{a^2}{d} \hat{e}_d|} + \frac{Q + \frac{qa}{d}}{4\pi\epsilon_0 |R|} \quad (3.201)$$

(iv) الكرة مداومة عند جهد ثابت (The sphere is maintained at a fixed potential)

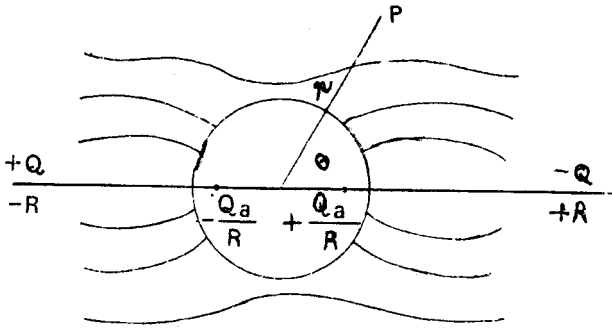
بما انه تم ابقاء الجهد في الكرة بقيمة V . فسيكون مقدار الشحنة التي تحملها V_a (حيث a هي سعة الكرة).

$$\therefore V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |R-d|} - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 d |R - \frac{a^2}{d} \hat{e}_d|} + \frac{V_a}{4\pi\epsilon_0 |R|} \quad (3.202)$$

(V) كرة موصلة في مجال كهربائي منتظم
 . (Conducting sphere in a uniform electric field)

لقد حللنا هذه المسألة مسبقاً (مثال 3-5) باستخدام التوافق الكروي. وسنبين الآن كيفية حلها بطريقة الصور.

كرة مؤرضة موصلة نصف قطرها (a) موضوعة في مجال كهربائي منتظم E_0 ومركزها في نقطة الاصل. ان المجال الملاصق للكرة سيتشوه نتيجة الشحنة المحتثة على السطح (الشكل 3-12)



الشكل (3 - 12)

يمكن اعتبار المجال المنتظم على انه ناتج من شحنتين ملامتتين احدهما موجبة والاخرى سالبة موجودتين في اللانهاية وافرض على سبيل المثال ان الشحنة Q - موجودة في النقطة $Z = +R$ والشحنة $+Q$ في النقطة $Z = -R$ ، والمجال الناتج في نقطة قرب الاصل هو تقريباً $\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ بالاتجاه الموازي لمحور Z . وفي الغاية عندما $\rho \rightarrow \infty$ مع الابقاء على النسبة $\frac{\rho}{R^2}$ ثابتة ، يكون الجهد منتظماً ومساوياً للمقدار $E_0 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. الجهد في نقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل والناتج من المنظومة التي تحتوي على الشحنتان $\pm Q$ في $Z = \pm R$ والشحنة المحتثة على الكرة هونفس الجهد الناتج من الشحنتان $+Q$ في $-R$ و $-Q$ في $+R$ والشحنة الصورية $\frac{Qa}{R}$ في $-\frac{a^2}{R}$ و $-\frac{Qa}{R}$ في $+\frac{a^2}{R}$.

$$\therefore V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}}$$

لأن $r \ll R$ ، فإن الحدين الأولين يعطيان الجهد $\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} r \cos \theta$ - بالتدد

والغاء الحدود العليا). ويمكن اعتبار الشحنتين الصورية $\frac{Qa}{R}$ و $-\frac{Qa}{R}$ كنائبي قطب سافة الفاصلة بينهما هي $\frac{2a^2}{R}$ وهكذا فإن مقدار الجهد الاضافي الناتج منها في نقطة P هو $\frac{2Qa^3}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta$.

$$\begin{aligned} \therefore V_P &= -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} r \cos \theta + \frac{(2Qa^3/R^2) \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.203) \end{aligned}$$

وكثافة الشحنة المحثة تساوي :

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3.204)$$

3-12 الصور في العوازل (Images in Dielectrics) :

يمكن تطبيق طريقة الصور لاييجاد فرق الجهد الناتج من شحنة نقطية قرب سطح عازل. وسنوضح كيفية ذلك بدراسة مثالين نموذجيين.

(i) ايجاد المجال الناتج من شحنة نقطية q تبعد عمودياً مسافة d من عازل شبه لانهائي

محدد بسطح مستوي (الشكل 3-13)

(The field produced by a point charge "q" placed at a perpendicular distance 'd' from a semi - infinite dielectric bounded by a plane surface (Fig.3-31).

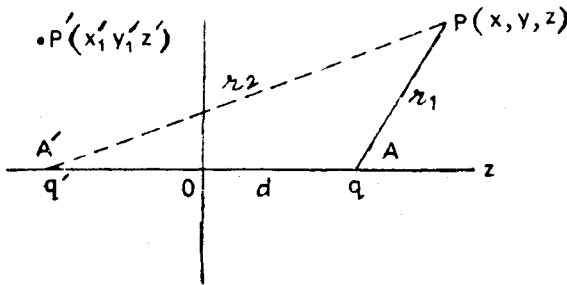
ليكن السطح متطابقاً مع المستوي الذي فيه $Z=0$. ولتكن O نقطة الأصل، وA نقطة على المحور Z تقع فيها الشحنة q، ان مجال هذه الشحنة النقطية سيستقطب العازل الذي

بدوره سيؤثر على المجال في الفراغ على الطرف الايمن. وستقرض ان المجال المتولد من شحنة الاستقطاب في نقطة ما من الطرف الايمن يساوي لذلك المتولد من الشحنة q التي هي صورة الشحنة q في النقطة A. والسؤال الذي يجب ان نجيب عنه الآن هو ما قيمة q التي تتوافق وفرضيتنا؟

الجهد في نقطة P في الفراغ هو :

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

أو بموجب الاحداثيات الديكارتية، الجهد في نقطة P(x,y,z)



الشكل (3 - 13)

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\{x^2 + y^2 + (z - d)^2\}^{1/2}} + \frac{q'}{\{x^2 + y^2 + (z + d)^2\}^{1/2}} \right] \quad (3.205)$$

والآن ماهو الجهد في نقطة P' في الوسط العازل نتيجة الشحنة q'؟ بالتأكيد ليس نفسه الذي يتولد من الشحنة النقطية q' في النقطة P' لو كانت في الفراغ. سنفرض ان هذا الجهد هو نفسه المتولد من الشحنة q' في النقطة A لو كان الفضاء فراغاً، والعازل ليس موجوداً. هذا الجهد في النقطة P'(x', y', z') هو :

$$V_{P'} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 \{x'^2 + y'^2 + (z' - d)^2\}^{1/2}} \quad (3.206)$$

الجهد في الفراغ عندما تكون النقطة p في المستوى Z=0 هو :

$$V_P \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q + q'}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \right\} \quad (3.207)$$

وذلك في P' عندما يكون في نفس النقطة لكن في العازل هو

$$V_{P'} \Big|_{z=0} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + y'^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3.208)$$

وعلى الحدود $V_P = V_{P'}$ التي تحقق تلقائياً الشرط الحدودي الاول الذي ينص على ان المركبات المماسية لـ E يجب ان تكون نفسها على جانبي الحدود ، وهذا الشرط يعطينا :

$$q + q' = q'' \quad (3.209)$$

والشرط الحدودي الثاني اسدي ينص على ان المركبات العمودية لـ P يجب ان تكون مستمرة خلال الحدود اي

$$\frac{\partial V_P}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial V_{P'}}{\partial z} \quad \text{at } z = 0 \quad (3.210)$$

حيث ϵ تمثل ساحة العازل.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_P}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[- \frac{q(z-d)}{\{x^2 + y^2 + (z-d)^2\}^{3/2}} - \frac{q'(z+d)}{\{x^2 + y^2 + (z+d)^2\}^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d(q-q')}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (3.211)$$

وبنفس الطريقة :

$$\frac{\partial V_{P'}}{\partial z} = \frac{q'' d}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + y'^2 + d^2)^{3/2}} \quad \text{at } z' = 0 \quad (3.212)$$

تعطينا المعادلة (3-210)

$$\begin{aligned} \frac{d(q-q')}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} &= \frac{\epsilon q'' d}{(x'^2 + y'^2 + d^2)^{3/2}} \\ q - q' &= \epsilon q'' \end{aligned} \quad (3.213)$$

وبحل المعادلتين (3-209) و(3-213) :

$$q'' = \frac{2q}{\epsilon + 1}; q' = -\frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon + 1} \quad (3.214)$$

وقوة التجاذب بين العازل والشحنة النقطية هي :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} = -\frac{q^2 (\epsilon - 1)}{16\pi\epsilon_0 d^2 (\epsilon + 1)} \quad (3.215)$$

(ii) كرة عازلة في مجال منتظم (Dielectric sphere in a uniform field)

كرة عازلة نصف قطرها "a" وثابت عزلها ϵ_1 موضوعة في مجال عازل منتظم E_0 (uniform dielectric field) موجود في وسط ثابت عزله ϵ_2 ، نظراً لعدم وجود أي شحنات حرة داخل أو خارج السطح يجب ان يتوافق الجهد V (خارج) والجهد V (داخل) الكرة مع معادلة لابلاس ونعني :

$$(i) \quad \nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

وكذلك يجب ان يحقق الجهد الشروط الحدودية ايضاً أي :

(ii) يجب ان تكون $V(r, \theta)$ مستمرة عند $r=a$ لكل θ أي

$$V_1 = V_2 \text{ عند } r=a$$

(iii) المركبات العمودية لـ D يجب ان تكون مستمرة ايضاً عند $r=a$ ولكل θ أي :

on $r = a$ for all θ

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \text{ on } r = a$$

(iv) يجب أن يكون $V(r, \theta)$ ذا قيمة محددة عند $r=0$

$$V_2(r, \theta) = V_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (v)$$

الجهد الذي هو حل معادلة لابلاس يمكن التعبير عنه بصيغة

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (3.216)$$

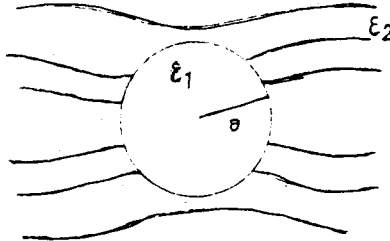
بما ان الجهد في نقطة الاصل يجب ان يكون محدد (الشرط الرابع) لذا يجب ان لا يتواجد اي حد بصيغة $B_l r^{-(l+1)}$ في التعبير عن V_1 لانه يعطي زيادة لانهاية للجهد في $r=0$

$$\therefore V_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (3.217)$$

والجهد في الخارج V_2 يحسب من :

$$V_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (3.218)$$

يمكن ايجاد الثابت من الشروط الحدودية.



الشكل (3-14)

الجهد V_2 في اللانهاية هو:

$$V_2 = C_0 P_0(\cos \theta) + C_1 r P_1(\cos \theta) + C_2 r^2 P_2(\cos \theta) + \dots \quad (3.219)$$

وبموجب الشرط الخامس يجب ان تساوي المعادلة اعلاه المقدار $-E_0 r P_1(\cos \theta)$ كل الحدود في المعادلة (3-219) تزول عدا الحد الثاني اذا كان

$$l=1, \quad C_1 = -E_0 \quad (3.220)$$

ويعطينا الشرط الحدودي الثاني :

$$V_1 = V_2 \text{ on } r = a \text{ for all } \theta$$

$$A_1 a = -E_0 a + \frac{D_1}{a^2} \quad (3.221)$$

والشرط الثالث يعطينا:

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \text{ on } r = a \text{ for all } \theta$$

$$\epsilon_1 A_1 = -\epsilon_2 \left(E_0 + \frac{2D_1}{a^3} \right) \quad (3.222)$$

وحل المعادلتين (3-221) و (3-222) يعطينا :

$$D_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3; A_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \quad (3.223)$$

إذا ،

$$V_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 z \quad (3.224)$$

$$V_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2} \quad (3.225)$$

المجال داخل الكرة هو :

$$E_{int} = -\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \quad (3.226)$$

والجهد ثابت منتظم وموازي للجهد المسلط.

$$\text{If } \epsilon_1 > \epsilon_2, \quad E_{int} < E_0 \quad (3.227)$$

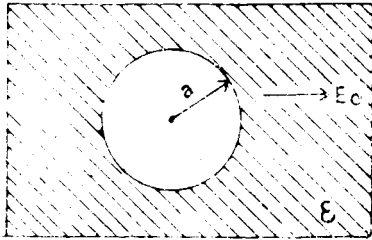
وهذا كما بينا في الفصل السابق ما يحدث لأن شحنات الاستقطاب المحتثة على السطح تزيد من المجال العاكس ويمكن إيجاد المجال في الخارج من (3-225)، وهو يساوي للمجال E_0 زائداً مجال ثنائي قطب عزمه :

$$p = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} a^3 E_0 \quad (3.228)$$

وهكذا تتصرف كرة عازلة في مجال منتظم كأنها ثنائي قطب بسيط

(iii) فجوة كروية في وسط عازل (A spherical cavity in a dielectric medium)

يمكن حل مسألة الفجوة الكروية في وسط عازل ثابت عزله E بنفس اسلوب الحل المتبع في مسألة الكرة العازلة اذا جعلنا $\epsilon_1 = \epsilon$ و $\epsilon_2 = 1$ في المعادلة (3-226) نحصل على



الشكل (3 - 15)

$$E_{in} = \frac{3\epsilon}{1 + 2\epsilon} E_0 \quad (3.229)$$

$$\text{If } \epsilon > 1, \quad E_{in} > E_0$$

المجال في الخارج يساوي المجال المسلط E_0 زائداً المجال الناتج من ثنائي قطب في نقطة الاصل والذي عزمه :

$$p = \frac{1 - \epsilon}{1 + 2\epsilon} a^3 E_0 = - \frac{(\epsilon - 1)}{1 + 2\epsilon} a^3 E_0 \quad (3.230)$$

المعاكس في اتجاهه للمجال المسلط .

تمارين الفصل الثالث

3-1 برهن العلاقة الآتية لمتعددة الحدود ليكندر :

$$P_l(\cos \theta) P_l'(\cos \theta) = \frac{P_{l+1}(\cos \theta) - P_{l-1}(\cos \theta)}{2l+1}$$

3-2 رباعي قطب خطي شحنته $q, -2q, q$ ، ومسافات الفاصلة "a" موضوع في غلاف كروي موصل ومؤرض نصف قطرها "b" بحيث ان الشحنة الوسطية $2q$ تقع في مركزها (نقطة الأصل). جد الجهد داخل وخارج الكرة. برهن في الغاية عند $a \rightarrow 0$:

$$V(r, \theta, \phi) \sim \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{r^6}{b^6}\right) P_2(\cos \theta)$$

حيث Q تساوي qa^2

3-3 نصف كرة نصف قطرها "a" مشحونة بانتظام بشحنة مقدارها Q. على فرض ان مركز قاعدة نصف الكرة هذه يقع عند نقطة الاصل. برهن ان الجهد في نقطة ($r \gg a$) يحسب من المعادلة :

$$V \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{3a}{2r} \cos \theta\right]$$

3-4 كرة مشحونة بكثافة شحنتها السطحية σ في جميع السطح عدا في قطعة كروية قرب القطب محددة بالدائرة ذات $\theta = \theta_0$. جد الجهد داخل وخارج الكرة.

3-5 كرة موصلة مؤرضة نصف قطرها "a" موضوعة في مجال جهدي $E_0 \sin 2\theta$ مركزه في نقط الاصل. جد الجهد في نقطة ما خارج الكرة؟

3-6 غلاف كروي موصل معزول غير مشحون وضع في مجال منتظم E_0 اذا قطع هذا الغلاف الى نصفين بمستوي عمودي على المجال. جد القوة المطلوبة لمنع نصف الكرة من الانفصال.

3-7 اسطوانة دائرية موصلة نصف قطرها "a" وطولها لانهايتي موضوعة في مجال منتظم محورها عمودي على المجال. جد الجهد في نقطة ما خارج الاسطوانة اذا ماتم ابقاء الجهد في الاسطوانة صفراً.

3-8 ثقب او تجويف (hollow) على شكل اسطواناني دائري قائم (right circular cylinder) نصف قطره "a" يتطابق محوره مع المحور Z. ويقع وجهها التجويف السائريين في النقطتين $Z = 0$ و $Z = b$ ، الجهد على السطح الاسطواناني هو $V(\varnothing, Z)$ وجهد الوجهين صفره. جد باستخدام الاحداثيات الاسطوانية سلسلة او مجموعة حلول الجهد في نقطة داخل الاسطوانة.

3-9 جد الجهد في نقطة ما والناتج من شحنة خطية مقدارها q لوحدة الطول موضوعة بصورة موازية لمستوى موصل لانهايتي احتفظ بالجهد فيه صفراً.

3-10 مستو موصل فيه حديه (boss) على شكل نصف كرة نصف قطرها "a" ومركزها على المستوي. تم تأريض المستوي، ووضعت شحنة نقطية q على محور تماثل المنظومة في نقطة تبعد $b > a$ من المستوي. جد الجهد والشحنة المحتثة في الحدية.

3-11 كرة نصف قطرها "a" حوفضت عند الجهد صفر. وهناك ثنائي قطب كهربائي عزمه q يشير بعيداً عن الكرة ويبعد عن مركزها مسافة d. برهن ان الصورة (image) يجب ان تكون ثنائي قطب ذا عزم $\frac{pa^3}{d^3}$ وشحنة $\frac{pa}{d^2}$ وفي النقطة المعاكسة (inverse point).

3-12 فجوة كروية نصف قطرها "a" اقتطعت من قطعة معدنية موصلة احتفظ بالجهد فيها صفراً ووضعت شحنة q على مسافة d من مركز ثقلها (Center of gravity)

$$\text{برهن أن القوة المسلطة عليها هي: } \frac{q^2 ad}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - d^2)^2}$$

3-13 فجوة كروية نصف قطرها "a" اقتطعت من وسط لانهاية ساحتها النسبية ϵ_r .
 برهن ان الجهد في نقطة من الوسط العازل الناتج من ثنائي قطب p' في مركز الفجوة
 هو نفسه الجهد المتولد من ثنائي قطب p' ادخل في عازل مستمر (continuous

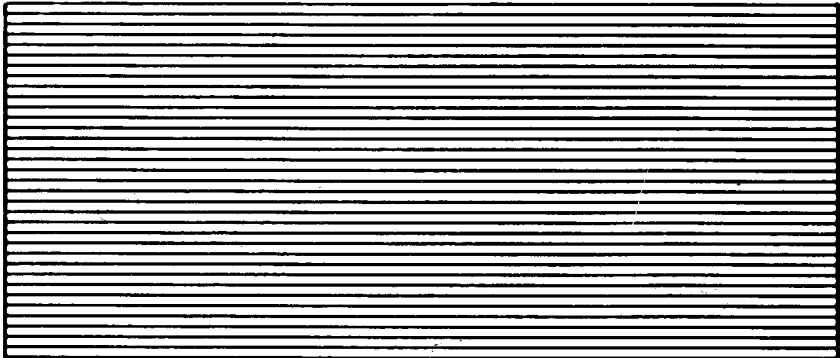
dielectric) حيث :
$$p' = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_0 + 1} p$$

3-14 اسطوانة دائرية لانهاية ساحتها النسبية ϵ_r موضوعة في مجال منتظم E ومحورها
 عمودي عليه. برهن ان المجال داخل الاسطوانة هو $E_0 \frac{2}{\epsilon_0 + 1}$ جد مجال منع
 الاستقطاب (depolarizing field) داخل الاسطوانة.

3-15 اسطوانة عازلة نصف قطرها "a" في مجال ثنائي البعد (two dimentional
 field) على سطحها توزيع من الشحنات المحثة $q \sin n\theta$ جد الجهد في
 أ - داخل الاسطوانة . ب - خارج الاسطوانة .

الفصل الرابع

المغناطيسية المستقرة Magnetostatics



الفصل الرابع

المغناطيسية المستقرة Magnetostatics

تعاملنا فيما مضى مع الشحنات الكهربائية الثابتة منطقياً ان تكون الخطوة التالية هي التعامل مع حركة هذه الشحنات والقوى المحيطة معها وهو ما ستقدمه في هذا الفصل .
ربما سنتفاجيء من العنوان الذي يحمل هذا الفصل «المغناطيسية المستقرة» الا اننا في الحقيقة مازلنا نتقدم بتأني في مملكة الكهربائية. اما كيف تتعلق المغناطيسية في موضوع الكهرباء فهذا ما سنعرفه في الاجزاء القادمة.

4-1 التيار الكهربائي (Electric Current):

لاحظنا في الفصل الثاني كيف ان الالكترونات موصل موضوع في مجال كهربائي تكتسب سرعة معدلها بالاتجاه المعاكس للمجال. وهذا ينتج سيلاً متحركاً من الشحنات ونقول ان هناك تياراً كهربائياً يجري في هذا الموصل. تجدر الاشارة الى ان الموصل الحامل للتيار الكهربائي يكون متعادلاً كهربائياً لان عدد الشحنات السالبة فيه يكون مساوياً لعدد الشحنات الموجبة. ان التيار الكهربائي ليس بالضرورة ناتجاً من حركة الالكترونات ، انما هناك حالة اخرى يتولد فيها التيار نتيجة حركة شحنات اخرى وعلى سبيل المثال في اشباه الموصلات او البلازما، يتولد التيار نتيجة حركة الشحنات الموجبة، ان المعالجة الرياضية التي سنقدمها الآن هي عامة ويمكن تطبيقها على اي شحنة متحركة.

اذا كان عدد الشحنات لوحدة الحجم في نقطة P هو N وكل منها تحمل شحنة مقدارها q وتتحرك بمتوسط سرعة مقدارها u، فان كمية الشحنة المارة عبر وحدة مساحة عمودية على اتجاه متوسط السرعة الجارفة لوحدة الزمن يساوي :

$$j = Nqu$$

$$(4.1)$$

وتسمى J كثافة التيار (Current density) وهي دالة اتجاهية (vector function) للمكان واتجاهها باتجاه حركة الشحنات الموجبة.

إذا كان dS عنصر مساحة في المادة، فإن كمية الشحنة المارة خلاله في وحدة الزمن تساوي $J \cdot \hat{e}_n ds$ حيث \hat{e}_n هي وحدة المتجه عمودية على dS . ويسمى هذا تدفق J عبر المساحة dS . وتسمى الشحنة الصافية المارة خلال السطح لوحدة الزمن بالتيار الكهربائي (electric current) ويرمز لها بالحرف I ، وعليه :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int J \cdot \hat{e}_n dS \quad (4.2)$$

والآن لتكن S سطحاً مغلقاً يحتوي حجماً مقداره V ، إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة هي ρ فإن مقدار الشحنة الكلي في هذا الحجم يساوي $\int \rho d\tau$ بما أن الشحنة الكهربائية لا تفنى ولا تستحدث (أي أن الشحنة محفوظة) فإذا كان هناك أي تسرب للشحنة خارج هذا السطح فإن مقدار الشحنة المتسربة يجب أن يساوي معدل النقص في مقدار الشحنة الكلية داخل هذا الحجم أي :

$$\int J \cdot \hat{e}_n dS = - \frac{d}{dt} \int \rho d\tau \quad (4.3)$$

بما أن السطح مثبت في الفضاء فيكون معدل تغير الشحنة داخل الحجم بطيئاً نتيجة تغير الزمن للكثافة الحجمية ρ .

$$\int_S J \cdot \hat{e}_n dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (4.4)$$

وعند تحويل التكامل السطحي إلى التكامل الحجمي بواسطة مبرهنة التباعد نحصل على

$$\begin{aligned} \int_S J \cdot \hat{e}_n dS &= \int_V \text{div } J d\tau = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \\ \int_V \left(\text{div } J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

هذا التكامل يجب ان يساوي صفراً لأي حجم V نختاره ، لذلك فان التكاملية (integrand) يجب ان تزول اي :

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

وتعرف هذه بأسم معادلة الاستمرارية (equation of continuity) وهي مبينة كما هي مذكورة اعلاه على قانون حفظ الشحنة. في حالة الاستقرار

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (4.7)$$

وتصح هذه المعادلة في المنطقة التي لا يوجد فيها مصدر (Source) او مصب (Sink) للتيار.

4-2 قانون اوم - الموصلية الكهربائية (Ohm's law, Electrical conductivity)

لوحظ تجريبياً ان شدة التيار الكهربائي لعدة مواد تتناسب خطياً مع المجال E المسلط.

$$\mathbf{j} \propto \mathbf{E} \quad \text{or} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.8)$$

حيث ان σ هي كمية ثابتة لكل مادة في درجة حرارة معينة. وتسمى الموصلية الكهربائية (electrical conductivity) للمادة. يحسب التيار المستمر (steady current) I من المعادلة الآتية :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \sigma \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (4.9)$$

إذا كان الموصل مقطع عرضي منتظم A فان :

$$I = \sigma A E \quad (4.10)$$

فاذا كان فرق الجهد بين نهايتي الموصل هو V وطول الموصل هو l فان المجال الكهربائي داخل الموصل سيكون منتظماً وبحسب من المعادلة الآتية :

$$E = \frac{V}{l} \quad (4.11)$$

$$I = \frac{\sigma AV}{l} \text{ and, hence,}$$

$$\frac{V}{l} = \frac{I}{\sigma A} = R \quad \text{لذلك} \quad (4.12)$$

حيث R هي مقاومة (resistance) الموصل وتقاس بالاوم. وتسمى المعادلة (4-12) قانون أوم (Ohm's Law) والمادة التي تخضع لهذا القانون تسمى اومية (Ohmic). وعلى كل حال هناك لحظات معينة يفشل فيها قانون أوم وعلى سبيل المثال نستشهد بسلوك ثنائي قطب محدد بالشحنة الحيزية (Space charge limited dipole) المذكور في الفصل السابق، حيث وضحنا هناك ان الجهد في نقطة معينة في منطقة بين الالكترودات (electrodes) يحسب من المعادلة الآتية :

$$V = \left(\frac{3x m^{1/4}}{2^{5/4} e^{1/4} \epsilon_0^{1/2}} \right)^{4/3} J^{2/3} \quad (\text{see 3.147})$$

وكثافة التيار (Current density) J تساوي :

$$J = \frac{I}{A}$$

$$V = \left(\frac{3x m^{1/4}}{2^{5/4} e^{1/4} \epsilon_0^{1/2}} \right)^{4/3} \frac{I^{2/3}}{A^{2/3}}$$

$$I = \frac{4}{9} \epsilon_0 A \left(\frac{2e}{m} \right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{x^2} \quad (4.13)$$

$$I \propto V^{3/2} \quad \text{أي} \quad (4.14)$$

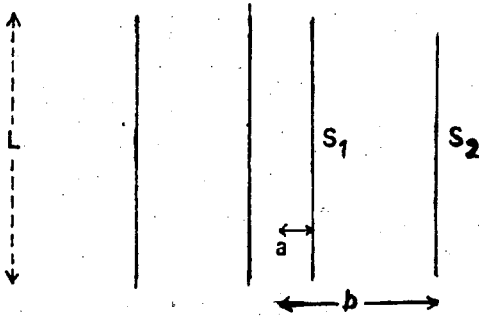
وترى ان هذا لا يتطابق مع قانون أوم. ومثل هذا السلوك اللاأومي (non - Ohmic behaviour) يحدث ايضاً في نقاط اتصال اشباه الموصلات.

4-3 حساب المقاومة (The calculation of resistance):

سنأخذ مثلاً مبسطاً لتبيان طريقة حساب مقاومة موصل ، ونؤكد على أن هذه الحسابات صحيحة في المواد الاومية (Ohmic materials) فقط.

نفرض ان كيبيل محوري (شكل 4-1) من النوع - الذي يستخدم عادة لنقل الفولتية عبر سلكه الداخلي، ليكن نصف قطر السلك الداخلي "a" ونصف قطر الغلاف الموصل الخارجي "b"، وليكن الغلاف الخارجي مؤرضاً (earthed) وجهد السلك الداخلي V. فاذا كان الفراغ بين الموصل مملوءاً بمادة ليست عازلة تماماً فان تياراً سيتسرب عبر المادة من السلك الداخلي الى الغلاف الخارجي ويساوي :

$$I = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.15)$$



الشكل (4.1)

حيث \mathbf{J} هي كثافة التيار و S_1 هو سطح السلك.

$$I = \int_{S_1} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi a L \sigma E(a) \quad (4.16)$$

حيث L هو طول الكيبيل و $E(a)$ قيمة المجال على السطح S_1 الذي هو عمودي على السطح :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

(حيث Φ هو الجهد)

$$\therefore \mathbf{J} = -\sigma \nabla \Phi \quad (4.17)$$

$$\text{div } \mathbf{J} = -\sigma \nabla^2 \Phi \quad \text{لذلك} \quad (4.18)$$

فاذا كان التيار ثابتاً
 $\text{div } \mathbf{J} = 0$ (انظر 4-7)

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.19)$$

ولو تذكرنا فان هذه المعادلة قد مرت علينا في الفصل السابق (معادلة لابلاس). عند دراسة الجهد الكهربائي المستقر وحلها هو :

$$\Phi = A \ln r + C \quad (\text{انظر 3-139})$$

والشروط الحدودية تعطينا قيم الثوابت A و C

$$\text{At } r = a, \quad \text{عندما} \quad V = A \ln a + C$$

$$r = b, \quad \text{وعندما} \quad 0 = A \ln b + C$$

$$A = V / \ln \left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{and } C = -V \ln b / \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\Phi = \frac{V}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} \ln r - \frac{V}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} \ln b \quad (4.20)$$

من المعادلة (4-16)

$$I = 2\pi a L \sigma E(a) = -2\pi a L \sigma \nabla \Phi$$

$$= -2\pi a L \sigma \frac{V}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} \frac{1}{a} = -\frac{2\pi L \sigma V}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right)}{2\pi L \sigma} \quad \text{لذلك} \quad (4.21)$$

نلفت الانتباه هنا الى التشابه الذي يوضحه هذا المثال بين حل مسائل الكهربائية المستقرة ومسائل التيار المستقر، كما مبين اعلاه فان الحالتين مبنيتان على معادلة لابلاس. في السابق كان السطحان المعدنيان يعملان كلوحي متسعة، اما الان فانها الكترودان يدخل ويخرج منها التيار في المادة.

من الجدير بالذكر على الرغم من ان التقنية المستخدمة في المسألة اعلاه لاتظهر اي صعوبات في حساب المقاومة الا ان مثل هذا الحساب لا يكون سهلاً دائماً عندما تكون المادة ذات شكل اعتباطي حتى وان كانت هذه المادة اومية.

4-4 التأثيرات المغناطيسية (Magnetic Effects) :-

اننا الان بوضوح يسمح لنا دراسة العلاقة بين الكهربائية والمغناطيسية ، والذين سبقونا تعاملوا مع الكهربائية والمغناطيسية كموضوعين منفصلين. صحيح ان بالامكان التعبير عن التفاعلات التبادلية للمغناطيسات بقانون التريبع العكسي كالمستخدم في الكهربائية ونعني :

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4.22)$$

حيث m_1, m_2 هما قوة القطبين (pole strength) ولكن هذا لايعني وجود شحنات مغناطيسية حرة كالموجودة في الكهربائية، والاقطاب المغناطيسية في الحقيقة تشابه شحنات الاستقطاب في العوازل وذلك لان اصغر دقيقة مغناطيسية تكون ثنائية القطب وليست وحيدة القطب. لذلك لم تتم محاولة للربط بين الموضوعين.

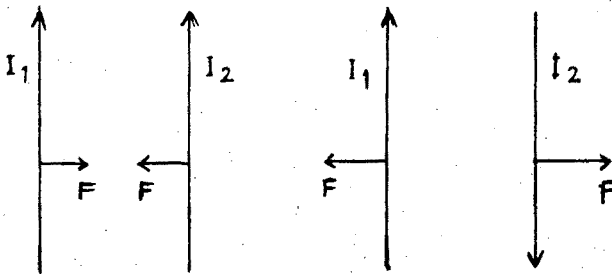
وفي بدايات القرن التاسع عشر وقعت امور جلبت انتباهاً وتطوراً مفاجئاً في هذا الاتجاه. واكتشف اوسترد (Oesterd) ان التيار الكهربائي يسلط قوة على الابرّة المغناطيسية مشابهة للقوة التي يسلطها مغناطيس دائم، وقدم هذا الاكتشاف الى الاكاديمية الفرنسية من قبل اراكو (Arago) في الحادي عشر من ايلول عام 1820 وهذا يوضح ان هناك قوى ليس فقط بين الشحنة واخرى او بين مغناطيس وآخر وانما هناك قوى ايضاً بين الشحنات المتحركة والمغناطيس وهذا هو الذي جمع في البداية موضوعي الكهربائية والمغناطيسية وظهر الي حيز الوجود مايسمى بالكهر ومغناطيسية (electromagnetism). وبعد اسبوع بالتحديد من تأريخ وصول اخبار اكتشاف اوسترد

الى الاكاديمية بين أمبير (Ampère) ان سلكين متوازيين يحملان تياراً يجذب بعضها البعض الاخر. اذا كان التيار بنفس الاتجاه ويتنافران اذا كانت التيارات متعاكسة الاتجاه.

واصل أمبير اجثائه بنفس الحماس الى ان توصل الى تحليل رياضي رائع للموضوع كله وطور المكافئ للمغناطيسيات التي تحمل التيار الكهربائي. ونشر نتائجه في مذكرات. وبعد نصف قرن وصفه ماكسويل (Maxwell) بأنه بنيوتن الكهربائية، (Newton of electricity)، ووصف اعماله بأنها واحدة من اعظم انجازات العلم. وأمبير هو الذي اطلق لقب الكهروديناميك (electrodynamics) على العلم الذي يتعامل مع التأثير المتبادل للتيارات. وعلى فرض ان القوة بين عناصر دائرتين مختلفتين (different circuits) تؤثر على طول الخط الذي يربط بينهما، استطاع أمبير ان يشتق صيغة تعبير عن القوة بين الدائرتين والتي تبين فيما بعد انها خاطئة نتيجة خطأ الافتراض الذي فرضه أمبير اصلاً وهو ان القوة بين العناصر تعمل على الخط الواصل بينهما اما الحالة المشابهة لها في الجزئيات المغناطيسية فنحن نعرف ان القوة لاتتخذ الاتجاه المهادي للخط الواصل بينهما، وكان يمكن صياغة تعبير صحيح لو ازيل هذا الفرض او التقييد.

4-5 المجال المغناطيسي (The magnetic field) :-

اشرنا في الجزء السابق الى ملاحظات أمبير الخاصة بالقوى المتبادلة بين الاسلاك المتوازية التي تحمل تيارات كهربائية وكما هو موضح في الشكل (2-4).



الشكل (2 . 4)

المغناطيس الدائمى يسלט قوة ايضا على الاسلاك الحاملة للتيارات الكهربائية فاذا علق سلك يحمل تيارا كهربائيا بين قطبي مغناطيس فانه يسלט عليه قوة عمودية على اتجاه التيار وبالتيجة فان السلك ينحرف. وعندما يعكس اتجاه التيار في السلك فان اتجاه الانحراف ينعكس ايضا.

لذا فان تأثير سلك يحمل تيارا مستقرا على سلك اخر حامل للتيار هو نفس تأثير المغناطيس عليه. وهذه التأثيرات يمكن ايضاحها بصورة جلية باذخال مصطلح المجال المغناطيسي.

ان التيار المار بأحد الاسلاك (ليكن I_1 مثلا) ينتج مجالا مغناطيسيا يولد قوة تؤثر على الشحنات المتحركة المكونة للتيار I_2 في السلك الاخر. وقد وجد تجريبيا ان القوة السالطة في السلك الذي يحمل تيارا قيمته I_1 على السلك I_2 فان مقدار القوة المؤثرة على شحنات متحركة في مجال مغناطيسي معين يتناسب مع الشحنة ومع سرعتها ايضا. ووجد ايضا انه يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين المتجه u وكثافة الفيض المغناطيسي B (magnetic flux density). (ملاحظة : لقد عرفنا الفيض الكهربائي في الفصل الأول بأنه $E \cdot \hat{n} dS$. وبنفس الطريقة نعرف الفيض المغناطيسي بأنه يساوي $(B \cdot \hat{n} dS)$ وتؤثر بالاتجاه العمودي على هذه المتجهات ، لذلك :

$$F \propto q u \times B \quad \text{i.e.} \quad F = k q u \times B \quad (4.23)$$

وفي نظام كارسيان (Gaussian system) ، ان الثابت K يساوي $1/C$ وفي نظام الوحدات العالمية (S.I) فان الثابت يساوي واحداً. وفي حالة وجود المجال المغناطيسي والمجال الكهربائي معاً فان القوة التي تحدثها شحنة متحركة مقدارها q تساوي :

$$F = qE + q u \times B \quad (4.24)$$

وتسمى هذه القوة باسم قوة لورنتس (Lorentz force) ووجد ان هذا القانون (4-24) ينطبق حق على الجسيمات التي تتحرك بسرعة مقاربة لسرعة الضوء، وهذا يدل على ان الشحنة الموجودة على جسم معين مستقلة عن سرعته. وبمعنى آخر ان الشحنة كالكتلة المستقرة (Rest mass) غير متغيرة نسبياً (relativistically invariant). تم استخدام

المعادلة (24-4) لتعريف الوحدة الى الفيض المغناطيسي والذي يرمز له بالحرف (B) بما ان وحدة E هي فولت / متر، فان الحد $U \times B$ يجب ان يكون له نفس الوحدة لذلك فان وحدة B يجب ان تكون $\frac{\text{فولت} \times \text{ثانية}}{\text{متر}}$ ويعرف الحد (فولت \times ثانية) باسم فيبر (Weber) ولذلك يعبر عن B بالوحدة $\frac{Wb}{m^2}$ ويمكن التعبير عنها ايضاً بالوحدة نيوتن على أمبير على متر وتسمى تيسلا (tesla) ويرمز لها بالحرف T.

4-6 القوة على تيار (Force on a Current) :-

درسنا في الجزء السابق القوة المسلطة على جسم واحد فقط وسندرس الآن ماذا يحدث اذا كان لدينا عدد من الشحنات المتحركة مثل الكترولونات التوصيل في المادة. فاذا كان عدد الالكترولونات لوحدة الحجم هو N ، فان القوة لوحدة الحجم تكون :

$$F = Nqu \times B = j \times B \quad (E=0 \text{ اذا فرضنا ان})$$

والقوة الكلية تساوي

$$F_{tot} = \int_V j \times B \, d\tau = \int_S \int_l (j \times B) (dl \cdot \hat{e}_n \, dS) \quad (4.25)$$

حيث dS هي مساحة المقطع العرضي للموصل و dl هو عنصر من طوله باتجاه التيار. بما ان dl متوازيان فان :

$$F_{tot} = \int_S \int_l (dl \times B) (j \cdot \hat{e}_n \, dS) = \int Idl \times B \quad (4.26)$$

اذا كان السلك حامل التيار على شكل حلقة مغلقة (Closed loop).

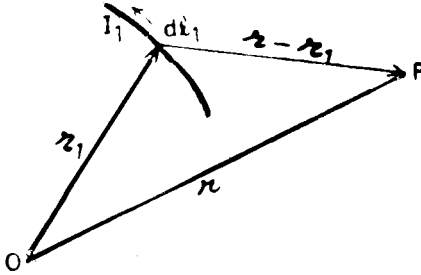
$$F = \oint Idl \times B = I \oint dl \times B \quad (4.27)$$

4-7 قانون بايوت - سافارت (Biot - Savart Law)

بعد شهر من اكتشاف أمبير تمكن بايوت (Biot) وسافارت (Savart) من تحليل التجارب المختلفة وصياغة قوانين مناسبة تربط كثافة الفيض المغناطيسي B والتيار وكذلك قانون القوة بين تيار وآخر.

(ii) لتكن dl_1 عنصر طول من سلك معين ويكون اتجاه العنصر باتجاه التيار I_1 الجاري في هذا السلك (الشكل 3-4).

ان كثافة الدفع المغناطيسي dB الناتج من هذا العنصر في نقطة P المحددة بمتجه الموضع r يعطى مقداراً واتجهاً من المعادلة الآتية :



الشكل (3 . 4)

$$dB = k \frac{I_1 dl_1 \times (r - r_1)}{|r - r_1|^3} \quad (4.28)$$

حيث r_1 هو متجه موضع العنصر dl. وهذا يعني ان كثافة الدفع المغناطيسي تتناسب طردياً مع التيار الجاري في الدائرة، وطول العنصر المأخوذ من السلك، وعكسياً مع مربع المسافة بين النقطة وعنصر الطول (مرة اخرى قانون التربيع العكسي)، ويعتمد الثابت K على المادة ونظام الوحدات المستخدمة في الفضاء الحر اذا كان التيار مقيساً بالوحدة e.s.u. وكثافة الفيض المغناطيسي بالوحدة K.e.m.u تساوي $1/c$ في النظام العالمي (S.I). فتؤخذ وحدات للثابت K مساوية لـ $\frac{\mu_0}{4\pi}$. لضمان توافق القوانين التجريبية مع الوحدات العالمية S.I، والثابت μ_0 يعبر عن نفوذية الفضاء الحر (Permeability of free space) وقيته بالتحديد تساوي

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

$$\therefore dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \times (r - r_1)}{|r - r_1|^3} \quad (4.29)$$

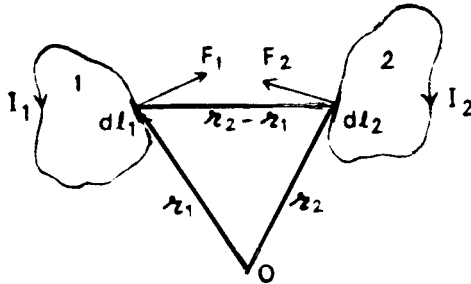
$$B = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int \frac{dl_1 \times (r - r_1)}{|r - r_1|^3} \quad (4.30)$$

والمعادلتين (4-29) و(4-30) هما صيغتي بايوت وسافارت.

(ii) إذا كان هناك دائرتان مغلفتان كما هو موضح في الشكل (4-4) فإن القوة المسلطة على الدائرة الثانية من قبل الأولى هي :

$$F_2 = \oint I_2 dl_2 \times B_1 \quad (4.31)$$

حيث B_2 هو كثافة الفيض المغناطيسي الناتج من الدائرة الأولى في الموقع الموجود فيه الدائرة الثانية ، وعلى فرض أن B_2 ثابتة على كل الحيز الذي تشغله الدائرة.



الشكل (4.4)

$$\begin{aligned} \therefore F_2 &= \oint_2 I_2 dl_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{I_1 dl_1 \times (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 \oint_1 \frac{dl_2 \times [dl_1 \times (r_2 - r_1)]}{|r_2 - r_1|^3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

وبنفس الطريقة تكون القوة المسلطة من قبل الدائرة الثانية على الأولى تساوي :

$$F_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{dl_1 \times [dl_2 \times (r_1 - r_2)]}{|r_1 - r_2|^3} \quad (4.33)$$

يبدو أن المعادلتين (4-32) و(4-33) ستظهر أن وصفاً غير مقبول ، حيث سيعتقد أن القوانين F_2, F_1 متساويتان ومتماكستان في الاتجاه ، على كل حال وبما أن

$$\frac{dl_2 \times [dl_1 \times (r_2 - r_1)]}{|r_2 - r_1|^3} \neq \frac{dl_1 \times [dl_2 \times (r_1 - r_2)]}{|r_1 - r_2|^3}$$

$$F_2 \neq -F_1$$

هل هذا لا يعارض قانون نيوتن ؟ واضح انه يعارض لكن لتوسيع التكامل في المعادلة (4-32).

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{J_1} \int_{J_2} \left[\frac{(dl_1 \cdot (r_2 - r_1)) dl_1}{|r_2 - r_1|^3} - \frac{(dl_1 \cdot dl_2)(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \right]$$

الآن التكامل الاول هو:

$$\int_{J_2} \frac{dl_2 \cdot (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} = - \int \nabla_2 \left(\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right) \cdot dl_2 = 0$$

(هنا ∇^2 تميز فقط عن الحدود التي تتضمن r_2)

$$\therefore F_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{J_1} \int_{J_2} \frac{(dl_1 \cdot dl_2)(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} = - F_1 \quad (4.34)$$

والآن اي الصيغ مقارنة مع الصيغة المستخلصة من المعادلة (4-33) وبنفس طريقة التحويل تتطابق مع قانون نيوتن.

لتتحقق الآن فيما اذا كانت ملاحظات أمبير بخصوص القوى بين الاسلاك المتوازية حاملة التيارات يمكن حسابها استناداً الى اسس قانون بايوت ومسافرت. ان لدينا في الشكل (4-5) سلكين متوازيين تفصل بينهما مسافة مقدارها "d" يسري فيها تياران I_1 و I_2 على التوالي ، اذا فرضنا ان السلك الاول يقع بمحاذاة المحور الاحداثي Z فان السلك الثاني يمر بنقطة (a,0,0) ، لنحسب الآن كثافة المجال المغناطيسي في نقطة p والتي احداثياتها هي (a,0,z) الناتج من التيار I_1 الذي يسري في السلك الاول باستخدام المعادلة (4-29) ، ولتكن المسافة بين P ونقطة الاصل هي r.

نأخذ عنصر طول dl_1 من السلك الاول في نقطة الاصل كما في الشكل. ان مركباته هي (0,0,dz) وتلك التي لـ r هي (a,0,z). لذلك فان مركبات الحد $dl_1 \times r$ هي (0,adz,0) وهذا يعني بوضوح ان المجال المغناطيسي dB في نقطة P والناتج من عنصر الطول dl_1 يكون موازياً للمحور y وكذلك تكون موازية للمحور y ومركباتها B_x تساوي صفراً وكذلك B_z تساوي صفراً.

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|dl_1 \times r|}{|r|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

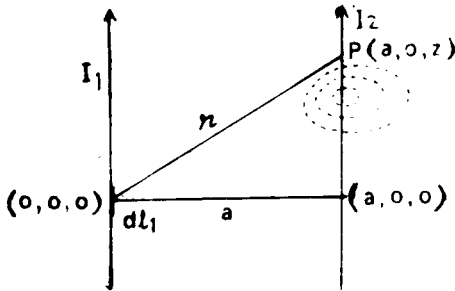
إذا جملنا $z = a \tan \theta$

$$\therefore B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cdot a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^4 \theta} d\theta = \frac{2\mu_0 I_1}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \quad (4.35)$$

نرى أن B تتناسب طردياً مع التيار I_1 وعكسياً مع المسافة هو وبما أن B هي دائماً عمودية على المستوى الذي يحتوي السلك والمتجه نصف قطري r (radius vector) فإن خطوط ثبوت B (أي الخطوط التي تكون فيها B متساوية) تشكل دوائر مغلقة يقع مركزها في السلك وهي في المستوى العمودي على التيار.

ويمكن استخدام النتيجة اعلاه لاجماد القوة dF التي تؤثر على عنصر الطول dl_2 المأخوذ من السلك الثاني نتيجة التيار الذي يسري في السلك الاول وتحسب هذه القوة من المعادلة (4-26)، وبما أن B هي بالاتجاه الموجب للمحور y و dl_2 باتجاه المحور Z فإن القوة المؤثرة على عنصر الطول dl_2 ستكون بالاتجاه السالب للمحور X ومركباتها في هذا الاتجاه تكون :

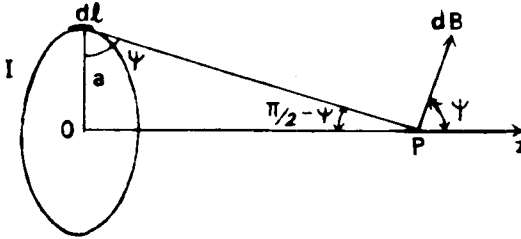
$$dF_x = - \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_2}{2\pi a} \quad (4.36)$$



الشكل (4.5)

وهكذا نرى انه اذا كانت التيارات بنفس الاتجاه ، فان نوع القوة يكون تجاذبياً اما اذا كانت التيارات متعاكسة الاتجاه فتكون القوة تنافرية ومتطابقة مع مشاهدات أمبير.

مثال (4-1) : - باستخدام قانون بايوت وسافارت جد كثافة الفيض المغناطيسي B الناتج من ملف دائري يحمل تياراً مقداره I في نقطة تقع على محور الملف. ليكن نصف قطر الملف هو "a" وليكن محوره متطابقاً مع المحور z كما في الشكل (4-6).



الشكل (4.6)

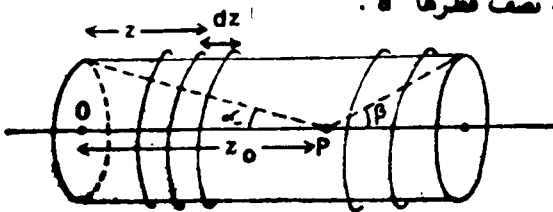
سنحسب أولاً كثافة الفيض المغناطيسي في نقطة P التي تبعد مسافة z عن عنصر الطول dl المأخوذ من الملف. بما ان المجال المغناطيسي dB الناتج من عنصر الطول dl هو عمودي على dl وعمودي على r أيضاً، وعند اجراء التكامل حول الملف فان مجموع مركبات dB العمودية على المحور تكون صفراً بينما المركبات الموازية للمحور تساوي :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \psi$$

حيث ψ هي الزاوية المحصورة بين المجال المغناطيسي dB والمحور.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \cos \psi dl = \frac{\mu_0 I \cos \psi}{4\pi r^2} 2\pi a \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

مثال (4-2) : - جد المجال داخل ملف لولبي (Solenoid) طوله L وعدد لفاته N من اللفات، ملفوفة حول اسطوانة نصف قطرها "a".



الشكل (4.7)

يوضح الشكل (4-7) الملف اللولبي ، لنحسب المجال في نقطة مثل P التي تبعد مسافة z_0 عن النقطة O ، اذا كانت اللفات متقاربة جداً فيمكن اعتبار ان التيار يسري بانتظام حول الاسطوانة اي اذا اعتبرنا ان الطول مقسم الى عنصر طول dz كالذي هو موضح في الشكل والذي يبعد مسافة z عن النقطة O ، ان التيار في هذا الجزء من الملف يساوي $\frac{N}{L} dz$ والمجال الناتج من عنصر الطول في نقطة P هو :

$$dB = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{a^2 dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (4.37) \quad \text{انظر :}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 NI}{L} \int_0^L \frac{a^2 dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 NI}{L} \left[-\frac{z_0 - z}{\sqrt{(z_0 - z)^2 + a^2}} \right]_0^L \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2L} \left[\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} + \frac{L - z_0}{\sqrt{(L - z_0)^2 + a^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2L} [\cos \alpha + \cos \beta] \quad (4.38) \end{aligned}$$

الزاويتان α, β موضحتان في الشكل (4-38) لو اخذنا ملفاً لولبياً

لانهاي الطول فان $\alpha = \beta = 0$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \quad (4.39)$$

ونلاحظ ان B لاتعتمد على موقع النقطة p لذلك يمكن ان نستنتج ان كثافة التدفق المغناطيسي متساوية في اي نقطة داخل الملف اللولبي.

8-4 قوانين المغناطيسية المستقرة (The law's of Magnetostatics)

يمكن التعبير الى كثافة الفيض المغناطيسي المعادلة (4-30) ويمكن التعبير عنه بدلالة كثافة التيار لذلك :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} d\tau$$

$$\therefore |d\mathbf{l}_1| = \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{l}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) d\tau$$

$$\therefore \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \right] d\tau. \quad (4.40)$$

وبأخذ التباعد (divergence)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \right] d\tau.$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C})$$

وباستخدام للتطابقة:

نحصل على :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)) d\tau \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \left\{ \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (4.41)$$

وبما أن ∇ تعمل على r فقط لذلك فإن التكامل الاول يصبح صفراً. الحد الثاني يحتوي على العامل $(\text{Curl grad}) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right)$ يكون صفراً ايضاً. لذلك فإن :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.42)$$

وهذا هو القانون الاول في المغناطيسية المستقرة وهو مطابق للعلاقة $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ في الكهربائية المستقرة والعلاقة توضح ان المجال المغناطيسي لولبي الشكل (Solenoidal) على الضد من المجال الكهربائي الذي هو غير دوراني (irrotational) ، الآن لاتمام التشابه مع الكهربائية المستقرة ستجد قبة $\nabla \times \mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \right] d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\tau \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \times \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\tau \right).$$

وباستخدام المتطابقة : $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
 نحصل على :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\tau \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla^2 \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.44)$$

ونحن نعرف ان
 (انظر (3-162)

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (4.45)$$

وكذلك لدينا العلاقة

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) = -\nabla_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) \quad (4.46)$$

حيث ∇_1 تعمل على \mathbf{r}_1 فقط. وباستخدام (4-45) و (4-46) يمكن كتابة (4-44) على النحو الآتي :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d\tau \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right) d\tau + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \left[\nabla_1 \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{\nabla_1 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right] d\tau + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{: ملاحظة}$$

ويستخدم مبرهنة التباعد يمكن ان تثبت ان الحد الاول سيزول اذا اخذنا السطح خارج الحيز الحامل للتيار كبيراً بما فيه الكفاية. والحد الثاني هو صفر ايضاً لان $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ للحالة المستقرة (Steady State)

$$\therefore \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.47)$$

وهذا هو القانون الثاني للمغناطيسية المستقرة الذي يطابق القانون $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ في الكهربية المستقرة والصفة التكاملية لهذا القانون هي :

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \mu_0 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS.$$

وحسب مبرهنة ستوك (Stoke's theorem) :

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \mu_0 I \quad (4.48)$$

وهذا يعرف بأسم قانون أمبير (Ampere's Law) وهو ان التكامل الخطي لكثافة الفيض حول اي ممر مغلق يساوي التيار الذي يسري في المساحة المتضمنة بهذا الممر مضروباً بـ μ_0 وتقدم الآن جدولاً يُلخص القوانين الخاصة بالمغناطيسية المستقرة والكهربية المستقرة.

الكهربية المستقرة

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

المغناطيسية المستقرة

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

4-9 الجهد المغناطيسي (The magnetic Potential) :

(1) جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه (Magnetic Scalar potential).

في الكهربية المستقرة عرفنا ان حالماً نجد الجهد الكهربائي المستقر V يمكننا حساب المجال الكهربائي المستقر E . فهل هناك جهد مماثل في المغناطيسية المستقرة يمكن فيه حساب المجال المغناطيسي ، بما ان $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ يمكن التعبير عن E على انه تدرج

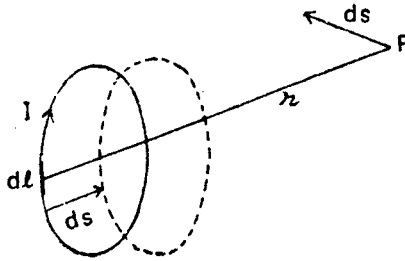
(gradient) كمية غير متجه هي ∇ . وبين الجدول المقدم في الجزء السابق في حالة كون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ تظهر اوضاع مشابهة في المغناطيسية المستقرة ويعني $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ لذلك يمكن التعبير عن \mathbf{B} على انه تدرج كمية غير متجه هي Φ ي :

$$\mathbf{B} = -\nabla \Phi_m \quad (4.49)$$

وتسمى Φ_m جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه (magnetic scalar potential) وبالتعويض عن قيمة \mathbf{B} في العلاقة $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نحصل على :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot \nabla \Phi_m = -\nabla^2 \Phi_m = 0. \quad (4.50)$$

وهكذا نجد ان Φ_m تحقق معادلة لابلاس. وضحنا في الشكل (4-8) دائرة تحمل تياراً مقداره I ، كثافة الدفق المغناطيسي في نقطة مثل P الناتج من هذا التيار تساوي.



الشكل (4.8)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

إذا ازيمت النقطة P بمسافة δs ، فان التغير في الجهد سيكون :

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= -\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{s} = -\delta s \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\delta s \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \end{aligned} \quad (4.51)$$

نلاحظ ان الحد δs قد وضع داخل التكامل لانه ثابت اثناء عملية التكامل.

لنفرض الآن ان النقطة P مثبتة وتم ازاحة الدائرة نفسها بمقدار δs فان التغير في الجهد يجب ان يكون نفسه المذكور اعلاه. في هذه الازاحة مسح عنصر الطول dl مساحة مقدارها $d\Omega = dl \delta s \sin \theta$ ، اذا كانت θ هي الزاوية المحصورة بين dl و δs . ان مقدار المساحة المسوحة يساوي $\delta s \times dl$ - والزاوية المتكونة من هذه المساحة في نقطة P تساوي :

$$d\Omega = - \frac{r \cdot (\delta s \times dl)}{|r|^3} = - \frac{\delta s \cdot (dl \times r)}{|r|^3}$$

$$\delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

وبالتعويض في المعادلة (4-51) نحصل على :
لذلك فان الجهد Φ في نقطة P يساوي :

$$P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \quad (4.52)$$

قارن هذه العلاقة مع جهد مزدوج الطبقات الكهربائية المستقرة (1-72) (electrostatic double layer) ونعني

$$\Phi(r) = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

نستخلص من هذا ان جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه رياضياً يملك نفس الخواص كما في جهد مزدوج الطبقات الكهربائية المستقرة والآن :

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int \nabla \Phi_m \cdot d\mathbf{l} = - \Phi_m \quad (4.53)$$

ان الكمية Φ_m تسمى احياناً بالقوة الدافعة المغناطيسية (magneto motive force).

ب - الجهد المتجه (Vector Potential)

جهد الكمية المغناطيسية غير المتجه مفيد وذو معنى في الحيز الخالي من التيار فقط. ويمكن ايجاد كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} من الدالة المتعدية Φ_m في حالة كون $\mathbf{J} = 0$ فقط. هل هناك دالة اخرى للجهد غير خاضعة لهذا التحديد ويمكن استخدامها في حيز تكون فيه (\mathbf{J}) ذات قيمة معينة؟ . اذا كان هناك مثل هذا الجهد فانه يجب ان يخضع للعلاقة الاساسية التي هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.54)$$

ونحن نعرف ان : $\text{div curl } \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0.$
ولذلك يمكن التعبير عن \mathbf{B} وكأنها لفة المتجه \mathbf{A} (Curl of a vector A).

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.55)$$

ان المتجه \mathbf{A} الذي يحقق المعادلة (4-55) يسمى الجهد المتجه (Vector potential) يمكن ان نرى بسهولة ان المعادلة (4-55) ليست تعريفاً فريداً لـ \mathbf{A} حيث يمكن ان نضيف لـ \mathbf{A} اي دالة يكون لها صفراً (Curl $\mathbf{A} = 0$) مثل تدرج ψ العددي (gradient of a scalar) وتبقى قيمة \mathbf{B} نفسها.

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

لنذكر القاريء ان في الكهربائية المستقرة لم يكن الجهد العددي V محدداً تماماً بتعريفه الذي هو $\mathbf{E} = -\nabla V$ فاذا كان V هو جهد بعض المسائل فان جهداً آخر مختلف وهو $V+C$ والذي يساوي $V+C$ حيث C هو ثابت يعطي نفس المجال ايضاً.

$$-\nabla V' = -\nabla (V + C) = -\nabla V - \nabla C = -\nabla V = \mathbf{E}$$

لتحديد \mathbf{A} بصورة اكثر يجب فرض حصر آخر عليها ويجب ان لا يؤثر على \mathbf{B} . افضل حالة في المغناطيسية المستقرة تتحقق فيها \mathbf{A} هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.56)$$

وحسب هذا الاختيار هو انه يبسط الحل اكثر من اي اختيار آخر، ويجب ان نختار غير هذا في الكهربائية الديناميكية (الحركية) (electrodynamic).

لذلك فان العلاقتين $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ معاً تعرفان الجهد المتجه \mathbf{A} الذي يحقق المعادلة الاساسية $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ لقد كنا دائماً نحاول ان نوازي بين المغناطيسية المستقرة والكهربائية المستقرة وذلك عن طريق المعادلتين الاساسيتين، والآن نسأل: هل هناك علاقة في المغناطيسية المستقرة تناظر معادلة بواسون $\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ الموجودة في الكهربائية المستقرة؟ لدينا قانون أمبير (4-47) :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \text{الآن}$$

$$= -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ حالة اختيار})$$

$$\therefore \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (4.57)$$

وهذه المعادلة تشابه معادلة بواسون (Poisson equation) عدا ان \mathbf{A} هي متجه، وهذا لا يشكل اي صعوبة مادام كل مركبة من مركبات \mathbf{A} تحقق المعادلة التفاضلية (differential equation) لذلك

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x; \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y; \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (4.58)$$

والحل يكون :

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x}{|\mathbf{r}|} d\tau \text{ etc.} \quad (4.59)$$

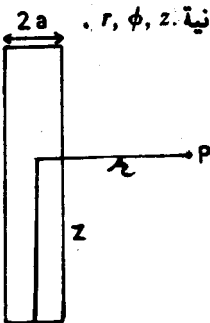
والهيئة العامة للحل بصيغة المتجهات تكون :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|} d\tau \quad (4.60)$$

لذلك يمكن حساب المجال الناتج من تيار معين بايجاد \mathbf{A} اولاً من المعادلة (4-60) والتعويض بها في المعادلة (4-55)

مثال (4-3) :- جد الجهد المتجه وكثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} الناتج من سلك لانهائي الطول ويحمل تياراً اولاً في تقطة خارج السلك وثانياً في تقطة داخل السلك.

نفرض ان الساحة داخل السلك تساوي μ_1 ولنجعل محوره يتطابق مع المحور z ، لذلك تكون كثافة التيار مركبة واحدة هي j_z فتكون المركبة الوحيدة لـ \mathbf{A} هي A_z ، ويكون من الملائم ايضاً استخدام الاحداثيات الاسطوانية r, ϕ, z .



الشكل (4.9)

(1) داخل السلك :

$$\nabla^2 A_z = -\mu_1 j_z = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2} \quad (4.61)$$

حيث ان a هو نصف قطر المقطع العرضي للسلك.

مادام A_z لا تعتمد على Z و ϕ يمكن كتابة المعادلة (4-61) على الصيغة الآتية :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2}$$

وبالتكامل :

$$r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\mu_1 I r^2}{2\pi a^2} + \text{a constant} \quad (4.62)$$

عندما تكون r مساوية لصفر فإن الحد $r \frac{\partial A_z}{\partial r}$ يساوي صفرأ ايضاً. كرد التكامل ثانية :

$$A_z = -\frac{\mu_1 I r^2}{4\pi a^2} + \text{a constant}$$

نفرض ان A_z تساوي صفرأ عندما تكون r مساوية لـ A .

$$A_z = \frac{\mu_1 I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (4.63)$$

بما ان $B = \nabla \times A$ ومركبات لف A (Curl A) هي :

$$(\text{curl } A)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$$

$$(\text{curl } A)_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (4.64)$$

$$(\text{curl } A)_z = \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$

نصل الى نتيجة هي :

$$B_z = \frac{\mu_1 I r}{2\pi a^2} \quad (4.65)$$

ويمكن الوصول الى نفس النتيجة باستخدام قانون أمبير (Ampere's law).
(2) خارج السلك :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{C}{r} \quad (4.66)$$

حيث C هو ثابت و $A_z = C \ln r + C'$ (C' هو ثابت آخر) وعندما $r = a$ ، $A_z = 0$ ،
 $C' = -C \ln a$

$$A_z = C \ln \frac{r}{a} \quad (4.67)$$

ويمكن إيجاد قيمة C من الشروط الحدودية للحد $\frac{\partial A_z}{\partial r}$ عندما $r = a$ ، لذلك وبما
ان $B = \nabla \times A$ فان :

$$B_\theta = - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

الآن يجب ان تكون B_θ مستمرة عندما $r = a$ من (4-63) عندما $r = a$

$$- \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_1 I}{2\pi a}$$

ومن المعادلة (4-66) :

$$- \frac{\partial A_z}{\partial r} = - \frac{C}{a}$$

$$\therefore - \frac{C}{a} = \frac{\mu_1 I}{2\pi a} \quad \text{i.e.} \quad C = - \frac{\mu_1 I}{2\pi}$$

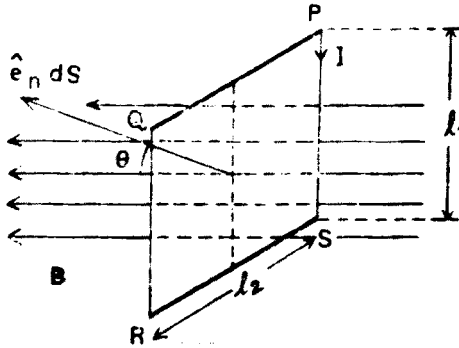
$$A_z = - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (4.68)$$

ومن هذا يمكن إيجاد B.

$$B = \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \quad (4.69)$$

10-4 اطارات التيار في المجالات الخارجية - ثنائي القطب المغناطيسي : (Current loops in External Fields - Magnetic Dipole)

سندرس في هذا الجزء الخواص المغناطيسية لاطارات التيار الصغيرة (small current loops) كتلك المتكونة من دوران الالكتران حول النواة في الذرات والنتائج التي توصلنا اليها ستفيدنا كثيراً في دراسة التصرف المغناطيسي وعلى الرغم من التسمية الا انه للسهولة سنختار اطاراً مستطيلاً (rectangular loop) ، حيث ان النظرية الناشئة منها يمكن استخدامها في الاطارات الدائرية (Circular loops) ايضاً.



الشكل (10 . 4)

الشكل (10-4) يرينا اطاراً سلكياً بسيطاً بشكل مستطيل يحمل تياراً معلقاً بوضع مستوي شاقولي في مجال مغناطيسي افقي هو B. بحيث يكون المستقيم العمودي على المستوي زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال. لتكن "a" هي المقطع العرضي (Cross - section) للسلك. والتيار الذي يسري في السلك يساوي :

$$I = Neua \quad (4.70)$$

حيث "N" هو عدد الالكترونات الحرة لوحدة الحجم، "e" شحنة الالكتران و "U" سرعته ، القوة dF_1 المؤثرة على عنصر الطول الصغير dl_1 المأخوذ من الضلع PS للاطار

$$dF_1 = Neua dl_1 \times B = Idl_1 \times B \quad (4.71)$$

هي :

حيث المتجه $d\mathbf{l}$ هو باتجاه التيار، القوة الكلية على الضلع PS تكون :

$$\mathbf{F}_1 = I_1 \times \mathbf{B} = I_1 B \hat{e}_y, \quad (\because PS \perp B). \quad (4.72)$$

فاذا فرضنا ان المجال B موازي للمحور X والتيار موازي للمحور Z، فان القوة F تعمل بالاتجاه الموجب للمحور Y وكما هو موضح في الشكل (11-4). يوضح الشكل منظرًا من الاسفل لللف (Coil). وهناك قوة ثانية F_2 مساوية للقوة F_1 بالمقدار ومعاكسة لها في الاتجاه تعمل على الضلع QR. وبنفس الطريقة هناك قوى اخرى تعمل على الاضلع PQ و SR وهذه القوى هي ايضاً متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاتجاه. لذلك تكون محصلة القوى في الاطار صفراً. لذلك لا تكون هناك اي حركة انتقالية في الاطار، ولكن سيكون هناك عزم هو T يحاول ادارة الاطار على محوره العمودي ومقدار هذا العزم هو:

$$|T| = I_1 B l_2 \sin \theta = IdS B \sin \theta \quad (4.73)$$

حيث dS هي المساحة التي يحددها الاطار وتساوي $l_1 l_2$ ، وبصيغة المتجهات تكون :

$$\mathbf{T} = I \hat{e}_n dS \times \mathbf{B} \quad (4.74)$$

ان هذا العزم سيحاول ان يقلل من الزاوية A، فاذا كانت الطاقة الكامنة للاطار هي

$$U_p \text{ فان مقدار العزم الذي يحاول تقليل الزاوية } \theta \text{ يكون } - \frac{\partial U_p}{\partial \theta}$$

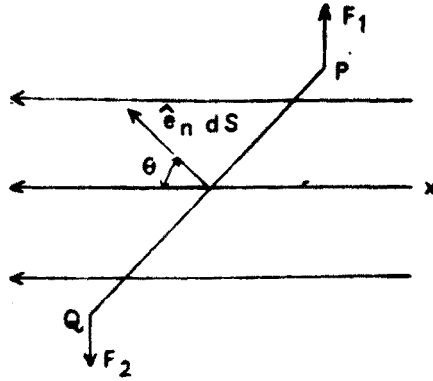
$$\therefore - \frac{\partial U_p}{\partial \theta} = - IdSB \sin \theta$$

$$U_p = -IdSB \cos \theta + \text{a constant.} \quad (4.75)$$

اذا كان مقدار الفيض المغناطيسي في الدائرة هو Φ ويساوي $B \cdot \hat{e}_n dS$

$$\therefore U_p = - I \Phi \quad (4.76)$$

(ملاحظة يجب ان لا يحدث التباس بين Φ و Φ)



الشكل (4.11)

الآن يمكننا مقارنة المعادلة (4-75) بالمعادلة (1-66) التي تعطينا قيمة الطاقة الكامنة لثنائي قطب كهربائي عزمه P موضوع في مجال كهربائي مقداره E والتي هي :

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (4.77)$$

نجد ان المجال المغناطيسي الناتج من اطار تيار مشابه بالصيغة لمجال الكهربائية المستقرة الناتج من ثنائي قطب كهربائي، ونستخلص من هذا انه يمكن ايجاد القوى والعزم المؤثرة على اطار صغير للتيار موضوع في مجال مغناطيسي اذا جمعنا مع التيار عزم ثنائي قطب مغناطيسي هو m ويساوي $\int \mathbf{i} \hat{\mathbf{e}}_n dS$

$$\therefore U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.78)$$

4-11 ثنائي قطب مغناطيسي في مجال مغناطيسي غير منتظم : (Magnetic Dipole in a Non - uniform Magnetic Field)

لاحظنا ان الطاقة الكامنة لثنائي قطب مغناطيسي m في مجال مغناطيسي B تساوي:

$$U = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

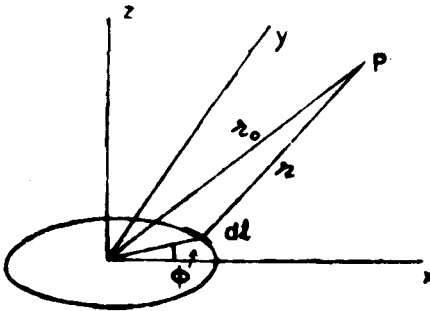
ونعرف ان هناك علاقة اخرى تربط القوة بالطاقة الكامنة وهي

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla U \\ \mathbf{F} &= \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &+ \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.79)$$

استخدمنا هنا متطابقة مهمة في المتجهات وذلك لأن \mathbf{m} ليست دالة لاحداثيات الفضاء (راجع ملحق A).

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{m} = 0 \\ \mathbf{F} &= \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

4-12 جهد الكمية المغناطيسية المتجه الناتج من اطار تيار صغير (Magnetic vector potential due to a small current loop)



الشكل (4.12)

نفرض ان دائرة نصف قطرها "a" تحمل تياراً مقداره I . الشكل (4-12). سنبين هنا كيفية حساب الجهد المتجه لمثل هذا الاطار التياراتي باتباع وسيلة بسيطة تستخدم فيها الاحداثيات المتعامدة وسنعملي في الجزء اللاحق وسيلة اخرى بديلة. سنفرض ان نقطة مناظ الاسناد (frame of reference) تقع على مركز الملف بحيث يكون المحور Z عمودياً

على الملف، ولتكن المسافة بين النقطة p وعنصر الطول dl هي r و ϕ هي زاوية السم
 (azimuthal angle) للعنصر. ان مركبات dl والذي يساوي $ad\phi$ هي

$$(-a \sin \phi d\phi, a \cos \phi d\phi, 0)$$

حيث

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|} d\tau = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}|},$$

ومركبته باتجاه X تساوي :

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{-a \sin \phi d\phi}{|\mathbf{r}|}$$

$$r^2 = (x - a \cos \phi)^2 + (y - a \sin \phi)^2 + z^2$$

ولأن $a \ll r_0$ فإن a اصغر بكثير في r_0

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{ax \cos \phi + ay \sin \phi}{r_0^3} + \dots$$

حيث r_0 هي المسافة بين P ونقطة الاصل.

$$\therefore A_x = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{ax \cos \phi + ay \sin \phi}{r_0^3} \right) \sin \phi d\phi$$

$$= -\frac{\mu_0 I a^2 \pi y}{4\pi r_0^3} \quad (4.81)$$

وبنفس الطريقة

$$A_y = \frac{\mu_0 I a^2 \pi x}{4\pi r_0^3} \quad \text{and} \quad A_z = 0. \quad (4.82)$$

قيمة عزم ثنائي القطب المكافئ للدائرة هي :

$$m = \text{area} \times \text{current} = \pi a^2 I$$

ويكون اتجاهه عمودياً على مستوى الملف اي باتجاه المحور Z.

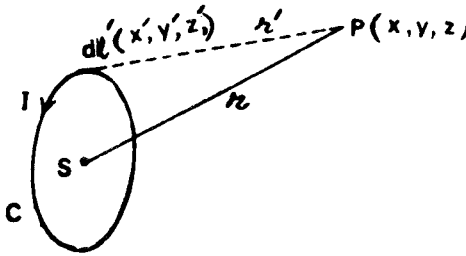
$$m_x = 0, m_y = 0, m_z = \pi a^2 I$$

لذلك فان مركبات (81-4, 82-4) تتناسب مع المتجه $m \times r$ فيمكن بعد اسقاط الحدود المشتركة كتابة

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (m \times r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ m \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right\} \quad (4.83)$$

4-13 طريقة بديلة لايجاد الجهد المتجه A ومتجه المجال B الناتج من اطار تيار

(An Alternative Method for Finding the Vector Potential A and, hence, the Field B due to a Current Loop)



الشكل (4.13)

نفرض ان دائرة خويطية (filament circuit) تحمل تياراً مقداره I (الشكل 4-13). الجهد المتجه A عند النقطة $P(x,y,z)$ والناتج من اطار التيار هو:

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl'}{r'} \quad (4.84)$$

حيث $dl(x', y', z')$ يمثل عنصر الطول من الدائرة. باستخدام مبرهنة ستوك (Stoke's theorem) (انظر ملحق A).

$$\begin{aligned} \oint \frac{dl'}{r'} &= \int_S \hat{e}_n \times \nabla' \left(\frac{1}{r'} \right) dS \\ \therefore A &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \hat{e}_n \times \nabla' \left(\frac{1}{r'} \right) dS \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \left(\hat{e}_n \times \frac{\hat{e}_{r'}}{r'^2} \right) dS \end{aligned} \quad (4.85)$$

حيث $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ هما متجه الوحدة العمودية على السطح الذي تتضمنه الدائرة بمحاذاة r' على التوالي ، فإذا كانت ابعاد اطوار التيار صغيرة جداً مقارنة مع المسافة التي تفصلها عن نقطة P فان $\frac{\hat{e}_r'}{r'^2}$ سيكون ثابت تقريباً اثناء التكامل ، لذلك سنكتبه على شكل $\frac{\hat{e}_r'}{r^2}$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \times \int_S \hat{e}_n dS = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{e}_r \times \hat{e}_n dS \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \left(\mathbf{m} \times \frac{\hat{e}_r'}{r'^2}\right) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

حيث m تمثل عزم ثنائي قطب مغناطيسي للاطار ويساوي $\hat{e}_n IS$. كثافة الفيض المغناطيسي \mathbf{B} تساوي :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{m} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \right] \\ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) &= 0 \\ \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right). \end{aligned}$$

الآن

$$\nabla \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{m} \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right).$$

والحد الاخير يزول

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} &= \nabla \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right) \\ &= \left[\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m} \right] \quad (4.87)$$

وهذه العلاقة مشابهة للعلاقة (85-1) والخاصة بجمال ثنائي القطب الكهربائي. كان امبير يؤمن ان التأثيرات المغناطيسية ناتجة من الاطارات التيارية. وعرض فرضيته القائلة ان كل فترة في الحقيقة هي اطار تيار دقيقة، واقترح اضافة لذلك ان التأثيرات المغناطيسية على الحديد ناتجة من التيارات الذرية واقترحه هذا جدير بالاهتمام لأنه ان لم تكن لديهم في ذلك الوقت معلومات كافية عن التركيب الذري.

يمكن بسهولة اعادة التعبير عن m بصيغة التيار I وكتابة المعادلة (87-4) بالصيغة

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left(\frac{I \hat{e}_n S \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \\ &= -\text{grad} \left\{ \frac{\mu_0 I \hat{e}_n S \cdot \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right\} \\ &= -\text{grad} \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \right\} \end{aligned} \quad (4.88)$$

حيث Ω تمثل الزاوية المحسوسة المتكونة من الاطار في r .

(انظر 52-4)

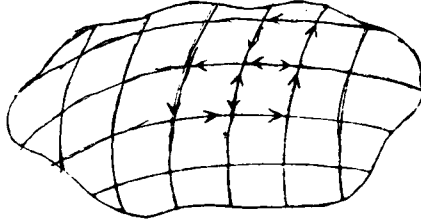
$$\mathbf{B} = -\text{grad} \Phi_m \quad (4.89)$$

وهذه متطابقة مع المعادلة (49-4)

هذا التعبير لا يحمل اي دليل ولا تعبيراً لشكل الاطار. لذلك يمكن منطقياً الافتراض ان هذا التعبير يمكن استخدامه لاي شكل من الاطارات الصغيرة حق الاطارات غير المستوية.

يمكن اثبات ان النتائج التي توصلنا اليها في اعلاه يمكن توسيعها لتشمل حالات اطارات اكبر اياً كان شكلها وذلك باستخدام طريقة التقسيم الى اجزاء اصغر و الاضافة بالتراكيب (Sub - division and Super - Position) حيث يمكن ان تصور ان الدائرة التيارية ذات حجم معين متكونة من مشبكات صغيرة (Small meshes) كما في الشكل (4-4) ولكل ثقب في هذا المشبك تيار معين يجري على حافته ومجموع كل التيارات في

كل ثقب المشبك يمثل التيار الكلي كحصلة ، لأن التيارات تمر بعضها البعض في كل مكان من المشبك عدا الاطراف الحدودية، كل ثقب في المشبك يضيف الى الجهد المقدار $\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$



الشكل (4.14)

وكثافة الفيض الناتج من الاطراف الكبير هو نفسه مجموع الفيض للاطراف الصغيرة المفردة.

$$B = -\nabla \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \right) \quad (4.90)$$

حيث Ω هي الزاوية المحيطة المتكونة في الاطراف في نقطة P . وهكذا فقد حل محل الاطراف التيارية لمزدوج الطبقات متكون من اقطاب مغناطيسية.

(double layer of magnetic poles) او ما يسمى بالفلاف المغناطيسي (magnetic shell).

4-14 الاوساط المغناطيسية (Magnetic Media) :-

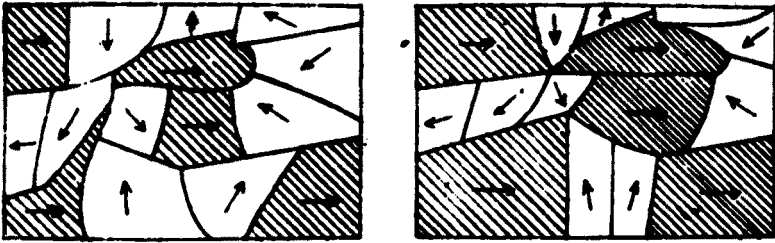
تعاملنا فيما مضى مع التأثيرات المغناطيسية لتيارات موجودة في الفراغ، فكيف يتأثر المجال المغناطيسي بوجود وسط عادي ؟ سنناقش هذا السؤال في هذا الجزء. لوحظ تجريبياً ان بعض المواد تكتسب استقطاباً مغناطيسياً (magnetic polarization) اذا ما وضعت في مجال مغناطيسي تماماً كما تكتسب المواد العازلة استقطاباً كهربائياً اذا ما وضعت في مجال كهربائي، وهذا بلاشك هو التأثير العيني (macroscopic)

(effect) على كل حال سيكون من المفيد ولو باختصار ان ندرس الاسس الفيزيائية لهذا التأثير استجابة المواد للمجال المغناطيسي المسلط تعتمد على الخواص الفردية للذرات والجزئيات وعلى التفاعل التبادلي (interaction)-ان الحركة المدارية (orbital motion) للالكترونات حول الذرات والجزئيات تولد تيارات تظهر ثنائيات القطب المغناطيسية، في كثير من المواد يكون معدل التيارات الالكترونية الصغيرة متجمعة مع الحركة المدارية والبرم (Spin) الالكتروني مساوياً للصفر. مثل هذه الذرات في مجال مغناطيسي تولد فيها تيارات الكترونية صغيرة بالحث في السحابة الالكترونية ، ويكون اتجاه هذه التيارات مجتماً مع المجال المغناطيسي معاكساً لاتجاه المجال الحثي B (inducing field)،(الفصل الخامس) هذه المواد تعرف بالمواد الدايمغناطيسية او المواد قليلة الانفاذية المغناطيسية (diamagnetic substances) .

هناك مواد اخرى تملك ذراتها عزماً مغناطيسياً ذاتياً وذلك لان التيارات الناتجة من الحركة المدارية والبرم الالكتروني لا يكون معدداً صفراً. بالرغم من ان البرم الالكتروني يميل لان يكون على شكل ازواج يلغي احدهما الآخر الا ان هناك ذرات لا تكتمل فيها الازواج اذا ما وضعت مثل هذه المواد في مجال مغناطيسي فان عزم الذرات المغناطيسي الذاتي والمغناطيسية المحتمة يزيدان ويعطيان المجال الخارجي، ومثل هذا التأثير يكون اكثر وضوحاً في درجات الحرارة المنخفضة ، مثل هذه المواد تسمى بالمواد البارامغناطيسية او المواد ذات الانفاذية المغناطيسية التي تزيد على الواحد (Paramagnetic substances) هناك بعد صنف آخر من المواد التي لا تظهر صفات مغناطيسية حق في درجات الحرارة العالية وتسمى هذه المواد بالمواد الفيرومغناطيسية او المواد عالي الانفاذية المغناطيسية (ferromagnetic substances). في هذا النوع من المواد تكون قوى التقارن التبادلية (mutual coupling forces) بين عزوم ثنائيي اقطاب الجزئيات المتجاورة اقوى بكثير من التأثير العشوائي للتهييج الحراري لذا تبقى ثنائيات القطب محتفظة بتنسيق خاص تكون فيه متوازية ضمن حيز صغير يسمى منطقة نفوذ (domain)، الشكل (15-4). ويعتقد ان المجال النيوي الصافي الناتج بجوار هذه المواد يعتمد الحجم النسبية لمنطقة النفوذ وعلى اتجاه ثنائيات القطب الجزئية في كل منطقة نفوذ، وفي المجال الخارجي

الضعيف تتكون حصيلة صافية من مناطق النفوذ المصطفة في اتجاه المجال معطية تأثيراً بارامغناطيسياً كبيراً، وعند ازدياد المجال فان مناطق النفوذ المصطفة اصلاً تكبر على حساب الاخرى.

في الحقيقة لا يستطيع احد ان ينكر ان المناقشات القديمة مازالت عاجزة عن توضيح تصرف الوسط المغناطيسي والنظرية التي قد تستطيع توضيح ذلك يجب ان تنبى على مبادئه وصيغ ميكانيك الكم (quantum mechanic) وعلى كل حال سنستخدم المناقشات القديمة هذه في توضيح تصرف المواد الدايمغناطيسية والبارامغناطيسية وهي تعطينا نوعاً ما فكرة عن التفاعلات التبادلية الجارية في محل هذا الوسط.



مجال مغناطيسي ضعيف

مجال مغناطيسي قوي

الشكل (19 . 4)

15-4 التَمَغْنِط (Magnetization):

كل ذرة او جزيئة يمكن ان تعتبر كثنائي قطب مغناطيسي صغيراً جداً (tiny) ذو عزم مغناطيسي هو :

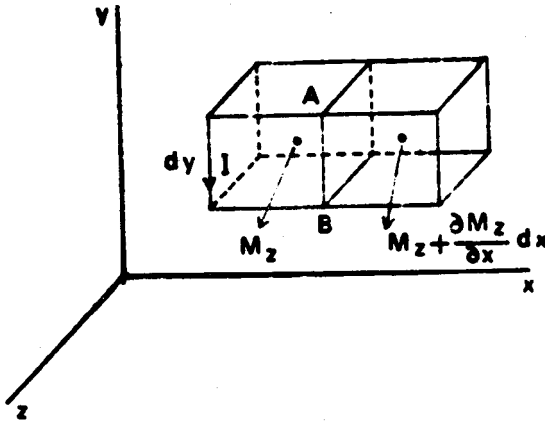
$$Q_m = \hat{e}_n dS \quad (4.91)$$

حيث Q_m هي قوة القطب المغناطيسي، L هي المسافة الفاصلة للقطب (pole separation) ، I التيار ، dS مساحة الاطار. وفي بعض المواد المدمتنة (material substance) تكون ثنائيات القطب المغناطيسية هذه في ترتيب عشوائي ، لكن اذا ما وضعت في مجال مغناطيسي يحدث بعض الترتيب فيها، ما في الثنائيات الكهربائية ويقال في حينها عن المادة بأنها متمغنطة (magnetized). ويوصف مقدار تأثر المغناطيس الذرية هذه بكمية تسمى التَمَغْنِط (magnetization) والتي تعرف بأنها

مقدار عزم الثنائي المغناطيسي في وحدة الحجم. وبغية تعريف M هذه سيكون من الملائم الفرض بأن للوسط ثنائيات متناهية جداً في الصغر ومسترة التوزيع، على الرغم من ان ذلك مخالف للواقع لأن الثنائيات متقطعة ولها حجم معين ، الا ان هذا الفرض انه ان يعودنا ايضاً الى خطأ جسم لا يمكن التفاضل منه ذلك لانه يفترض ان يحتوي عنصر الحجم احصائياً على عدد كبير جداً من الذرات ومع هذا فان عنصر الحجم يجب ان يكون صغيراً جداً في القياس البنيوي لكي تتمكن من اعتبار M دالة تقطعية متجه (vector point function) لاحظ ايضاً انه لا يشترط كون التفاضل M منتظماً خلال المادة وهكذا.

$$M = \frac{dm}{d\tau} \quad (4.92)$$

افرض ان عنصراً حجماً ذا اضلاع $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ في النقطة (x, y, z) ضمن جسم ممغنط (magnetized body) كما هو موضح في الشكل (4-16).



الشكل (4. 16)

ان مركبة العزم المغناطيسي باتجاه المحور z ضمن هذا الحجم هي :

$$M_z \delta x \delta y \delta z$$

والآن من المعادلة (4-91)

$$M_z \delta x \delta y \delta z = I \delta x \delta y \delta z \quad (4.93)$$

حيث تمثل التيار الذي يسري في الاطار الذي مستويه يوازي المستوي XY.

$$\therefore I = M_z \delta z \quad (4.94)$$

التيار الذي في الاطار عند النقطة $(x+\delta x, y, z)$ هو :

$$I' = I + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x = M_z \delta z + \frac{\partial M_z}{\partial x} \delta x \delta z.$$

لذلك فان مركبة التيار الذي يسري في الحد الفاصل AB باتجاه المحور Y تعطى من المعادلة :

$$I - I' = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \delta x \delta z$$

وبنفس الطريقة اذا اخذنا اطار التيار في المستوي YZ نجد للتيار مركبة اخرى باتجاه المحور Y قيمتها $\frac{\partial M_z}{\partial z} \delta x \delta z$ والتيار الكلي باتجاه المحور Y هو :

$$\left(\frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \delta x \delta z.$$

ويمكن كتابته بصيغة المركبة Y لكثافة تيار التفضنط (magnetization current density) j_M وهكذا :

$$j_{M_y} \delta x \delta z = \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \delta x \delta z$$

$$j_{M_y} = \frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \quad (4.95)$$

وبنفس الطريقة نجد المركبات الاخرى :

$$j_{M_x} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$j_{M_z} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (4.96)$$

من الواضح ان الطرف الايمن للمعادلتين (4-95) و (4-96) يمثل مركبات لف (Curl M)

$$\therefore j_M = \nabla \times M \quad (4.97)$$

لاحظ ان تيار التفضط يسري فقط اذا كانت M تتغير او تتباين اما اذا كانت M منتظمة فان $\text{div } M = 0$ ، ويمكن الوصول الى نفس النتيجة اذا استخدمنا المجهد المتجه من المعادلة (4-83):

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ M(r) \times \nabla \left(\frac{1}{|r|} \right) \right\} d\tau \quad (4.98)$$

وباستخدام المتطابقة :

$$\nabla \times (\phi P) = \phi \nabla \times P - P \times \nabla \phi,$$

تصبح المعادلة (4-98) بالشكل الآتي

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times M}{|r|} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \nabla \times \left(\frac{M}{|r|} \right) \right\} d\tau \quad (4.99)$$

والآن سنحرف قليلاً لتثبيت علاقة مهمة خاصة بالمتجهات ستكون لها فائدة كبيرة في تحويل المعادلة (4-99) الى صيغة مناسبة ، والعلاقة التي نريد تكوينها وهي ان لاي متجه مثل "a" ، لدينا :

$$\int (\nabla \times a) d\tau = - \int a \times \hat{e}_n dS \quad (4.100)$$

ولتكن "b" متجهاً ثابتاً (Constant vector)

$$\begin{aligned} \therefore b \cdot \int_S a \times \hat{e}_n dS &= \int_S (b \times a) \cdot \hat{e}_n dS \\ &= \int_V \nabla \cdot (b \times a) d\tau \quad (\text{باستخدام مبرهنة التباعد}) \\ &= -b \cdot \int_V \nabla \times a d\tau \end{aligned}$$

مادم "b" متجهاً اعتباطياً :

$$\int_S a \times \hat{e}_n dS = - \int_V \nabla \times a d\tau$$

والآن باستخدام هذه النتيجة يمكن صياغة المعادلة (4-99) بالشكل الآتي :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times M}{|r|} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{M \times \hat{e}_n}{|r|} dS$$

مادام موقع M موضعياً فان التكامل السطحي المأخوذ حول سطح خارج الحيز الذي يسري فيه التيار يتلاشى ، لذلك :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times M}{|r|} d\tau \quad (4.101)$$

وكنا قد اثبتنا ان :

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r)}{|r|} d\tau$$

$$\therefore j_M = \nabla \times M$$

16-4 متجه المجال المغناطيسي (Magnetic Field Vector) :-

يمكن القول بصورة عامة اذا كان الوسط موصل للكهربائية وقابل للتغنت ستواجد معاً كثافة تيار حقيقية J بالإضافة الى كثافة تيار التغنت j و يجب اخذ الاثنين معاً في الحساب، وهذا يعني ان :

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \mu_0 (j + j_M) \\ &= \mu_0 (j + \nabla \times M) \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\therefore \nabla \times (B - \mu_0 M) = \mu_0 j \quad (4.103)$$

والآن سندخل متجهاً جديداً هو H وتعرفه هو :

$$B - \mu_0 M = \mu_0 H \quad (4.104)$$

$$B = \mu_0 (M + H) \quad (4.105)$$

لذلك يمكن كتابة للمعادلة (4-103) بالشكل الآتي :

$$\nabla \times H = j \quad (4.106)$$

وهذه هي الصيغة الجديدة لقانون أمبير والتي يمكن استخدامها في الفراغ وفي وسط معين وهي لذلك فان صيغة عامة اكثر من للمعادلة (4-47) الخاصة بالفراغ.

$$B = \mu_0 H \quad \therefore \nabla \times B = \mu_0 j$$

وهذه حالة خاصة للمعادلة (106-4) وبالصيغة التكاملية تكون :

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int j \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \text{او} \quad (4.107)$$

والكمية H تسمى شدة المجال المغناطيسي (magnetic field intensity) وتظهر من المعادلة (107-4) وحدات H وهي أمبير / متر، ويمكن استنتاج وحدات M من المعادلة (105-4) وهي نفس وحدات H ، وعلى كل حال فإن وحدات H تختلف عن وحدات B . لقد بينا سابقاً في هذا الفصل أن B هي المناظر المغناطيسي للمجال الكهربائي E ، والآن نرى أن H هو المناظر للازاحة الكهربائية (electric displacement) ، ويمكن ملاحظة أن من فوائد H هو سهولة إيجاد لفة H (Curl H) وذلك من كثافة التيار الحقيقية لكن B مرتبطة بعلاقة مع مجموع كثافة التيار الحقيقية وكثافة تيار التغطض.

17-4 المتأثرية المغناطيسية والنفوذية

:(Magnetic susceptibility and permeability)

وجد أن في كثير من المواد أن المغنطة M تتناسب خطياً مع H ، وهذا يعني أن :

$$M = \chi_m H \quad (4.108)$$

حيث أن χ_m ثابت مجرد من الوحدات ويسمى المتأثرية المغناطيسية للمادة (magnetic susceptibility) والمتأثرية دالة لدرجة الحرارة وهي صغيرة جداً بالنسبة للمواد البارامغناطيسية والمواد الدايمغناطيسية ، وقيمتها موجبة للمواد البارامغناطيسية وسالبة للمواد الدايمغناطيسية.

والآن :

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 (H + M) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) H \\ &= \mu_{rel} H = \mu H \quad \text{where } \mu_r = 1 + \chi_m \end{aligned} \quad (4.109)$$

وتسمى μ هنا بالنفوذية المغناطيسية (magnetic permeability) وبما ان النفوذية المغناطيسية للفراغ هي μ_0 فان $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ تدعى بالنفوذية النسبية للوسط (relative permeability) لانه لا يزيد او تقل عن الواحد الا بجزء قليل ، حيث تكون للمواد البارامغناطيسية اكبر من الواحد $\mu > 1$ اما للمواد الدايمغناطيسية فتكون اصغر من الواحد $\mu < 1$ وهي كبير جداً للمواد المغناطيسية الحديدية (الفرومغناطيسية) حيث تصل الى (1000).

18-4 الشروط الحدودية (Boundary conditions):

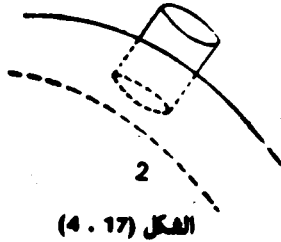
رأينا في الكهرباء المستقرة التجهين E و D. يخضعان لشروط حدودية معينة كذلك فان الناظر لها B و H تخضعان لشروط معينة في المناطق الحدودية الفاصلة بين وسطين مختلفين في النفوذية. حسب مبرهنة التباعد :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\tau = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS \quad (4.110)$$

ان الشرط $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ لا يتغير بوجود مواد مغناطيسية.

$$\int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \, dS = 0 \quad (4.111)$$

وهذه هي مبرهنة كاوس، والمعادلة تعني ان مقدار فيض المجال B الخارج من اي سطح مغلق هو صفر.



افرض ان قرصاً صغيراً ارتفاعه "h" موضوع عرضاً (astride) على الحد الفاصل بين وسطين (الشكل 17-4) ، فاذا كان الارتفاع "h" صغيراً جداً ($h \rightarrow 0$) ، فان التكامل $\int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS$ لا يضيف شيئاً الا من قاعدتي القرص العليا والسفلى فقط، اي :

$$\int_1 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS - \int_2 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = 0 \quad (4.112)$$

الآن $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = B_{\perp} dS$ هي مركبة B العمودية على dS.

$$\therefore \int_1 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \int_1 B_{(1)\perp} dS \text{ and } \int_2 \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = - \int_2 B_{(2)\perp} dS$$

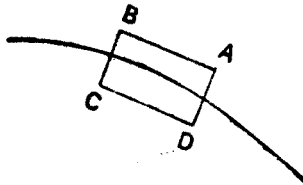
$$\therefore \int_1 B_{(1)\perp} dS = \int_2 B_{(2)\perp} dS$$

وهذه المعادلة نافذة مهما كان حجم dS.

$$B_{(1)\perp} = B_{(2)\perp} \text{ i.e. } B_{\perp} \text{ مستمرة} \quad (4.113)$$

اما الشرط الخاص بـ (H) فيمكن ايجاده من قانون أمبير. نفرض ان دائرة صغيرة مثل ABCDA (الشكل 18-4) فيها الضلعان BC, DA صغيران جداً والضلعان AB = CD = dl

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \text{الآن} \quad (4.114)$$



الشكل (18 . 4)

حيث تمثل التيار بما ان BC, DA يميلان الى الصفر.

$$H_{(1)\parallel} dl - H_{(2)\parallel} dl = I \quad (4.115)$$

حيث $H_{(1)}$ ، $H_{(2)}$ تمثلان المركبتين المماسيتين (tangential) لـ (H) في الوسطين وهكذا نرى وجود تقطع (discontinuity) في مركبة المجال المغناطيسي (H) يساوي التيار السطحي (surface current) وفي حالة عدم وجود تيار سطحي فان.

$$H_{(1)\parallel} = H_{(2)\parallel} \quad (4.116)$$

وفما يلي مقارنة بين الشروط الحدودية للكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة.

(1) مركبة B العمودية مستمرة بدقة عبر الحدود ، لكن مركبة D العمودية وتكون مستمرة فقط في حالة عدم وجود شحنة سطحية.

(2) مركبة E المماسية مستمرة بدقة ، لكن مركبة H المماسية تكون مستمرة عبر الحدود في حالة عدم وجود تيار سطحي.

19-4 كرة ممغنطة بانتظام في مجال مغناطيسي خارجي (Uniformly Magnetized Sphere in External Magnetic Field)

قنا بجل المسألة الخاصة بالكرة القابلة للاستقطاب (Polarizable sphere) الموضوعه في مجال كهربائي منتظم وذلك باستخدام التوافق الكروي (Spherical harmonic) وسندرس في هذا الجزء المسألة المغناطيسية المناظرة لها. في الشكل (19-4) لدينا كرة موضوعة في مجال منتظم H_0 ، اتجاهه باتجاه المحور Z ، ولتكن μ_1 ، μ_2 هما النفوذيات النسبية داخل وخارج الكرة على التوالي، وسنفرض ان الجهد داخل وخارج الكرة هو :

$$\Phi_1 = -H_1 r \cos \theta \quad (r < a) \quad (4.117)$$

$$\Phi_2 = -H_2 r \cos \theta + Ar^{-2} \cos \theta \quad (r > a) \quad (4.118)$$

حيث ان H_1 هو المجال داخل الكرة، و θ هي الزاوية المحصورة بين متجه نصف القطر (radius vector) واتجاه المجال. لاحظ ان لم يتم ادخال الحد $r^2 \cos \theta$ في المعادلة (4-117) الخاصة بالجهد داخل الكرة Φ_1 وذلك لأنه بادخال هذا الحد تصبح قيمة Φ_1 لانتهائية عندما تكون r مساوية لصفر. احد الشروط الحدودية الفاصلة يقضي بأن المركبة المماسية لـ H مستمرة على الحدود الفاصلة وهذا يعني ان Φ_1 تصبح مساوية لـ Φ_2 عند النقطة $r = a$

$$-H_1 a \cos \theta = -H_0 a \cos \theta = -Aa^{-2} \cos \theta$$

$$H_1 = H_0 = Aa^{-3} \quad (4.119)$$

سنفرض ان التغطنط داخل الكرة M_1 موازي للمجال H_0 ومتكون من مركبتين الاولى مركبة دائمية M_0 والثانية مركبة محتثة من المجال H_1 وتحسب كما يلي :

$$M' = \chi_m H_1 = (\mu_1 - 1) H_1$$

$$M_1 = (\mu_1 - 1) H_1 + M_0$$

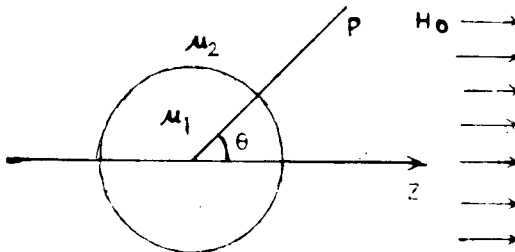
$$B_1 = \mu_0 (H_1 + M_1) = \mu_0 (H_1 + (\mu_1 - 1) H_1 + M_0) \quad \text{حيث :}$$

$$= \mu_0 \mu_1 H_1 + \mu_0 M_0 \quad (4.120)$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_2 H_0 \quad (4.121)$$

والمركبات نصف القطرية (radial components) لـ B هي :

$$-\mu_0 \mu_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) + \mu_0 M_0 \cos \theta = \mu_0 (\mu_1 H_1 + M_0) \cos \theta \quad (\text{داخل الكرة}) \quad (4.122)$$



الشكل (4.19)

$$-\mu_0\mu_2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)=\mu_0\mu_2(H_0+2Ar^{-3})\cos\theta \quad (\text{خارج الكرة}) \quad (4.123)$$

وحسب الشروط الحدودية الفاصلة يجب تساوي هاتين المركبتين في النقطة $r=a$.

$$\mu_0(\mu_1 H_1 + M_0) \cos\theta = \mu_0\mu_2(H_0 + 2Aa^{-3}) \cos\theta$$

$$\mu_1 H_1 + M_0 = \mu_2 H_0 + 2\mu_2 Aa^{-3}.$$

$$A = \frac{H_0 - H_1}{a^{-3}} \quad (\text{انظر 4-119})$$

$$\mu_1 H_1 + M_0 = \mu_2 H_0 + 2\mu_2 (H_0 - H_1)$$

$$(\mu_1 + 2\mu_2) H_1 = 3\mu_2 H_0 - M_0 \quad \text{اي :}$$

$$H_1 = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0 - \frac{1}{\mu_1 + 2\mu_2} M_0. \quad (4.124)$$

ويسمى الفرق بينهما (H_d) باسم المجال المزيل للتمغنت (demagnetizing field) والذي هو :

$$H_d = H_1 - H_0 \quad (4.125)$$

4-20 مقارنة بين مجالات الكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة (A comparison of static electric and magnetic fields)

سيكون من المفيد للايضاح عمل مقارنة بين المجالات الكهربائية والمغناطيسية ، وفيما يلي الجدول (4-1) الذي يوضح مقارنة جزئية بين المجالين والعلامات التي تم استنتاجها لحد الآن :

جدول (4-1) مقارنة بين معادلات المجال الكهربائي المستقر والمجال
المغناطيسي المستقر

العلاقة	المجال الكهربائي	المجال المغناطيسي
القوة	$F = qE$	$dF = (Idl \times B)$
العلاقة الأساسية للمجال	$\nabla \times E = 0$	$\nabla \cdot B = 0$
اشتقاق المجال من الجهد	$\left[\begin{array}{l} E = -\nabla \phi \\ \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau}{r} \end{array} \right.$	$\left[\begin{array}{l} B = \nabla \times A \\ A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j}{r} d\tau \end{array} \right.$
علاقات تكوينية	$D = \epsilon E$	$B = \mu H$
مصادر المجالات	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \times H = j$

تمارين الفصل الرابع

4-1 يتغير التيار الذي يسري في موصل زمنياً حسب المعادلة $i = I_0 e^{-\alpha t}$ حيث I_0 و α ثوابت، جد مقدار الشحنة Q المحتمة في الموصل بعد زمن مقداره t_0 ؟

4-2 اذا فرضنا ان كل ذرة نحاسية تضيف شحنة الكترونية مرة واحدة الى التيار الذي في السلك. جد معدل سرعة انجراف الشحنات عندما يسري في سلك قطره 1 mm تيار مقداره (1 A) ؟

(علمياً ان $\text{At. mass of Cu} = 63.6 \text{ amu}$; $\text{density of Cu} = 8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

4-3 الانتقال الكلي للشحنة الموجبة من طبقة الايونوسفير الى الارض نتيجة التيار وفي طقس حسن هو حوالي 90 c/km^2 في كل سنة. ماهو التيار التقريبي وفي طقس حسن في تساقط على 1 mm^2 على الأرض وم شحنة الكترونية يمثل في الثانية ؟

4-4 احسب القوة المتولدة بين ملفين دائريين مستويين صغيرين ذوي لفة واحدة قطرها "a" ويحملان تياراً مقداره I ، وتقعان على نفس المحور وتفصل بينهما مسافة Z علمياً ان $(a \ll Z)$.

4-5 سلكان رفيغان لامتناهيان في الطول احدهما في النقطة $(0,0,0)$ والاخر في النقطة $(R,0,0)$ موازيان للمحور X ويحملان تياراً مقداره I بالاتجاه الموجب، حيث R كبيرة جداً. برهن على ان الجهد المغناطيسي في النقطة (r,ϕ,Z) هو :

$$\Phi = -\frac{I}{2r} (z - r)$$

4-6 احسب كثافة الفيض في مركز اطار مربع طول ضلعه (10 Cm) ويحمل تياراً مقداره (10 A) ؟

4-7 كيبيل ذو موصلين متحدي المحور نصف قطر قلبه "a" ونصف قطر غلافه "b" يسري التيار I في قلب الكيبيل متوزعاً بانتظام فيه ثم يرجع عبر الغلاف ومتوزعاً بانتظام حولها أيضاً. جد كثافة الفيض المغناطيسي في الحالات : (ا) في القلب

$$(r < a)$$

(ب) في الفضاء بين القلب والغلاف ($a < r < b$)

(ج) خارج الغلاف ($r > b$).

4-8 تيار يسري في موصل دائري طويل نصف قطره "a" وطريقة توزيع التيار على الموصل هو بالشكل الذي تكون فيه كثافته على بعد "r" من المحور تساوي :

$$j = j_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$$

جد مقدار التيار الكلي في السلك وكثافة الفيض المغناطيسي داخل وخارج السلك؟

4-9 جسيم كتلته M يدور في مدار دائري نصف قطره "r" وسرعته الزاوية w، فإذا كان الجسم يحمل شحنة مقدارها q. برهن ان عزم ثنائي القطب المغناطيسي يكون مجتماً مع حركة الشحنة المعطاة حسب المعادلة :

$$m = \left(\frac{q}{2\pi r} \right) G$$

حيث G تساوي Mr^2w وهي الزخم الزاوي للجسيم.

4-10 كرة مشحونة بانتظام تدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها w. برهن ان كثافة الفيض المغناطيسي B في مركز الكرة هو :

$$B = \frac{\mu_0 \rho w a^2}{3}$$

حيث "a" هو نصف قطر الكرة و "H" كثافة الشحنة. جد ايضاً الجهد المتجه داخل وخارج الكرة.

1-14 برهن على ان خطوط قوة المجال المغناطيسي H تنكسر عند تغير الوسط الذي تمر فيه. برهن ايضاً على ان :

$$\mu_1 \cot \theta_1 = \mu_2 \cot \theta_2$$

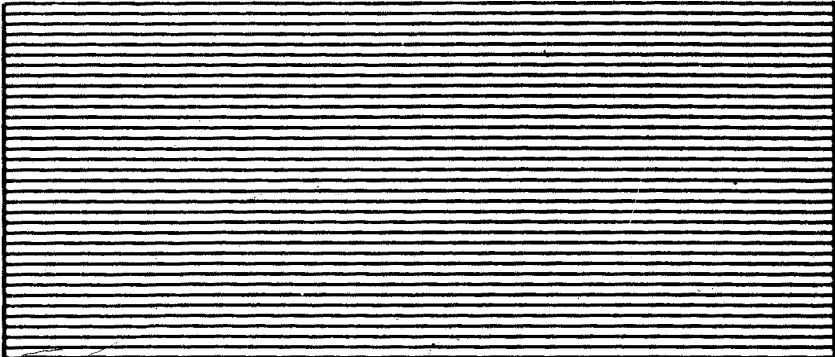
حيث μ_1, μ_2 هما نفاذية الوسط و θ_1, θ_2 هما الزوايا المشكلة مع الخط العمودي.

4-12 جد قوة المجال المغناطيسي داخل فجوة اسطوانية نصف قطرها "a" في موصل اسطواني طوله مالا نهاية ونصف قطره "a" وكثافة تياره الكهربائي J ثابتة في اي مقطع من الموصل، علماً ان محوري الموصل والفجوة متوازيان وتفصل بينهما مسافة "C"، حيث $a > b + c$.

الفصل الخامس

الحث الكهرومغناطيسي

Electromagnetic Induction



الفصل الخامس

الحث الكهرومغناطيسي

Electromagnetic Induction

بدأنا في الفصل السابق دراسة العلاقة بين الكهربية والمغناطيسية. وقد حصلنا على معلومات قيمة بهذا الخصوص على الرغم من كونها ناقصة ذلك لاننا اخذنا بنظر الاعتبار فقط المجالات المغناطيسية التي لاتعتمد على الزمن (time independent) وسنتناول في هذا الفصل سلوك المجالات الكهربية والمغناطيسية التي تعتمد على الزمن (time - dependent). ونبين كيف ان المجال المغناطيسي المتغير زمنياً (time varying magnetic field) يولد مجالاً كهربائياً والعكس بالعكس.

5-1 القوة الدافعة الكهربية (Electromotive force):

اذا اريد ان يسري تيار مستقر في موصل معين فيجب ان يوجد فرق جهد بين طرفي هذا الموصل. ويتم حفظ فرق الجهد هذا بواسطة مصدر القوة الدافعة الكهربية (electromotive force e.m.f.) وهناك انواع متعددة من الاجهزة التي توفر قوة دافعة كهربية ، مثل البطاريات والمولدات - الخ ، وهذه جميعاً تقوم بتحويل احد انواع الطاقة الى طاقة كهربية، وعلى سبيل المثال فان البطاريات تستخدم طاقة كيميائية مخزونة فيها لتوليد تيار كهربي في الدائرة، واذا كان فرق الجهد المتولد بين طرفي بطارية هو (V) فولت فهذا معناه ان قوتها الدافعة الكهربية هي (V) فولت، اذا ربط قطبا البطارية بموصل فان مجالاً كهربائياً ساكناً سيتولد فيه، والتكامل الخطي للمجال حول مسار بين نقطتين (A,B) مساو لفرق الجهد بين النقطتين ، فاذا كانت النقطتان هما قطبا البطارية فان القوة الدافعة الكهربية للبطارية تساوي :

$$V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1)$$

والآن اذا جرى تيار في الموصل فيجب على البطارية ان تؤدي عملاً يحافظ على فرق الجهد بين قطبيها ثابتاً، فاذا انتقلت شحنة مقدارها "q" من احد قطبي البطارية الى القطب الآخر عبر الموصل، فان الشغل المنجز من البطارية يكون :

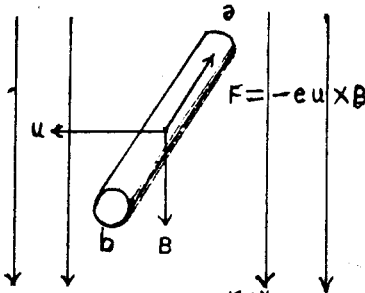
$$Vq = \int_A^B q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

القوة الدافعة الكهربائية للبطارية تساوي :

$$V = \frac{1}{q} \int_A^B q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.2)$$

لاحظ ان مصطلح القوة الدافعة الكهربائية ليس ملائماً تماماً لانه في الحقيقة لايعني قوة وانما كمية ووحداتها هي طاقة / شحنة ، على كل حال سيترسخ المفهوم الحقيقي للمصطلح في اذهاننا عند الاستخدام.

الآن نفرض ان قضيباً معدنياً يتحرك بسرعة ثابتة (u) وبالاتجاه العمودي على المجال المغناطيسي المنتظم B (كما في الشكل 5-1).



الشكل (5.1)

نتيجة لذلك ستولد قوة مغناطيسية على كل الكترول في القضيب يمكن حسابها من المعادلة (4-24) وستتحرك الالكترولونات الحرة باتجاه نهاية القضيب مجتمعة هناك مولدة مجالاً dE يحسب كما يلي :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (5.3)$$

وفرق الجهد بين نهايتي القضيب هو :

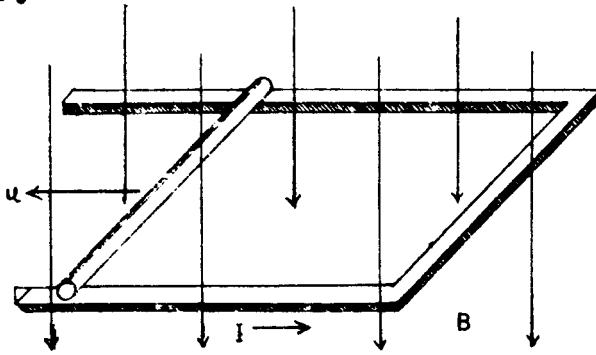
$$V_{ba} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = uBL \quad (5.4)$$

حيث L هو طول القضيب. ان فرق الجهد هذا لا يولد تياراً. لكن اذا كان هذا القضيب جزءاً من دائرة (كما هو موضح في الشكل (2-5)) فان تياراً سيجري في هذه الدائرة. ان التكامل الخطي للقوة المؤثرة على شحنة مثل q حول الدائرة يساوي :

$$\oint (q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = quBL.$$

والقوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة المغلقة والناجمة من حركة الموصل تساوي :

$$V = \frac{1}{q} \oint (q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = uBL. \quad (5.5)$$



الشكل (5.2)

ويمكن تسميتها القوة الدافعة الكهربائية الحركية (motional e.m.f) لانها تعتمد على سرعة الموصل وليس على موقعه، وهكذا يكون لدينا نوعان من الجهد فرق جهد الكهربائي المستقرة الناتج من الشحنات الثابتة (Stationary charges) و فرق جهد الكهربائي المستقرة الناتج من الشحنات المتحركة.

ان UBL تمثل الفيض المغناطيسي خلال المساحة التي يحسها القضيب في وحدة الزمن فاذا كانت Φ هي الفيض المغناطيسي الكلي خلال الدائرة فان UBL هي معدل تغير الفيض في الدائرة لذلك يمكن كتابة المعادلة الآتية :

$$|e.m.f.| = uBL = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.6)$$

والملاحظات التجريبية بهذا الخصوص كانت نتيجة اعمال كل من فاراداي (Faraday) في المملكة المتحدة وهنري (Henry) في الولايات المتحدة كل على انفراد.

2-5 قانون فاراداي للحث الكهرومغناطيسي

(Faraday's Law of Electromagnetic Induction) :

لاحظ كل من فاراداي وهنري انه :

(1) اذا حرك مغناطيس قرب سلك على شكل دائرة وبدون اي مصدر للكهربائية فان تياراً سيتولد في الدائرة ويستمر هذا التيار كلما كانت الحركة مستمرة ويختفي التيار مع توقف الحركة.

(2) تلاحظ نفس التأثيرات اعلاه اذا ماثبت المغناطيس وتم تحريك السلك الدائري قربيه، ويعطينا هذا انطباعاً ان التيار لكي يتولد في سلك يجب ان تكون هناك حركة نسبية، ولكن يمكن توليد التيار بدون اي حركة آلية.

(3) ان تياراً عابراً (transient current) يحدث في اطار سلكي اذا ماتم غلق وفتح التيار الثابت لدائرة قريبة من هذا الاطار السلكي. وبكلمة اخرى ان تياراً لحظياً يسري عندما يتغير الفيض في الدائرة ، ان الفيض المتغير يحدث مجالاً كهربائياً لذلك فان القوة الدافعة الكهربائية الموجودة في الدائرة هي التي تسبب سريان التيار، وسمى فاراداي هذه الظاهرة باسم الحث الكهرومغناطيسي (electromagnetic induction) وقد جمعت نتائج فاراداي فيما تسمى بقاعدة الفيض (flux rule).

عندما يتغير الفيض المغناطيسي في دائرة ما تتولد فيها قوة دافعة كهربائية محتثة تتناسب قيمتها مع معدل تغير الفيض.

لذلك فاذا رمزنا للقوة الدافعة الكهربائية بالرمز \mathcal{E} وكانت Φ هي الفيض فان :

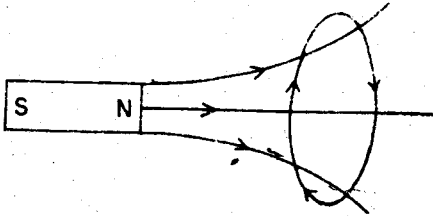
$$|\mathcal{E}| \propto \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.7)$$

واتجاه القوة الدافعة المحتثة يمكن معرفته من قانون لنز (Len'z law) الذي ينص على ان :

«اتجاه القوة الدافعة الكهربائية المحتثة يكون بالشكل الذي يجعل فيه فيضها المغناطيسي المرافق للتيار معاكس للفيض المتغير الذي سبب القوة الدافعة الكهربائية المحتثة (أي سبب القوة الدافعة الكهربائية)، لذلك في الشكل (3-5) اذا تحرك المغناطيس باتجاه اليمين اي باتجاه الاطار سيزداد الفيض المغناطيسي في الاطار وسيجري التيار المحتث بالاتجاه المبين في الشكل بحيث يكون فيضه (اي فيض التيار المحتث) معارضاً لزيادة الفيض المغناطيسي، وهذا القانون في الحقيقة هو حالة خاصة لمبدأ فيزيائوي عام (مبدأ لاشاتيليه (Le chatelier's Principle) الذي ينص على ان «اي منظومة فيزيائية (physical system) تعارض اي تغير يحصل فيها نتيجة مؤثر خارجي» .

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.8)$$

(في نظام الوحدات العالمية (S.I.) وجد ان ثابت التناسب هو وحدة واحدة).
تسمى القوة الدافعة الكهربائية المحتثة عادة باسم القوة الدافعة الكهربائية المضادة او العكسية (back e.m.f.).

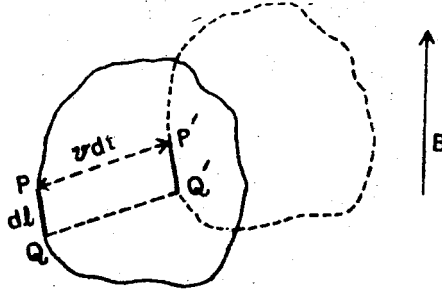


الشكل (3 . 5)

3-5 قانون الحث للدوائر المتحركة (Induction law for moving circuits)

نأخذ مثلاً للحث الكهرومغناطيسي دائرة ذات اي شكل اختياري تتحرك في مجال مغناطيسي B لا يعتمد على الزمن بسرعة لا يشترط ان تكون منتظمة مقدارها v (شكل 5-4)، سيتحرك عنصر الطول dl (PQ) في زمن قدره dt مسافة هي vdt الى الموقع

$P'Q'$. فإذا كانت سرعة الكترولونات التوصيل بالنسبة الى السلك هي u ، فان سرعتها بالنسبة الى المجال ستكون $v + u$. والقوة المؤثرة على كل الكترولون تكون $e(v + u) \times B$. ومركبة هذه القوة بمحاذاة العنصر dl هي $e(v + u) \cdot \hat{e}_l$. حيث \hat{e}_l هو وحدة المتجه باتجاه PQ . بما ان المتجه \hat{e}_l موازي للسرعة لتكون $u \times B \cdot \hat{e}_l = 0$



الشكل (5.4)

$$\therefore \{e(v + u) \times B\} \cdot \hat{e}_l = ev \times B \cdot \hat{e}_l + eu \times B \cdot \hat{e}_l$$

$$= ev \times B \cdot \hat{e}_l$$

(5.9)

وهذا يبين ان هناك مجالاً محتشاً في السلك هو E ويساوي $v \times B$ ، وتكون مركبته بمحاذاة السلك $e(v \times B) \cdot \hat{e}_l$ ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي لهذا المجال حول الدائرة.

\therefore The induced e.m.f. = \mathcal{E}

$$= \oint (v \times B) \cdot \hat{e}_l dl$$

(5.10)

وعند تحريك الدائرة فان العنصر dl يمسح خلال الزمن dt المساحة $PP'Q'Q$ وتساوي $v dt \times \hat{e}_l dl$ ، والفيض عبر هذا العنصر يساوي $(v dt \times \hat{e}_l dl) \cdot B$. والشريط يكون :

$$d\Phi = \oint B \cdot (v dt \times \hat{e}_l dl)$$

i.e. $\frac{d\Phi}{dt} = \oint B \cdot (v \times \hat{e}_l dl)$

$$= - \oint (v \times B) \cdot \hat{e}_l dl$$

(5.11)

عند مقارنة المعادلتين (5-10) و (5-11) نحصل على :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

5-4 الصيغتين التكاملية والتفاضلية لقانون فاراداي

(Integral and differential form of Faraday's law)

ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تساوي التكامل الخطي للمجال الكهربائي المحتث E حول الملف اي :

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl$$

الفيض المغناطيسي خلال الملف يساوي :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS$$

حيث أن التكامل مأخوذ حول أي مساحة محصورة بالدائرة، لذلك يمكن كتابة المعادلة

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS. \quad (5-3) \text{ بالشكل الآتي :}$$

بما ان السطح لا يغير من شكله او موقعه مع الزمن ،
فيمكن كتابة المعادلة اعلاه بالشكل الآتي :

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl = -\int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (5.12)$$

وهذه هي الصيغة التكاملية لقانون فاراداي.

باستخدام مبرهنة ستوك (Stoke's theorem)

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl = \int_S \text{curl } \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS$$

$$\therefore \int \left(\text{curl } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = 0 \quad (5.13)$$

حيث تم استبدال مشتقة الزمن الكلية (total time derivative) بمشتقة جزئية (Partial derivative) لأن الذي يهمنا هنا هو تغير المجال E مع الزمن عند ثبوت موقع

عنصر المساحة dS

بما ان المعادلة (5-13) يجب ان تطبق على اي سطح اختياري.

$$\text{curl } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.14)$$

وهذه هي الصيغة التفاضلية لقانون فاراداي للحث الكهرومغناطيسي نلاحظ من المعادلتين (5-14) و (1-30) يثبت ان للمجال الكهربائي جزءاً غير محفوظ (non - conservative part) نتيجة كثافة الشحنة الكهربائية.

يمكن ان نذكر هنا مبرهنة بدون برهان، مفيدة جداً في صياغة الكهرومغناطيسية بمصطلحات حساب المتجهات.

لاحظنا ان مصادر المجال الكهرومغناطيسي هي نوعان، الاول يكون فيه مجتمعاً مع منظومة كهربائية مستقرة تكون الطاقة فيها محفوظة خلال دورة العمليات (cyclic processes) في المنظومة، ويمكن وصف مثل هذه المصادر ذات الطاقة المحفوظة او النظام اللادوراني (irrotational system) بالمعادلة $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ حيث $\mathbf{E} = - \nabla \Phi$ ومثل هذا المجال ليس له لف (Curl) وذلك لأن :

$$\text{curl grad } \Phi = 0$$

والنوع الثاني من المصادر يكون مجتمعاً مع منظومة تتحول فيها الطاقة خلال دورة العمليات (مثلاً المجال المغناطيسي للملف اللولبي)، مثل هذا المجال يوصف بالمصادر ذات اللف (Curl Sources) وليس له تباعد (divergence) وبصورة عامة فان المجال الكهرومغناطيسي له كل انواع المصادر والمواصفات الكاملة لمثل هذا المجال المتجه يجب ان يتضمن كلا المصدرين، ومثل هذه المواصفات ليست ضرورية فحسب وانما هي كافية بحد ذاتها. يمكن ايجاد اي مجال متجه بطريقة واحدة اذا ما عرف تباعده (divergence) ومصادره ذات اللف (Curl Sources) ، وهذا هو ما يعرف بمبرهنة هيلمهولتز (Helmholtz theorem) بأخذ تباعد المعادلة (5-14) نجد أن :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

لذلك فان الحد $\nabla \cdot \mathbf{B}$ بالضرورة لا يعتمد على الزمن عند كل نقطة في الفضاء، وهذا الشرط يمكن تحقيقه منطقياً اذا ما فرضنا :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.15)$$

هذا هو B لولبي دائماً.

قانون فاراداي (14-5) لذلك له نتيجتان مهمتان :

(1) المجال الكهربائي E ليس دائماً مجالاً محافظاً عندما يكون المجال المغناطيسي متغيراً مع الزمن ، وفي الواقع فان الطاقة تتحول بين الشكل الكهربائي والشكل المغناطيسي في المجال المتغير زمنياً.

(2) لا توجد اقطاب مغناطيسية حرة ، كل الاقطاب المغناطيسية تكون زوجية موجبة وسالبة.

قانون الحث لفاراداي يبين كيف ان المجالات الكهربائية والمغناطيسية مرتبطة بعلاقات متبادلة وتحتفي طبيعتها المستقلة عندما نأخذ بنظر الاعتبار اعتمادها على الزمن، لذلك يكون من الملائم النظر الى كلا المجالين على انها مجال واحد - المجال الكهرومغناطيسي.

5-5 الحث الذاتي والحث المتبادل (Self inductance and Mutual Inductance) :

يتولد فيض مغناطيسي Φ خلال دائرة ما عندما يجري فيها تيار وهذا الفيض يظهر نتيجة مجال الدائرة المغناطيسي ويتناسب مع التيار أي :

$$\Phi = LI \quad (5.16)$$

حيث L هو ثابت .

لنأخذ وضعية تكون فيها الدائرة ثابتة لكن المجال المغناطيسي وكذلك الفيض يتغيران مع الزمن ولنفرض مثلاً ان التيار يعتمد على الزمن سيكون الفيض عندها دالة للزمن ، $\Phi = \Phi(t)$

$$\therefore \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{by 5.16}) \quad (\text{من المعادلة 5-16})$$

$$\therefore L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (5.17)$$

الكمية L تسمى بالحث الذاتي، والمعادلة (8-5) يمكن كتابتها الآن بالصيغة الآتية :

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.18)$$

يعتمد الثابت L على الشكل الهندسي للدائرة ، فالسلك الملفوف على شكل ملف لولبي يكون له حث ذاتي اكبر بكثير مما لو كان غير ملفوفاً ويعتمد ايضاً على مساحة الوسط. ويعرف الحث الذاتي بأنه الفيض الكلي خلال الدائرة عندما تسري فيها وحدة تيار ، لذلك فان الدائرة يكون لها وحدة واحدة من الحث فيبر (Weber) ويسري فيها تياراً مقداره واحد أمبير. او تمتلك الدائرة وحدة واحدة من الحث الذاتي عندما تتولد فيها قوة دافعة كهربائية مقدارها واحد فولت من تيار يتباين بمعدل واحد أمبير لكل ثانية. وتسمى وحدة الحث الذاتي باسم هنري (Henry).

لو كان لدينا ملف يحمل تياراً مقداره I_1 وقرب منه ملف ثانٍ لتولد في الملف الثاني فيض مغناطيسي Φ_2 نتيجة التيار الموجود في الملف الأول، وبما ان Φ_2 تتناسب خطياً

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \quad \text{مع } I_1 \quad (5.19)$$

حيث L_{21} مقدار ثابت، وسيكون هناك فيض في الدائرة الاولى نتيجة التيار I_2 في الدائرة الثانية.

$$\therefore \Phi_1 = L_{12} I_2 \quad (5.20)$$

حيث L_{12} مقدار ثابت ايضاً، ماهي العلاقة بين هذين الثابتين؟ ان المعادلة (4-76) تعطينا الطاقة الكامنة للمنظومة وهي :

$$U_P = - \Phi_2 I_2 = - L_{21} I_1 I_2 = - \Phi_1 I_1 = - L_{12} I_2 I_1$$

$$\therefore L_{21} = L_{12} \quad (5.21)$$

ان L_{21} يساوي L_{12} ويساوي M الذي يسمى الحث المتبادل (mutual inductance) بين الدائرتين ، والآن :

$$\begin{aligned} U_P &= - \Phi_1 I_1 = - I_1 \int \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \\ &= - I_1 \int \nabla \times \mathbf{A}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = - I_1 \int \mathbf{A}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dl_1 \end{aligned}$$

(حسب مبرهنة ستوك)

$$= -I_1 \int \left(\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I_2 \hat{e}_{r_{12}} dl_2}{|r|} \right) \cdot \hat{e}_{r_{12}} dl_1$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \iint \frac{\hat{e}_{r_{12}} dl_1 \cdot \hat{e}_{r_{12}} dl_2}{|r|} = -L_{12} I_1 I_2$$

$$\therefore L_{12} = L_{21} = M = \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{\hat{e}_{r_{12}} dl_1 \cdot \hat{e}_{r_{12}} dl_2}{|r|} \quad (5.22)$$

وتسمى هذه بصيغة نيومان (Neumann's formula) وواضح ان وحدة M هي أيضاً هنري.

مثال (5-1): يتكون ملف الاشعال في السيارة من ملفين معزولين ملفوفين بعضها حول بعض ، عدد لفات الاول 16000 لفة والثاني 400 لفة، وطول كل ملف هو 10 سم، ونصف قطر اللفات هو 3 سم، يسري في الملف الابتدائي تيار مقداره 3 أمبير ويقطعه في حوالي 10^{-4} ثانية. احسب مقدار الفولتية المحتثة في الملف الثانوي؟ تحسب كثافة الفيض المغناطيسي في الملف اللولبي من المعادلة :

$$B = \mu_0 N_1 I_1$$

حيث N_1 هو عدد اللفات لكل وحدة طول، I_1 هو التيار الذي يسري في الملف. الفيض المغناطيسي في كل لفة من الملف العلوي (top coil) هو $\mu_0 N_1 I_1 \pi r^2$ والفيض الكلي هو :

$$\Phi_2 = \mu_0 N_1 N_2 I_1 \pi r^2$$

حيث N_2 هو عدد اللفات لوحدة الطول في الملف الثاني، وتعطي القوة الدافعة الكهربائية المحتثة من المعادلة الآتية :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\mu_0 N_1 N_2 I_1 \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

$$= -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\text{Now } \frac{dI_1}{dt} = 3 \times 10^4 \text{ As}^{-1}$$

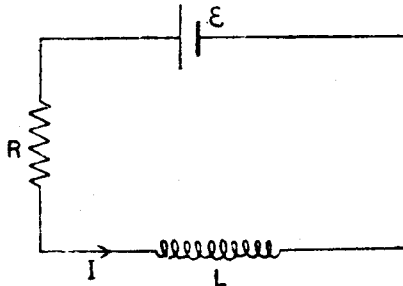
$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{E} &= 4\pi \times 10^{-7} \times 16 \times 10^4 \times 4 \times 10^8 \times 10^{-1}\pi \\ &\quad \times (0.03)^2 \times 3 \times 10^4 \\ &= 6814 \text{ volts.} \end{aligned}$$

5-6 الطاقة في المجالات المغناطيسية (Energy in Magnetic Fields)

الطاقة في المجال بالتعريف هي الشغل الكلي المنجز لتكوينها، لتكوين مجال مغناطيسي من تيار مستمر يتطلب فتح التيار أولاً، وهناك في الواقع فترة زمنية يستغرقها التيار والمجال ليصلا الى قيمها النهائية، وبما ان المجال في هذه الفترة يكون معتمداً على الزمن فان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة تتولد وتؤدي لانحياز شغل اضافي من قبل مصدر التيار، وهذا الشغل يجب اخذه بنظر الاعتبار عند احتساب الطاقة.

(أ) الطاقة المغناطيسية المخزونة في مادة حاثية

(Magnetic energy Stored in an inductor)



الشكل (5.5)

يوضح الشكل (5-5) دائرة بسيطة فيها مقاومة R ، وملف حثي L ذو حث L و \mathcal{E} هي القوة الدافعة الكهربائية للبطارية، ليكن $I(t)$ هو التيار الذي يسري في الدائرة خلال زمن مقداره t ، بما ان مقدار هبوط الجهد عبر الملف يساوي $L \frac{dI}{dt}$ ، فان المقدار الصافي للقوة الدافعة الكهربائية هو:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}.$$

حسب قانون أوم :

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (5.23)$$

والآن نحسب كمية الشغل المطلوب انجازه من القوة الدافعة الكهربائية لنقل شحنة مقدارها dQ عبر الدائرة.

$$\begin{aligned} dW &= \mathcal{E}dQ = \mathcal{E}Idt \\ \frac{dW}{dt} &= \mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} + RI^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

الشغل الكلي المنجز من البطارية خلال الفترة الزمنية (T) التي يتغير فيها التيار من 0 الى I_T يساوي :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T \mathcal{E}Idt = L \int_0^T I \frac{dI}{dt} dt + R \int_0^T I^2 dt \\ &= \frac{1}{2} LI_T^2 + R \int_0^T I^2 dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

ان الحد الأول من الطرف الايمن يمثل الطاقة المخزونة في الحثية (inductance) خلال الزمن T ، والحد الثاني يمثل الطاقة التي تتبدد على شكل حرارة من المقاومة.

(ب) الطاقة المغناطيسية المخزونة في سلسلة من الحثيات.

(Magnetic energy stored in a series of inductances)

نشق الآن صيغة عامة اكثر تعبيراً عن الطاقة المخزونة في سلسلة من الحثيات. سنفرض أن جميع التيارات في كل الدوائر لها قيمة ابتدائية هي صفر، وستصل الى قيمها المتوازنة في جميع الدوائر في وقت واحد عندما $t=T$. بحيث نرى انه عند اللحظة (t) التي تقع ضمن الفترة $0 \leq t \leq T$ تكون قيم التيار في كل دائرة $I_k(t)$ والفيض خلالها $\Phi_k(t)$ تساوي الجزء (α) من القيم النهائية.

$$I_k(t) = \alpha I_k, \quad \Phi_k(t) = \alpha \Phi_k \quad \text{اي :}$$

والقوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الدائرة K هي :

$$\mathcal{E}_k = \frac{d\Phi_k(t)}{dt}.$$

لذلك فان الشغل الكلي المنجز في الدائرة K يساوي :

$$\begin{aligned} W_k &= \int_0^T \mathcal{E}_k I_k(t) dt = I_k \Phi_k \int_0^T \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt \\ &= I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} I_k \Phi_k. \end{aligned} \quad (5.26)$$

وعند جمعها لكل الدوائر :

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k. \quad (5.27)$$

وبما ان الفيض المغناطيسي يعتمد على كلا الحثين الذاتي والمتبادل،فانه يمكن كتابة المعادلة :

$$\Phi_k = L_k I_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} I_j \quad (5.28)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_k L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{j \neq k} M_{kj} I_k I_j \quad (5.29)$$

لذلك فان لزوج من الملفات

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

where $M = M_{12} = M_{21}$.

سنوضح الآن النتيجة في المعادلة (5-29) بصيغة عامة اكثر وبشكل قياسي.
لأي دائرة لدينا :

$$\Phi_k = \int_k \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint_k \text{curl } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = \oint_k \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl \quad (5.30)$$

لذلك تتغير المعادلة (5-27) الى الصيغة الآتية :

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_k I_k \oint_k \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_l dl.$$

ويمكن الانتقال من الحالة غير المترابطة الى حالة الاستمرارية في المعادلة اعلاه وذلك باستخدام العلاقة $I \hat{\mathbf{e}}_l dl = \mathbf{j} d\tau$ واخذ التكامل حول كل الفضاء لأن الاضافات تظهر فقط في المناطق التي تكون فيها \mathbf{j} محددة،اي ان :

$$\sum_k \oint_k \rightarrow \int_V$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) d\tau \quad (5.31)$$

$$\text{Now } \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \right\} d\tau. \quad (5.32)$$

Since,

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

يمكن كتابة المعادلة (5-32) بالشكل الآتي :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_V \left\{ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \right\} d\tau. \quad (5.33)$$

وباستخدام مبرهنة التباعد لتحويل التكامل الثاني، يمكن كتابة المعادلة (5-33) بالشكل الآتي :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (5.34)$$

وبما ان التكامل الحجمي يجب ان يؤخذ حول كل الفضاء، فان التكامل السطحي يجب ان يؤخذ حول كرة في اللانهاية، لأن \mathbf{A} و \mathbf{H} تسقط سريعاً عند المسافات الطويلة ($H \sim r^{-2}$, $A \sim r^{-1}$) والتكامل السطحي يزول عندما $r \rightarrow \infty$. لذلك .

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\tau. \quad (5.35)$$

وهذه المعادلة تشابه المعادلة (2-43) في الكهربائية المستقرة، وتبين امكانية اعتبار الطاقة المغناطيسية على انها منتشرة خلال المنطقة المشغولة بالمجال وبكثافة مقدارها $\frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$. وبما ان $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ فان الكثافة تساوي $\frac{1}{2} \mu H^2$ أو $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$.

لاحظ ان هذه العلاقة تم الحصول عليها على فرض ان \mathbf{B} تتناسب خطياً مع \mathbf{H} . اي ان قيمة μ للوسط لاتعتمد على شدة المجال ، لذلك يجب تعديل هذه العلاقة لتلائم المواد اللاخطية (nonlinear materials) .

في بنائنا للعلاقات التي نستنتجها ونواصل بها سيرنا وقفنا على سقالة (Scaffolding) الدوائر. وعلى كل حال فان القوى الكهربائية التي تظهر للوجود في اثناء تغير الفيض المغناطيسي لا تعتمد على وجود سريان فعلي للتيار، حيث ان سريان التيار هو مؤثر وليس سبباً، ولهذا فان رفعنا هذه السقالة فان معادلة فاراداي فقط اي التي تبقى واقفة تخيل وجد قوة دافعة كهربائية حول منحنى رياضي اعتباطي في الفراغ مساو لتكامل المركبة المماسية لـ E حول المنحنى. لذلك فرض ماكسويل (Maxwell) امكانية تطبيق المعادلة على اي منحنى مغلق وقد بينت التجارب صحة هذا الافتراض.

5-7 معادلات ماكسويل (Maxwell's Equations):

حين بدأ ماكسويل عمله كانت المعادلات الآتية في مجال الكهربائية والمغناطيسية معروفة وهي :

1- قانون كوس للكهربائية المستقرة.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.36)$$

2- النتيجة المناظرة للمجال المغناطيسي.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.37)$$

3- قانون فاراداي للحث.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.38)$$

4- قانون أمبير للقوة الدافعة المغناطيسية :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (5.39)$$

القوانين الثلاثة الأولى قوانين عامة تصح للمجالات الساكنة والمتحركة (Static and dynamic fields) بينما اشتقت المعادلة الرابعة من ملاحظات الحالة المستقرة (Steady state) ويجب تبيان مدعى صحتها للحالات المتغيرة زمنياً (time varying fields) ، عند اخذ تباعد طرفي المعادلة (5-39) نحصل على :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.40)$$

وهذه صحيحة لظاهرة الحالة المستقرة (Steady state phenomena)، على كل حال عندما يكون التيار متغيراً مع الزمن لاتتوافق النتيجة مع مبدأ حفظ الشحنة المنعكس في معادلة الاستمرارية.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.41)$$

وقد اعطى ماكسويل هذه الوضعية الحرجة حق قدرها واقترح مخرجاً لذلك، حيث ادرك ان الصعوبة تظهر من التعريف الناقص لكثافة التيار الكلية الوارد في المعادلة (5-39) باستخدام قانون كاوس (5-36) يمكن كتابة (5-41) على الشكل الآتي :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \left(- \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

i.e. $\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.42)$

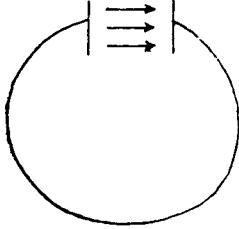
حيث استبدل ماكسويل المقدار \mathbf{j} في قانون أمبير بالمقدار $\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ و بهذا التحسين يأخذ قانون أمبير الشكل الآتي :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.43)$$

ويصح القانون بهذه الصيغة لظاهرة الحالة المستقرة كما ويتوافق مع معادلة الاستمرارية (equation of continuity) للمجالات التي تعتمد على الزمن. ويسمى المقدار $\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ باسم كثافة تيار التوصيل (Conduction current density) والمقدار الثاني $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ والذي يظهر نتيجة الازاحة الكهربائية مع الزمن يسمى باسم «كثافة تيار الازاحة» (displacement current density).

على ماذا يدل فعلاً او يتضمن تيار الازاحة؟ ان هذا التيار ليس له مغزى التيار المعروف الذي هو حركة الشحنات، ويمكن توضيحه بصورة جلية اذا ما اخذنا دائرة بسيطة كالتي موضحة في الشكل (5-6) والتي تبين متسعة مشحونة ربط لوحاها بسلك موصل. التيار الذي يسري في هذا السلك يساوي معدل تغير الشحنة على اللوحين اي أن:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.44)$$



الشكل (5.6)

حيث Q هي الشحنة الموجودة على اللوح الموجب للمتسعة ، وترتبط الشحنة على اللوحين بالمجال في المتسعة بالعلاقة الآتية :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (5.45)$$

حيث A تمثل مساحة اللوحين .

$$\therefore I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} = A \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\frac{I}{A} = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (5.46)$$

والآن فان المقدار $\frac{I}{A}$ يعطينا كثافة التيار، لذلك فالكمية $\frac{\partial D}{\partial t}$ يمكن تأويلها على انها كثافة بعض التيار التي تناظر على سبيل المثال - التيار الذي يجب ان يسري في الفضاء (او في الفراغ) عندما يتم ربط لوحى المتسعة المشحونين بسلك موصل، وبذلك فهو يكل تيار التوصيل. ويمكن اخذ فكرة عن الحجم النسبي لكل من فرعي التيار في الموصل، اذا

اخذنا سلكاً نحاسياً فيه مجالاً كهربائياً E والذي يساوي $E = E_0 e^{-i\omega t}$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \therefore |\mathbf{j}|^2 = \sigma^2 |E_0|^2$$

and

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \text{ Hence, } \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|^2 = \omega^2 \epsilon_0^2 |E_0|^2$$

$$\therefore \left| \frac{\mathbf{j}}{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \right| = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}.$$

$$\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ للنحاس}$$

$$\therefore \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \sim \frac{10^{19}}{\omega}$$

وهكذا فان النسبة كبيرة جداً لكل الترددات (frequencies) لذلك لا يعطي تيار الازاحة مغزى التيار الناتج من حركة الشحنات الحرة في دراسة الدوائر المستمرة (Continuous circuits) ولها نتائج بعيدة المدى في مجالات اخرى، وهي ناتجة بصورة رئيسة من الحد الاضافي لقانون أمبير الذي لم يكن يغطي تنوعاً وافراً في الظاهرة الكهرومغناطيسية الجديدة.

هناك اربع معادلات تكون فيها متجهات المجال E, D, B, H صحيحة وفي كل مكان

وهذه المعادلات هي :

$$(i) \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(iii) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$(iv) \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.47)$$

وهذه هي المعادلات الاساسية للمجال الكهرومغناطيسي وتعرف باسم معادلات

ماكسويل (Matwell's Equations) •

5-8 اضمحلال الشحنة الحرة (Decay of free charge):

يمكن استنباط احد الاستنتاجات المهمة المتعلقة باضمحلال الشحنة الحرة من معادلات

ماكسويل، ويمكن كتابة المعادلة (5-47) على النحو الآتي:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.48)$$

عند اخذ تباعد الطرفين وبافتراض σ و ϵ ثابت، نحصل على :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

$$= \frac{\sigma \rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{من (i) في المعادلة 5-47})$$

وبتكامل المعادلة الاخيرة نحصل على :

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad (5.49)$$

$$\tau = \epsilon / \sigma \quad \text{حيث} \quad (5.50)$$

ويعرف هذا باسم زمن الاسترخاء (relaxation time) وهذه المعادلة توضح ان اي توزيع اصلي للشحنة يضمحل اسياً (exponentially) بمعدل لا يعتمد على اي توزيع كهرومغناطيسي آخر قد يحدث.

5-9 جهود المجال الكهرومغناطيسي (Potentials of Electrostatic Field):

يمكن الحصول على وصف كامل للمجال الكهرومغناطيسي بحل معادلات ماكسويل. وهذه العملية تكون اسهل اذا ما وضعت هذه المعادلات بصيغ مناسبة، وسيكون من الافضل عادة خفض عدد المعادلات وذلك باذخال كميات جديدة تسمى الجهود الكهرومغناطيسية (electromagnetic potentials) وقد سبق ان تبينا هذه التقنية في معالجتنا للمجال الساكن (Static field) وعبرنا عن الجهد الكهربائي المستقر بقيم عددية للجهد (Scalar potential), $(\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi)$ ، وعن المجال المغناطيسي بقيم متجهة للجهد (Vector potential), $(\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})$. سنتناول الآن جهود المجالات الكهرومغناطيسية عندما يكون هذان المجالان (الكهربائي والمغناطيسي) متغيرين مع الزمن. في الحالة المعتمدة على الزمن (time dependent) تكون المعادلة (ii) في (5-47) صحيحة ايضاً ويمكن تطبيقها.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.51)$$

لذلك يمكن التعبير عن B بصيغة الجهد المتجه، أي

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.52)$$

وعند أخذ المعادلة التالية (iii) والتي لاتتضمن أي تيارات أو شحنات.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \therefore \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

بما ان لف (Curl) تدرج دالة عددية يزول، فيمكن التعبير عن الكمية داخل القوس على انها تدرج دالة عددية هي Φ .

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

وهكذا حللنا المعادلتين المتجانستين (ii) و (iii) في المعادلة (5-47) بالمتباير A و Φ وعندما تعرف A و Q يمكن إيجاد B و E.

لاحظنا فيما مضى ان المعادلة (5-52) لاتعرف A تعريفاً كاملاً فاذا اضفنا تدرج اي دالة عددية اعتباطية الى الجهد المتجه او لنقل غيرنا A الى المقدار :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (5.55)$$

فان المجال المغناطيسي لايتغير، ولكن، هل E لاتتغير ايضاً. انها ستتغير بالتأكيد مالم نأخذ بنظر الاعتبار بعض التحفظات حتى لاتؤثر اضافة $\nabla \psi$ على المجال الكهربائي يجب بالمقابل تحويل الجهد العددي Φ الى Φ' حيث :

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.56)$$

ويمكن تحقيق هذا بتعويض \mathbf{A}' و Φ' في المعادلة (5-54) :
اي قانون فيزيائي يمكن التعبير عنه بتعاير الجهود الكهرومغناطيسية A و Φ لايتأثر بتحويلات من النوع المذكور في (5-55) و (5-56) وتسمى هذه التحويلات باسم

تحويلات مقياسية (gauge transformations) ومن الواضح ان المعادلات التي تتضمن مثل هذه الجهود يجب ان تكون ثوابت قياسية (أو لامتغيرات قياسية) (gauge invariant).

تبيننا في الكهربية المستقرة الحالة $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ والتي باجتماعها مع المعادلة $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ تحديد \mathbf{A} ، اما لتحديد \mathbf{A} في الكهرومغناطيسية فيجب علينا ان نغير اختيارنا وان نضع شرطاً اضافياً على \mathbf{A} وبالشكل الذي لا يؤثر على القوانين الفيزيائية. او بكلمات اخرى ان يتوافق والتحويلات التي في (5-55) و (5-56) حيث ان \mathbf{E} و \mathbf{B} لاتتأثران، ولكي ننفذ هذا يجب ان نحول انتباهنا الى المعادلتين غير المتجانستين المتبقيتين ونعني (i) و (iv) في المعادلة (5-47) بتعويض المعادلة (5-54) في المعادلة (i) نحصل على :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

$$\text{i.e.} \quad -\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho / \epsilon_0 \quad (5.57)$$

يمكن كتابة المعادلة (iv) على النحو الآتي :

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

$$\text{i.e.} \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{j}$$

$$\text{i.e.} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mu \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{j}$$

$$\text{i.e.} \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{j} \quad (5.58)$$

حيث استخدمنا المتطابقة :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

ما زال امامنا الخيار الخاص مفتوحاً بالشرط الذي نريد فرضه على A وقد اخترنا A و Φ بحيث أن :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.59)$$

وسنجد حلاً بهذا التعويض ان الحدين الوسطين في (5-58) سيحذفان وستختصر المعادلة الى :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (5.60)$$

وتصبح المعادلة (5-57) حسب الشرط المعروض في (5-59) بالشكل الآتي :

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\nabla^2 \Phi + \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho/\epsilon_0,$$

or

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0. \quad (5.61)$$

وهكذا نجد ان اختيار حالتنا هذه كان عادلاً حيث اثمر عن معادلتين مستقلتين ، واحدة لـ A (5-60) والثانية لـ Φ (5-61) وترتبط A بالمتجه J وترتبط Φ بالكمية العددية ρ . والاكثر من ذلك ان كل من المعادلتين لها نفس الصيغة او الشكل، اي ان الجهدين يتحققان في نفس المعادلات. وهكذا فان الحالة التي اخترناها تقدم تناظراً تاماً بين جهود المتجه والجهود العددية، فيما يخص الحالة المستقرة (Steady state) فان مشتقة الزمن تزول ونحصل على :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \text{ and } \nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0$$

الشرط المعروض في (5-59) يسمى شرط لورنتس المقياسي (Lorentz gauge condition) ، والمقياس (gauge) المستخدم في المغناطيسية المستقرة $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ يسمى مقياس كولومب (Coulomb gauge).

لاحظنا ان المجال الكهربائي E والمجال المغناطيسي B لايتغيران عند اجراء تحويلات مثل (5-55)، (5-56) ويجب على الجهود المحولة بهذه الطريقة ان تحقق شرط (لورنتس) لذلك فان الدالة المقياسية (gauge function) ψ والتي تبقى اعتباطية يجب ايضاً ان تحقق شرطاً معيناً. بما ان الجهود الاصلية والمحولة يجب ان تحقق شرط لورنتس لدينا :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \quad (5.63)$$

i.e. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\psi) + \mu\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = 0$

i.e. $\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi + \mu\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$

$$\nabla^2\psi - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{لذلك} \quad (5.64)$$

وهكذا فان التحويلات القياسية المحددة الآتية :

$$\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$$

$$\Phi' \rightarrow \Phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$(5.65)$$

وحيث ψ تحقق المعادلة :

$$\nabla^2\psi - \mu\epsilon_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

تحفظ (Preserve) شرط لورنتس .

في 5-10 المزيد حول شرط لورنتس القياسي

:(More about Lorentz gauge condition)

شرط لورنتس القياسي ليس اعتباطياً تماماً كما يبدو للوهلة الاولى ، حيث يمكن إيجاد علاقة له في المبادئ الاولى للنظرية الكهرومغناطيسية :

قانون كولومب، وقانون بايوت - سافارت ومبدأ حفظ الطاقة.

في اثناء اشتقاق قانون امبير الدائري (Ampere's Circuital Law) من قانون بايوت - سافارت لتوزيع التيار الثابت (Stationary current distribution) يظهر شرط كولومب القياسي $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ بصورة طبيعية، والآن سنوسع هذه الاشتقاقات ليشمل الشروط شبه الثابتة. (quasi - stationary conditions).

يقودنا قانون بايوت - سافارت الى التعبير الآتي :

$$A(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{j(r_1)}{|r_2 - r_1|} d\tau \quad (5.66)$$

حيث يشير الرمز السفلي الدليلي (Subscript) 1 و 2 الى مصدر واحداتيات المجال ، لذلك :

$$\nabla_2 \cdot A(r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} j(r_1) \cdot \nabla_2 \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right] d\tau \quad (5.67)$$

حيث تعمل ∇_2 على r_2 فقط،

$$\nabla_2 \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right] = - \nabla_1 \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla_2 \cdot A(r_2) &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} j(r_1) \cdot \nabla_1 \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right] d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{V_1} \left\{ \frac{1}{|r_2 - r_1|} \right\}' \nabla_1 \cdot j(r_1) d\tau_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{V_1} \nabla_1 \cdot \left\{ \frac{j(r_1)}{|r_2 - r_1|} \right\} d\tau_1 \right] \quad (5.68) \end{aligned}$$

باستخدام مبرهنة التباعد ، يمكن كتابة التكامل الثاني لتوزيع المصدر المحدد (bounded source distribution) كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \nabla_1 \cdot \left\{ \frac{j(r_1)}{|r_2 - r_1|} \right\} d\tau_1 &= \int \frac{j(r_1)}{|r_2 - r_1|} \cdot \hat{e}_n dS = 0 \\ \therefore \nabla_2 \cdot A(r_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \left\{ \frac{1}{|r_2 - r_1|} \right\} \nabla_1 \cdot j(r_1) d\tau_1. \quad (5.69) \end{aligned}$$

وعلاقة حفظ الشحنة تعطينا :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot j &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{أو} \\ \therefore \nabla_2 \cdot A(r_2) &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \left\{ \frac{1}{|r_2 - r_1|} \right\} \frac{\partial \rho(r_1)}{\partial t} d\tau_1. \quad (5.70) \end{aligned}$$

ولدينا من قانون كولومب :

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} d\tau_1 \\ \therefore \nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) &= -\mu_0\epsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} d\tau_1 \right\} \\ &= -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_2)}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.71)$$

او بصورة اعم :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\quad (5.72)$$

والذي هو شرط لورنتس القياسي :

$$\begin{aligned}\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla_2 \times \{ \nabla_2 \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \} \\ &= \nabla_2 \{ \nabla_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \} - \nabla_2^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_2). \\ &= -\nabla_2 \left[\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_2)}{\partial t} \right] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\epsilon_0 \nabla_2 \Phi(\mathbf{r}_2) \right] \\ &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \mathbf{E} \right] = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.73)$$

$$\text{The second term} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}_2) - \nabla_2^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \nabla_2^2 \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} d\tau$$

(حيث استخدمنا المعادلة (3-162))

$$\therefore \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]\quad (5.74)$$

نلاحظ ان هذه المعالجة تقودنا ايضاً الى تيار الازاحة،

5-11 طاقة المجال وزخم المجال (Field Energy and Field Momentum) :

لنتذكر التعابير العامة لطاقات المجال للمغناطيسية المستقرة والمجال الكهربائي المستقر

والتي هي :

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d\tau \quad \text{and} \quad W_M = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d\tau\quad (5.75)$$

سنحاول الآن إيجاد تعابير للطاقة الكهرومغناطيسية في الوضعيات المعتمدة على الزمن
(time - dependent situations).

ان القوة على شحنة متحركة مثل q تعطى حسب المعادلة الآتية :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.76)$$

والمعدل الذي ينجز فيه الشغل على هذه الشحنة هو:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.77)$$

ولا ينجز المجال المغناطيسي شغلاً عندما يكون عمودياً على سرعة الشحنة.
إذا وجد توزيع مستمر للشحنة فان المعدل الكلي للشغل المنجز في حجم معين هو :

$$\int \rho(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) d\tau = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau. \quad (5.78)$$

وبالتعويض عن قيمة \mathbf{j} من المعادلة (iv) في (5-47) نحصل على :

$$\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau = \int \left[\mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right] d\tau \quad (5.79)$$

Now $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [\text{by (iii) of 5.47}]$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau &= \int \left[\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d\tau \\ &= \int \left[\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \right] d\tau - \int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau \end{aligned} \quad (5.80)$$

باستخدام مبرهنة التباعد لتحويل التكامل الاول نحصل على

$$\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau = \int_S (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS - \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau$$

حيث S هي الحدود السطحية للحجم V ، لذلك :

$$- \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS. \quad (5.81)$$

إذا فرضنا ان ϵ و μ ثوابت، يكون لدينا للوساط الخطية (linear media):

$$\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}] d\tau$$

لذلك :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}] d\tau = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) d\tau + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS \quad (5.82)$$

بما ان المجال الكهرومغناطيسي يحتوي على كلا المجالين الكهربائي والمغناطيسي، فيكون منطقياً الافتراض ان الطاقات المعطاة في (5-57) تمثل الطاقة الكهرومغناطيسية الكلية، لذلك يمكن اعتبار $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ على انها كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية (electromagnetic energy density) ولذلك ايضاً يمكن تأويل الطرف الايسر للمعادلة (25-8) على انه معدل تقصان الطاقة المخزونة في المجال الكهرومغناطيسي ويعطى الحد الاول من الطرف الايمن ، كما هو موضح اعلاه مقدار الشغل المنجز من قوى المجال على الشحنات الموجودة في الحجم ، ان وحدات المتجه $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ هي $\frac{\text{طاقة}}{\text{مساحة} \times \text{زمن}}$ وهكذا يمكن تأويل الحد الاخير على انه يمثل الطاقة التي تسري عبر الحدود في وحدة الزمن، والمتجه $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ الذي يعطينا معدل خروج الطاقة عبر وحدة مساحة في الحدود يسمى متجه بوينتتك (Poynting vector) ، ويرمز له بالحرف N.

يمكن كتابة المعادلة (82-5) بصيغة تفاضلية على الشكل الآتي :

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} + \text{div } \mathbf{N} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (5.83)$$

وفي الوسط الذي موصلته تساوي صفرأ فان : $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = 0$.

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} + \text{div } \mathbf{N} = 0 \quad (5.84)$$

وهذه المعادلة لها نفس صيغة معادلة الاستمرارية (41-5) (equation of continuity)

حيث ان الكثافة الحجمية للكمية المحفوظة (Conserved quantity) هنا هي \mathcal{E}_M وكثافة التيار (Current density) هي N : هذا التناظر يقودنا الى نفس الاستنتاجات التي توصلنا اليها اعلاه بخصوص فيض الطاقة الكهرومغناطيسية حسب متجه بوينتتك ،

$N=ExH$ ، وهكذا فإن المعادلة (5-82) تمثل قانون حفظ الطاقة، وهي تبين ان مقدار النقص في الطاقة الكهرومغناطيسية لوحدة الزمن في حجم معين V يساوي مقدار الشغل المنجز من قوى المجال لوحدة الزمن زائداً الفيض الخارج لوحدة الزمن، وهذا ما يعرف باسم مبرهنة بوينتسك (Poynting theorem)، ونفس الحسابات تثبت ان المجال الكهرومغناطيسي يمتلك زخماً.

القوة على حيز يحتوي على شحنات وتيار هي :

$$F = \int_V (\rho E + j \times B) d\tau. \quad (5.85)$$

فإذا كان P_{mech} هو مجموع عزوم كل الجسيمات :

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \int_V (\rho E + j \times B) d\tau. \quad (5.86)$$

ومن معادلة ماكسويل لدينا ،

$$\rho = \nabla \cdot D; j = \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dP_{mech}}{dt} &= \int_V \left\{ (\nabla \cdot D)E + \left(\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} \right) \times B \right\} d\tau \\ &= \int_V \left\{ (\nabla \cdot D)E + B \times \frac{\partial D}{\partial t} - B \times (\nabla \times H) \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Since } \frac{\partial}{\partial t} (D \times B) = D \times \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} \times B$$

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = \int_V \left[(\nabla \cdot D)E + \left(D \times \frac{\partial B}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (D \times B) - B \times (\nabla \times H) \right] d\tau$$

لأن $\nabla \cdot B = 0$ وإضافة المقدار $(\nabla \cdot B)H$ الى القوس قائم الحرف او حاصرة قائمة الزاويتين (square bracket) لا يغير النتيجة :

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dP_{mech}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V (D \times B) d\tau &= \int_V \left[(\nabla \cdot D)E + (\nabla \cdot B)H - \{D \times (\nabla \times E)\} \right. \\ &\quad \left. - \{B \times (\nabla \times H)\} \right] d\tau \quad \left(\because \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \right) \quad (5.87) \end{aligned}$$

من الواضح، ان التكامل في الحد الثاني من الطرف الايسر يمثل الزخم، وبما انه لا يشترك مع كتل الجسيمات وانما يحتوي فقط على المجالات ، نعرفه باسم الزخم الكهرومغناطيسي. P_{field} ، $g = [DXB]$ المتجه ، g يسمى كثافة الزخم الكهرومغناطيسي (electromagnetic momentum density) ، والطرف الايمن يمكن ان يحول الى تكامل سطحي ويعرف على انه سريان الزخم (momentum flow) نستنتج من المعادلة (5-87) ان الزخم الكلي لنظام مغلق يتكون من مجال وجسيمات زخم محفوظ.

يمكن ملاحظة الترابط بين متجه كثافة الزخم g ومتجه بوينتنگ N ، وهكذا :

$$g = [D \times B] = [\epsilon E \times \mu H] = \mu \epsilon [E \times H] = \mu \epsilon N \quad (5.88)$$

تمارين الفصل الخامس

5-1 مجال مغناطيسي فضائي منتظم ($B = B_0 \sin \omega t$) (Spatially uniform magnetic field)

، واتجاهه يشكل زاوية مقدارها θ مع المستقيم العمودي على
اطار دائري (circular loop). جد مقدار القوة الدافعة الكهربائية المحتثة
في الاطار؟

5-2 قرص دائري مستوٍ نصف قطره "a" يدور حول محوره العمودي على مستواه
بسرعة "f" دورة في الثانية، وهناك مجال مغناطيسي منتظم B مواز لمحور
الدوران. برهن ان وجود قوة دافعة كهربائية بين محور القرص وحافته
الخارجية (rim) قيمتها $\mathcal{E} = f B \pi a^2$ (قرص فاراداي) ؟

5-3 ملف لولبي (solenoid) ملفوف بانتظام طوله 300 mm وقطره 15 mm وعدد
لفاته 2500 لفة، وضع في مجال منتظم كثافة فيضه 4T وتيار قيمته 2A ير في
الملف. جد العزم المغناطيسي وعزم الدوران (torque) المؤثر عليه؟

5-4 الكترونات في بيتاترون (Betatron) تتحرك في مدار دائري في غرفة مفرغة
(Vacuum chamber) في مجال مغناطيسي B ، تم تعجيلها بزيادة الفيض الرابط
للمدار ، برهن على ان المجال المغناطيسي في مدار دائري مستقر يساوي نصف
متوسط المجال المغناطيسي خلال فترة التعجيل.

5-5 افرض ان شحنة تتحرك بسرعة منتظمة بمحاذاة محور دائرة واحسب تيار الازاحة
الذي يسري في الدائرة ثم احسب تيار التوصيل فيها وبرهن على انها متطابقتان.

5-6 خط نقل (transmission line) يتكون من زوج من اسلاك متوازية غير قابلة للنفوذ (nonpermeable) نصف قطريها r_2, r_1 يسري تيار في احدهما ويعود في الآخر وموزع بصورة منتظمة على المقطع العرضي للسلك. فاذا فصل هذان السلكان بمسافة t . جد الجهد المتجه للمنظومة.

5-7 مغناطيس صغير ذو عزم مغناطيسي يدور حول مركزه بسرعة زاوية مقدارها ω برهن على $\frac{dm}{dt} = \omega \times m$ ، ثم برهن على ان حركة المغناطيس تولد مجالاً كهربائياً E يحسب من المعادلة :

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ (r \cdot m) \omega - (r \cdot \omega) m \right\}$$

5-8 كرة عازلة ثابت عزلها E ونصف قطرها "a" مركزها في نقطة الاصل وتدور بسرعة زاوية مقدارها ω حول المحور Z فاذا سلط مجال كهربائي منتظم E_0 باتجاه المحور X برهن على وجود مجال مغناطيسي مقداره :

$$H = \frac{2}{3} \sigma \omega a \text{ for } r < a,$$

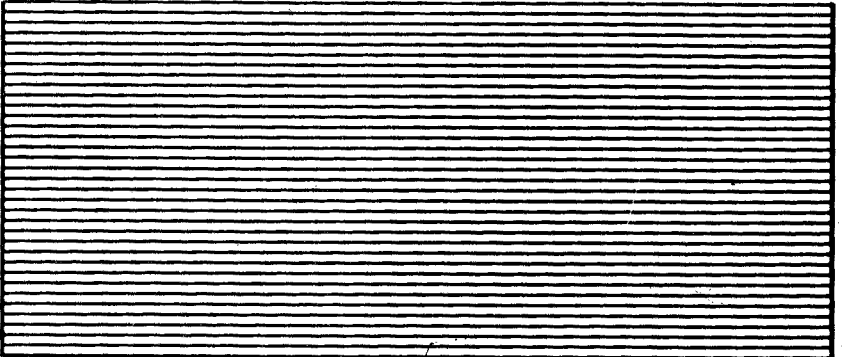
$$= \frac{3(m \cdot r) r}{4\pi r^3} - \frac{m}{4\pi r^3} \text{ for } r > a,$$

حيث $m = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma \omega$, σ والشحنة الممتدة على سطح الكرة.

الفصل السادس

الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic waves



الفصل السادس

الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic waves

6-1 الامواج المستوية في الاوساط غير الموصلة

: (Plane Waves in Non - conducting Media)

لاحظنا ان معادلات ماكسويل تعطينا كل المعلومات التي يمكن استخلاصها من النظرية القديمة للمجالات الكهربائية والمغناطيسية . سنبين في هذا الفصل ان المجالات المتولدة من شحنات متحركة يمكنها مغادرة مصدرها والتنقل في الفضاء على شكل موجات، وهذه هي احدى السمات المميزة المهمة لمعادلات ماكسويل. اذا فرضنا ان $\sigma = 0$ ، ϵ ثابت، فان لف المعادلة (Curl of equation) (iii) من (5-47) يعطينا :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}).$$

وباستخدام مطابقة متجهة معروفة جداً لتحويل الطرف الايسر وكذلك استخدام المعادلة (iv) من (5-47) لتحويل الطرف الايمن للمعادلة اعلاه نحصل على :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

i.e.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla(\rho/\epsilon_0). \quad (6.1)$$

وفي المنطقة الخالية من الشحنات الحرة تكون ρ مساوية للصفر :

$$\therefore \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

بافتراض $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ يمكن مقارنة القيم النسبية للحددين الثاني والثالث من المعادلة (6-2) وهكذا نجد أن :

$$\frac{\left| \frac{\mu\sigma \partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{\left| \frac{\mu\epsilon \partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right|} \approx \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1}{\omega\tau} = \frac{T}{2\pi\tau} \quad (6.3)$$

حيث استبدلنا ϵ/σ بزمن الاسترخاء (relaxation time) τ و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (5-5) ،
حيث T هي فترة التذبذب (period of oscillation) فإذا كانت $\tau \ll T$ وهي
حالة الوسط الموصل، الحد الثالث للمعادلة (6-2) يكون هو المتسلط أو السائد
(dominant) ويمكن كتابة المعادلة (6-2) كما يلي :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (6.4)$$

معادلة انتشار (diffusion equation). أما إذا كانت $\tau \gg T$ فإن الحد الذي يحتوي
على σ يمكن إهماله ويكون لدينا للوسط غير الموصل (non - conducting
medium) المعادلة الآتية :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.5)$$

ويمكن استخلاص معادلة مشابهة تماماً فيما يخص \mathbf{H} وهي :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (6.6)$$

and

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.7)$$

وهذه المعادلات هي من نوع معادلات الموجة المألوفة لنا. ومعادلة الموجة العامة هي:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.8)$$

حيث v هي سرعة الانتشار (velocity of propagation) وبمقارنة المعادلتين
(6-7) و (6-8) مع المعادلة (6-8) فإن السرعة في حالتنا هذه هي :

$$v = (\epsilon\mu)^{-1/2} \quad (6.9)$$

وفي الفراغ

$$v = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad (6.10)$$

ونستنتج ان التغيرات الزمنية للمجال الكهربائي او المغناطيسي تنتشر بنفس السرعة :

$$v = (\epsilon \mu)^{-1/2}.$$

يجب ملاحظة ان المعادلة (6-8) هي معادلة عددية لكن المعادلتين (6-5) و (6-7) هما معادلتان متجهتان اي ان هاتين المعادلتين ضمان لكل مركبة من مركبات H و E .
ابسط أنواع الموجات، والذي ينتج من حل المعادلتين
(6-5) و (6-7) هو الموجة المستوية (plane wave) والبساطة النسبية لحل
الموجة لمعادلات ماكسويل توضح بعض الخواص الفيزيائية الاساسية المهمة للمجال
الكهرومغناطيسي دون اللجوء الى الرياضيات العالية او لان الموجة المستوية هي
التقريب الجيد للموجات الفعلية في كثير من الحالات فاننا سندرس
حل الموجة المستوية للمعادلات المذكورة اعلاه.

الموجة المستوية هي الموجة التي تكون سعتها - مركبة متجه المجال - ثابتة حول كل
النقاط الواقعة في مستوي عمودي على اتجاه الانتشار. وهذا المستوي يكون جبهة الموجة
(Wave - front) التي تتقدم بسرعة v بالاتجاه العمودي عليها (أي على الموجة)، تعتبر
مركبات متجه المجال في المستوي دوال للمسافة العمودية بين المستوي وتقطعة الاصل
وكذلك دوال للزمن. وسنختار محور الاحداثيات بالشكل الذي يصبح فيه اتجاه الانتشار
واقعاً على احد المحاور الرئيسية وليكن المحور السيني، وبما ان دالة الموجة في هذه الحالة
لا تعتمد على z ، y ، فان معادلة الموجة تأخذ شكلاً احادي البعد (one dimentional
form) مثل :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.11)$$

وهذه لها حل عام هو :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)} \\ &= f(x - vt) + g(x + vt) \end{aligned} \quad (6.12)$$

حيث A و B كيات ثابتة (معقده عادة) و $k = \omega/v$ حيث v هي سرعة طور الموجة (phase velocity of the wave) تمثل المعادلة (6-12) انتقال الموجة الى اليمين وإلى اليسار بسرعة مقدارها v . ويمكننا افتراض صيغة مجال الموجة المستوية بالشكل الآتي:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.13)$$

$$H(x, t) = H_0 e^{i(kx - \omega t + \alpha)}. \quad (6.14)$$

قد يتساءل بعضهم عن مدى افتراض E و H في طور واحد كما فعلنا في المعادلتين اعلاه؟ في الحقيقة ان مدى احقية هذا الافتراض ستظهر في المناقشة الآتية: اذا كان ممكناً سنجعل α هي الفرق في الطور (phase difference) بين E و H أي:

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$H = H_0 e^{i(kx - \omega t + \alpha)}.$$

على المجالين E و H تحقيق معادلة ماكسويل:

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

(لأن $\frac{\partial}{\partial z}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}$ للمقدار E تساوي صفرًا وذلك لأن E تنتقل باتجاه المحور X). من المعادلة الثانية لدينا:

$$ikE_{0y} e^{i(kx - \omega t)} = i\omega\mu H_0 e^{i(kx - \omega t + \alpha)}.$$

وعند اخذ الاجزاء الحقيقية منها يصبح لدينا:

$$kE_{0y} \cos(kx - \omega t) = \omega\mu H_0 e \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

وهذا صحيح لكل من ω و α والقيمة الوحيدة لـ e التي تحقق هذه الحالة هي صفر، لذلك فان E و H في طور واحد. ونسبة السعة لـ H و E تعطى من المعادلة الآتية

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu\omega}{k} = Z_0 \quad (6.15)$$

النسبة Z_0 لها ابعاد الممانعة او المقاومة (impedance) وتسمى الممانعة او المقاومة الذاتية (intrinsic impedance) للوسط.

وهكذا فان E و H للموجة المستوية احادية اللون (monochromatic) يكونان دائماً في طور واحد ونسبة سعتها في أي لحظة وأي تقطة من المعادلة الآتية :

$$\frac{E}{H} = \frac{\mu\omega}{k} = \mu v. \quad (6.16)$$

وللموجة المستوية في الفضاء الحر :

$$Z_0 = \mu_0 v_0 = 376.7\Omega. \quad (6.17)$$

في اثناء انتشار الموجة قد يغير التجهان اتجاهها في المستوي $y-z$ دون تغيير الشروط التي وضعناها لحد الآن :

ولانتشار الموجة في اي اتجاه اعتباطي لدينا :

$$E(r, t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (6.18)$$

$$H(r, t) = H_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}. \quad (6.19)$$

حيث E_0 و H_0 متجهان ثابتان مع الزمن و $K = \hat{\theta}_k |K|$ هو متجه الانتشار ، $\hat{\theta}_k$ هو متجه الوحدة باتجاه الانتشار. بما ان E و H حقيقيان، فاننا نهم فقط بالاجزاء الحقيقية من (6-18) و (6-19).

ان E و H المستخلصان بهذه الطريقة يجب ان تحقق معادلات ماكسويل ايضاً. ويجب التنبيه بشدة هنا ان هذا ليس تلقائياً لان معادلات ماكسويل لتحديد تماماً المجال الكهرومغناطيسي.

عند تمويض (6-18) في المعادلة (i) من (5-47) نحصل على :

$$\nabla \cdot (E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}) = 0$$

والتي تقودنا الى العلاقة الآتية :

$$k \cdot E = 0 \quad (6.20)$$

بالمثل عند التمويض (6-19) في (iii) للمعادلة (5-77) نحصل على :

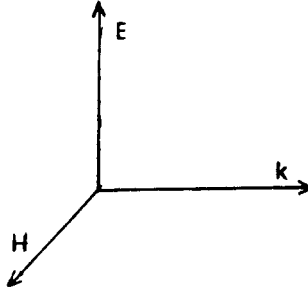
$$k \cdot H = 0 \quad (6.21)$$

وهذا يبين ان كلاً من E و H عموديان على متجه الانتشار K. ومثل هذه الموجة تسمى موجة مستعرضة (transverse wave). والموجات المستوية الكهرومغناطيسية جميعها مستعرضة في طابع مميز.

لنعوض الآن (6-18) في المعادلة (iii) من (47-5).

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \times \mathbf{E}_0 \\ &= i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H}\end{aligned}\quad (6.22)$$

وهكذا فان H عمودي على كل من K و E وبمعنى آخر ان E و H العموديين على اتجاه الانتشار متعامدان فيما بينها ايضاً، والمتجه $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ يشير الى اتجاه الانتشار. والمتجهات E و H و K تكون مجموعة متعامدة يمينية (right hand orthogonal set) كما في الشكل (6-1).



شكل رقم (6.1)

وتعطي سرعة الموجة الكهرومغناطيسية في الفضاء الحر من المعادلة الآتية :

$$v_0 = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}}$$

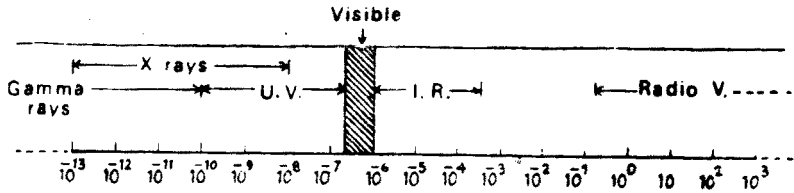
وافضل قيمة لـ ϵ_0 التي حددها روزا (Rosa) وبورسي (Porsey) وتعني $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ وقيمة μ تساوي $4\pi \times 10^{-7}$ ، وعند تعويض هذه القيم في المعادلة

اعلاه نحصل على :

$$v_0 = 2.99784 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

(6.23)

وهذه هي نفس سرعة الضوء في الفضاء الحر. وهذا يقودنا الى الاستنتاج ان الضوء ببساطة عبارة عن شكل من الاشعاع الكهرومغناطيسي. الاشعاعات السينية (x-rays) وفوق البنفسجية (ultra violet) وتحت الحمراء (infra red) والاشعاعات الراديوية واشعاعات الموجات الدقيقة (microwave) كلها اشعاعات كهرومغناطيسية تختلف فقط في ترتيب قيم اطوالها الموجية، ويوضح الشكل (6-2) الطيف الكهرومغناطيسي.



شكل رقم (6.2)

لقد تم التحقيق المباشر للاشعة الكهرومغناطيسية التي تنبأ بها ماكسويل في تجارب هينريخ هيرتز (Heinrich Hertz) الذي كان اول من اعلن وجود موجات تتولد من التفريغ الشراري المتذبذب (Oscillatory spark discharge) وبين انها تمتلك الكثير من خواص الضوء المألوفة مثل الانعكاس (reflection) والانكسار (refraction) والتداخل (interference) والاستقطاب (polarization).

عرفنا سرعة طور الموجة الكهرومغناطيسية في وسط معدني بأنها :

$$v = \frac{1}{(\epsilon\mu)^{1/2}} = \frac{1}{(\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r)^{1/2}} = \frac{v_0}{(\epsilon_r\mu_r)^{1/2}} \quad (6.24)$$

وهي اقل من v_0 .

وسرعة موجة الضوء في وسط غير مفرق (non-dispersive medium) هي :

$$v = \frac{c}{n}$$

حيث n هو معامل انكسار الوسط (refractive index) وبمقارنة هذه العلاقة مع

(8-24) نحصل على :

$$n = (\epsilon_r\mu_r)^{1/2} \quad (6.25)$$

يجب ملاحظة كون هذه المعادلة صحيحة فقط عندما يتم إيجاد n, μ_r, ϵ_r عند نفس التردد.

6-2 الاستقطاب (Polarization):

لاحظنا في المعادلة (6-18) ان المتجه E ثابت مع الزمن. ومثل هذه الموجة يقال عنها انها مستقطبة خطياً (linearly polarized). ان مستوي المتجه الكهربائي E حالة المعادلة (6-13) هو مستوي $y-z$ يأخذ على انه مستوي الاستقطاب معرفة طبيعة الاشعاعات الكهرومغناطيسية كانت النظرة السائدة اخذ مستوي المتجه المغناطيسي في البصريات على انه مستوي الاستقطاب يمكن اعتبار الموجة المستوية احادية اللون خطية الاستقطاب بأنها تطابق مكاني لحلين خطيين مستقلين لمعادلة الموجة، مثل :

$$E = (\hat{e}_y E_{0y} + \hat{e}_z E_{0z}) e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.26)$$

حيث \hat{e}_y, \hat{e}_z متجهات وحدة بمحاذاة المحورين y و z ويسميان متجهات الاستقطاب (Polarization vectors) والسعات E_{0y}, E_{0z} سعات معقدة (Complex amplitudes)، ويمكن التعبير عن اي كمية معقدة بأنها حاصل ضرب كمية حقيقية (real quantity) في عامل طور معقد (Complex phase factor) وهكذا.

$$\begin{aligned} E_{0y} &= E_0^y e^{i\alpha} \\ E_{0z} &= E_0^z e^{i\beta} \end{aligned} \quad (6.27)$$

حيث E_0^y و E_0^z هي السعات الحقيقية، ولذلك يكون الحلان المستقلان :

$$\begin{aligned} E_y &= \hat{e}_y E_0^y e^{i(kx - \omega t + \alpha)} \\ E_z &= \hat{e}_z E_0^z e^{i(kx - \omega t + \beta)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

لذلك ،

$$E = E_y + E_z = (\hat{e}_y E_0^y e^{i\alpha} + \hat{e}_z E_0^z e^{i\beta}) e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.29)$$

or

$$E = \{\hat{e}_y E_0^y + \hat{e}_z E_0^z e^{i(\beta - \alpha)}\} e^{i(kx - \omega t + \alpha)}. \quad (6.30)$$

ولندرس الآن الحالات الخاصة الآتية :

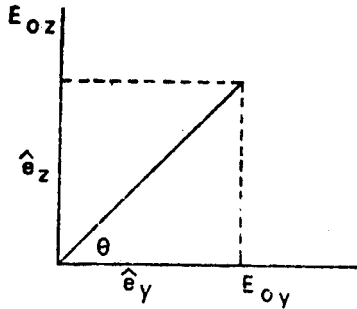
(ii) أن يكون لـ E_y و E_z نفس الطور أي $\beta = \alpha$ أو أن يكون بينهما فرق في الطور يساوي تكامل احد مضاعفات π ، أي $\beta = \alpha \pm m\pi$ ، حيث $m = 0, 1, 2, \dots$ الخ

فان :

$$\mathbf{E} = (\hat{e}_y E_y \pm \hat{e}_z E_z) e^{i(kx - \omega t + \alpha)} \quad (6.31)$$

هذه المعادلة تمثل موجة خطية الاستقطاب، ومحصلة متجه الاستقطاب تتذبذب بمحاذاة الخط الذي يكون الزاوية $\theta = \tan^{-1} \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$ ، وكما هو موضح في الشكل

(6-3)



شكل رقم (6.3)

(iii) سعة كل من المتجهين متساوية أي $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ ولكن طورهما يختلف بمقدار $\pi/2$.

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{e}_y \pm i\hat{e}_z)e^{i(kx - \omega t + \alpha)}. \quad (6.32)$$

مركبات المجال E (أخذين الاجزاء الحقيقية فقط) :

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$E_z = \mp E_0 \sin(kx - \omega t + \alpha). \quad (6.33)$$

وهذا هو تقدم موجة بمحاذاة المحور X الذي يكون فيه المتجه E له طول ثابت هو E_0 وهو دالة للزمن حيث يغير باستمرار من اتجاهه فقط. لدينا من المعادلة (6-33) :

$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1. \quad (6.34)$$

لذلك فان المتجه يرسم دائرة بتردد ω . مثل هذه الموجة يقال عنها انها مستقطبة دائرياً (circularly polarized) ويحدد اتجاه الدوران من اشارة E_z في المعادلة (33-6)، اذا كانت الاشارة موجبة يكون الدوران عكس اتجاه حركة عقرب الساعة على فرض ان المراقب يواجه الموجة القادمة، ويقال عن الموجة ان لها استقطاباً دائرياً ايسر (Left circular polarization) اولها حلزوني موجب (positive helicity)، اما اذا كانت الاشارة سالبة فان الدوران يكون باتجاه حركة عقرب الساعة وفي هذه الحالة تكون الموجة ذات استقطاب دائري ايمن (right circular polarization) اولها حلزوني سالب (negative helicity).

(iii) اذا كانت $E_y \neq E_x$ and $\beta = \alpha \pm \pi/2$. تكون مركبات E هي :

$$E_y = E_0 y e^{i(kx - \omega t + \alpha)}$$

$$E_x = E_0 x e^{i(kx - \omega t + \alpha \pm \pi/2)}.$$

وعند اخذ الاجزاء الحقيقية نجد ان :

$$E_y = E_0 y \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$E_x = \mp E_0 x \sin(kx - \omega t + \alpha)$$

$$\frac{E_y^2}{(E_0 y)^2} + \frac{E_x^2}{(E_0 x)^2} = 1 \quad (6.35)$$

وترسم محصلة المتجه في هذه الحالة بيضوياً (ellipse) ويقال عن الموجة انها مستقطبة بيضوياً (elliptically polarized).

3-6 فيض الطاقة في الموجة المستوية (Energy flux in a plane wave)

بينما في الفصل السابق ان متجه بوينتنگ $N = ExH$ يمثل معدل اشعاع الطاقة عبر وحدة المساحة. وسنبين الآن كيفية احتساب متجه بوينتنگ لموجه مستوية عبر فيها عن متجه المجال H و E بصيغة ساعات معقدة.

يعطينا المتجه $N = ExH$ المعدل اللحظي (instantaneous rate) لسريان الطاقة. بما ان المتجه E و H يتغير توافقياً (harmonically) مع الزمن ، يمكن ايجاد متوسط سريان الطاقة بأخذ $N = ExH$ حول فترة زمنية كاملة.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle R_e \mathbf{E} \times R_e \mathbf{H} \rangle \quad \text{أي} \quad (6.36)$$

حيث تقف R_θ للاجزاء الحقيقية فقط.
 بما أن \mathbf{E} و \mathbf{H} كيات معقدة يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{-i\omega t} \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6.37)$$

حيث $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ كلها حقيقية.

$$\begin{aligned} \therefore R_e \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 \cos \omega t + \mathbf{E}_2 \sin \omega t \\ R_e \mathbf{H} &= \mathbf{H}_1 \cos \omega t + \mathbf{H}_2 \sin \omega t \\ \therefore R_e \mathbf{E} \times R_e \mathbf{H} &= (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cos^2 \omega t + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \sin^2 \omega t \\ &\quad + \{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)\} \sin \omega t \cos \omega t \end{aligned}$$

والآن حول فترة زمنية كاملة من التذبذب :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

and $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$

$$\therefore \langle R_e \mathbf{E} \times R_e \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2)\} \quad (6.38)$$

وسنحسب الآن $R_e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{-i\omega t} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2)e^{i\omega t} = (\mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2) (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) &= (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cos^2 \omega t + (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cos \omega t \sin \omega t \\ &\quad + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \cos^2 \omega t - (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cos \omega t \sin \omega t \\ &\quad - (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cos \omega t \sin \omega t + (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \sin^2 \omega t \\ &\quad + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cos \omega t \sin \omega t + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \sin^2 \omega t \\ &= (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) \end{aligned} \quad (6.39)$$

ومكنا

$$\langle R_e \mathbf{E} \times R_e \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} R_e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (6.40)$$

لذلك

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

بما ان عوامل الزمن (time factors) تلتفى تلقائياً في النتيجة، يمكن الحصول على المعدل الزمني للطاقة (time averaged energy) من متجهات المجال.

الآن (انظر 6-22)

$$\text{Now} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \quad (\text{see } 6.22)$$

$$\therefore \quad \mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*}{\omega\mu} \quad (6.41)$$

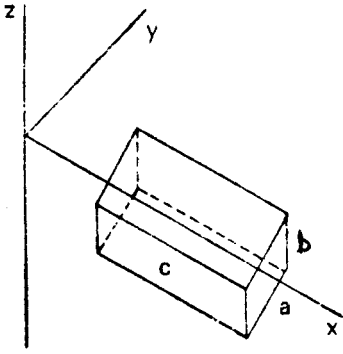
$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= \frac{1}{\omega\mu} \{\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*)\} \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)\mathbf{k} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}^*\} \\ &= \frac{1}{\omega\mu} |E_0|^2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\text{Hence,} \quad \langle N \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\omega\mu} \mathbf{k} = \frac{|E_0|^2}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (6.42)$$

(لأن $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_k$ حيث $\hat{\mathbf{e}}_k$ هو وحدة المتجه في اتجاه الانتشار، $\{k = \frac{\omega}{v} = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}\}$.)

اذا كانت الموجة تتحرك باتجاه المحور X فيكون سريان الطاقة باتجاه X ايضاً وهو مساوي في جميع النقاط التي يكون المحور z بالنسبة لها متساوياً. الشكل (6-4) يوضح متوازي مستطيلات طوله «c» بمحاذاة المحور x وضمليه الآخرين «a» و «b» كثافة الطاقة في اي مجال كهرومغناطيسي (E.D + B.H) $\frac{1}{2}$ وهكذا فان الطاقة الكلية تساوي :

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d\tau \quad (6.43)$$



شكل رقم (6.4)

إذا فرضنا ان المجالين E و H يؤثران بمحاذاة المحورين y و z على التوالي، يمكن كتابة:

$$\mathbf{E} = \hat{e}_y E_0 e^{i(kx - \omega t)} = \hat{e}_y E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{H} = \hat{e}_z H_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \therefore U &= \frac{1}{2} \int_0^c \int_0^a \int_0^b [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] dx dy dz \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^c [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] dx. \end{aligned}$$

إذا كانت T هي فترة التذبذب (period of oscillation) فان متوسط الطاقة في الصندوق المتوازي المستطيلات هو :

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{ab}{2T} \int_0^T \int_0^c [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] dx dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^c \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \right] dx \\ &= \frac{abc}{4} [\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2] \end{aligned} \quad (6.44)$$

لذلك فان المعدل الزمني لكثافة الطاقة (time averaged energy density) المجتمع مع الموجة هو

$$\begin{aligned}
\langle U_d \rangle &= \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) = \frac{1}{4} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \\
&= \frac{1}{4} \left(\epsilon |E_0|^2 + \mu \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu} \cdot \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*}{\omega \mu} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \epsilon |E_0|^2 + \epsilon |E_0|^2 \right\} = \frac{\epsilon}{2} |E_0|^2
\end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_k |E_0|^2 = \langle U_d \rangle (\epsilon \mu)^{-1/2} \hat{\mathbf{e}}_k \\
&= v \langle U_d \rangle \hat{\mathbf{e}}_k.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

وهذا يبين ان المعدل الزمني لسريان الطاقة يكون باتجاه انتشار الموجة ويساوي سرعة طور الموجة مضروباً في متوسط كثافة الطاقة. لذلك فان الطاقة تسري بنفس سرعة الموجة نفسها.

6-4 الموجات المستوية في وسط موصل (Plane waves in a conducting medium)

بيننا في البند (6-1) من هذا الفصل ان المجالين الكهربائي والمغناطيسي يحققان تطابق المعادلتين (6-2) و (6-6) في الوسط الخالي من الشحنات الحرة.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{6.6}$$

كلتا المعادلتين تحتوي على حدود المضاةلة (Damping terms) تتناسب مع موصلية الوسط. سنحاول ايجاد حلول الموجة المستوية لمعادلات ماكسويل لوسط موصل. سنفرض ان متجهي المجال E و H يتغيران توافقياً مع الزمن:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{6.47}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \tag{6.48}$$

بتعويض (6-47) في المعادلة (6-2) :

$$-k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mu \omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i \sigma \mu \omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad [k^2 - \epsilon \mu \omega^2 - i \sigma \mu \omega] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.49)$$

$$\therefore \quad k^2 = \epsilon \mu \omega^2 \left[1 + \frac{i \sigma}{\epsilon \omega} \right] \quad (6.50)$$

الحد الاول ذو علاقة بتيار الازاحة والحد الثاني بتيار التوصيل.

لكل موجة هناك علاقة دالية (functional relationship) بين عدد الموجات K وتردد الموجة ω . ونسمى هذه العلاقة علاقة التفريق (dispersion relation). للموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ علاقة تفريق هي :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

اما للوسط الموصل فهي العلاقة (6-50) اذا كانت σ تساوي صفراً (اي فضاء

$$\text{حر}) \quad k^2 = \epsilon \mu \omega^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

وهي العلاقة التي استنبطناها قبل قليل، وستوفر لنا هذه العلاقة معلومات قيمة حول انتشار الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط.

لاحظنا ان متجه الانتشار K يكون كمية معقدة في الوسط الموصل. ولجعله ملائماً للاستخدام سنمبر عنه كما يلي :

$$k = \alpha + i\beta \quad (6.51)$$

وعند تربيع هذه العلاقة ومقارنتها مع المعادلة (6-50) نجد :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \epsilon \mu \omega^2 \quad (6.52)$$

$$2\alpha\beta = \sigma \mu \omega$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[1 + \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]^{1/2} \quad (6.53)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[-1 + \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]^{1/2} \quad (6.54)$$

وسأخذ الجذر التربيعي الموجب وذلك لكي يخضع الحل للشكل المناسب لـ K في الفضاء الحر. بما أن $K = \alpha + i\beta$ ، يمكن كتابة المعادلتين (6-47) و (6-48) كما يلي :

$$E = E_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r - \omega t)}$$

$$H = H_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r - \omega t)}$$

هاتان المعادلتان تؤثران عدم امكانية انتشار الموجة المستوية في وسط موصل دون توهن (attenuation) عند انتشار الموجة المستوية في وسط موصل تتولد تيارات في الوسط نتيجة مجال الموجة الكهربائي المتذبذب، ويجب انجاز شغل لسحب هذه التيارات وهناك جزء من الطاقة يفقد على شكل حرارة في الوسط، لذلك يحصل وهن في الموجة والكمية β تسمى معامل الامتصاص (absorption coefficient) وهي قياس لهذا الوهن.

6-5 الظاهرة السطحية (The Skin Effect) :

يظهر الحد $i\sigma\mu$ في المعادلة (6-49) من الحد المتضمن للمقدار $\frac{\partial E}{\partial t}$ في المعادلة (6-2)، أي من تيار التوصيل، ولكن يظهر الحد $\epsilon\mu\omega^2$ من الحد المتضمن للمقدار $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ في نفس المعادلة أي من تيار الازاحة، وسيسيطر تيار التوصيل على تيار الازاحة في كل الاوساط الموصلة تقريباً، لذلك سيكون حذف الحد الاوسط في المعادلة (6-2) تقريباً مقبولاً جداً، وهذا هو الحال للوسط جيد التوصيل.

$$\nabla^2 E = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6.55)$$

والحل المتوهن (او الحل الذي يتضمن التوهن) (attenuated solution) لهذه المعادلة هو:

$$E = E_0 e^{-\beta r} e^{i(\alpha r - \omega t)} \quad (6.56)$$

ان المقدار $\frac{\sigma}{\omega} \gg 1$ يكون اكبر بكثير من الواحد للموصل الجيد اذا كان التردد ليس عالياً جداً.

من المعادلتين (6-53) و (6-54)

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \frac{1}{\delta}, \text{ where } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (6.57)$$

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-r/\delta} e^{j(\frac{r}{\delta} - \omega t)} \quad (6.58)$$

نجد من المعادلة (6-58) ان السعة تقل $\frac{1}{e}$ مرة من قيمتها عند السطح عندما تساوي $r = \delta$ ، لذلك فان الكمية δ هي قياس للعمق الذي تخترقه الموجة الكهرومغناطيسية في موصل جيد قبل ان تقل قيمتها الى $\frac{1}{e}$ مرة من قيمتها عند السطح، وتسمى المسافة ' δ ' بعمق السطح (Skin depth).

ونستنتج من العلاقة (6-57) ان العمق السطحي يقترب من الصفر اذا ما اقتربت الموصلية من اللانهاية وهو صغير للموصلات الجيدة في التيارات عالية التردد وهكذا فان للنحاس $\sigma = 58 \times 10^6 \text{ mhos/m}$ (هو مقلوب Ohm) وفيما يلي مقدار العمق السطحي في ترددات مختلفة.

التردد (Frequency)	العمق السطحي (Skin depth)
60 Hz	$8.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
1 MHz	$6.6 \times 10^{-5} \text{ m}$
30 GHz	$3.8 \times 10^{-7} \text{ m}$

وسيعطينا الجدول الآتي فكرة عن العمق السطحي في مواد مختلفة :

المادة (Material)	التردد (Frequency)	δ
فضة (Silver)	100 M Hz	10^{-7} m
المنهوم (Aluminum)	50 Hz	1.25×10^{-2} m
ماء البحر (Sea Water)	30 KHz	10^{-1} m

وهكذا يمكن صنع موصل جيد حق من موصل رديء اذا ما طلي بطبقة رقيقة من الفضة او النحاس، ووهن الموجات المفاجيء يعني في الدوائر عالية التردد ان التيار يسري على اسطح الموصلات فقط. والعمق السطحي العالي نسبيا لماء البحر يوضح لماذا تصبح الاتصالات الراديوية للفواصات صعبة تحت عمق عدة امتار.

تمارين الفصل السادس

6-1 إذا علمت ان مركبات المجال الكهربائي في الفراغ عند الزمن t هي $E_y=0, E_x=0$ والمجال المغناطيسي $H=0$ في $t=0$. برهن ان مركبات المجال المغناطيسي عند الزمن t هي $H_y=0, H_x=0$ ، وبرهن ايضاً انه لا يوجد فيض رئيس في الطاقة في هذا السؤال .

$$H_z = -a \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \sin kx \sin \omega t .$$

6-2 موجتان مستويتان احاديتا اللون لهما نفس التردد خطيتا الاستقطاب ، متعامدتان، وتنتشران بنفس الاتجاه، ومستوي احدي الموجتين يتقدم على الاخرى بزواوية مقدارها ϕ . جد استقطاب الموجة الناتجة؟

6-3 برهن على انه :-

(i) اذا تحركت موجة مستوية احادية اللون خطية الاستقطاب في وسط غير موصل موحد الخواص في جميع الاتجاهات (isotropic non - conducting medium)، فان المعدل الزمني لكثافة طاقتها يتوزع بالتساوي بين المجالين المغناطيسي والكهربائي.

(ii) اذا تحركت هذه الموجة في وسط موصل فان متوسط الطاقة في المجال المغناطيسي يكون اكبر منه في المجال الكهربائي.

6-4 احسب سعة المجال المغناطيسي لشعاع الليزر (Laser beam) يبلغ قطره 10^{-3} متر في الفضاء الحر، اذا كانت طاقة الليزر هي واحد واط.

6-5 جد العمق السطحي الذي تبلفه موجة راديوية ذات تردد واطيء طولها الموجي $(3 \times 10^3 \text{ m})$ في ماء البحر، علماً ان الموصلية الكهربائية لماء البحر هي تقريباً $\sim 4 (\Omega \text{ m})^{-1}$

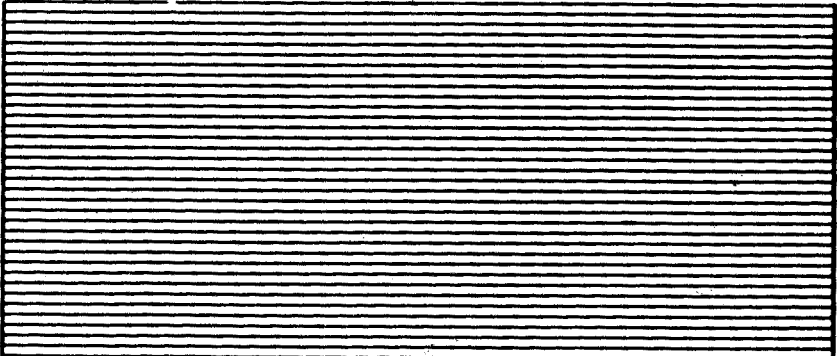
6-6 تتأين جزيئات الغاز في طبقة الايونسفير بالاشعة فوق البنفسجية من الشمس.
جد السامحية النسبية لطبقة الايونسفير لموجات ترددها ω اذا الغينا المجال
المغناطيسي الناتج من الشحنات المتحركة وفرضنا ان كثافة الالكترونات الحرة
هي n_0 لوحدة الحجم.

6-7 اذا فرضنا ان قابلية توصيل وسامحية ونفوذية وسط ما لاتتغير مع التردد، فهل
يتصرف وسط ذي $\sigma = 0.1 \text{ mho}$ $\epsilon_r = 1$ $\mu_r = 40$ كوصل او عازل عند التردد (ا)
50KHz (ب) 10GHz.

الفصل السابع

الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة

Electromagnetic waves in Bounded Media



الفصل السابع

الامواج الكهرومغناطيسية في الاوساط المحددة

Electromagnetic waves in Bounded Media

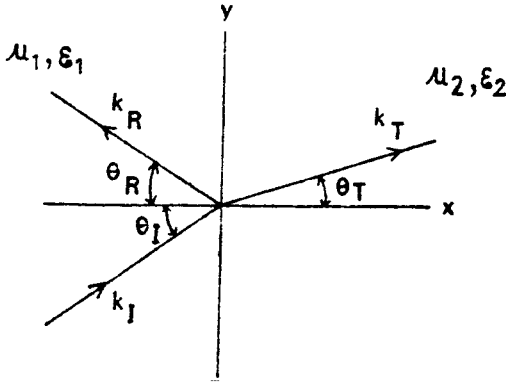
سندرس في هذا الفصل سلوك الموجات الكهرومغناطيسية في الحدود بين اوساط مختلفة. ففي منظومة لموجة مستوية منتظمة ساقطة ثبت ان اسهل الشروط الحدودية معالجة هي لتلك التي لها القدرة على ان تعكس موجة مستوية منتظمة اخرى. وهذا يحدث عندما تكون الحدود مستوية لانهائي الامتداد (plane of infinite extent) وتميل الحدود المنحنية الى استطارة (Scatter) الموجة المستوية الساقطة عليها الى اتجاهات مختلفة في آن واحد. وعلى الرغم من ان مثل هذه المسائل يمكن حلها مبدئياً وذلك بتطابق مجموعة او سلسلة لانهائية من موجات مستوية منتظمة الا اننا سنحصر دراستنا بالحدود المستوية فقط.

عندما تسقط موجات مستوية على الحدود بين وسطين فان قسماً من طاقة السقوط تعبر الوسط في حين ينعكس البعض الآخر. ان انعكاس (reflection) وانكسار (refraction) الموجات الضوئية على السطح الفاصل بين وسطين مختلفين في معامل الانكسار يعتبر ظاهرة عادية ومألوفة ، وسنبين الآن كيف ان النظرية الكهرومغناطيسية تقدم لنا توضيحاً بسيطاً لهذه الظاهرة، وهذا سيبين ايضاً كيف ان البصريات (optics) تدخل ضمن اطار كهروديناميكية ماكسويل (Maxwell's electrody namics)

7-1 انعكاس وانكسار الموجات المستوية عند تداخل مستوي :

(Reflection and Refraction of Plane wave at a plane interface)

نأخذ وسطين عازلين غير موصلين ($\sigma=0$) (two non - conducting dielectric media) نرمز لها "1" و "2" محدة خواصها الثابت $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ ومفصولين بحد مستوي (المستوي $X=0$) (الشكل 1 - 7).



شكل رقم (7.1)

افرض ان موجة كهرومغناطيسية مستوية تستقطب بصورة مائلة على حد فاصل مستوي. سيكون هناك عادة موجة منعكسة (reflected wave) وموجة منتقلة (transmitted wave) وسوف نسأل الآن عن مقدار الطاقة المنعكس للموجة الساقطة ومقدار الطاقة المنتقلة.

يمكن التعبير عن مجالات الموجات الساقطة والمنعكسة والمنتقلة بالشكل الآتي :

$$E_I = E_{0I} \exp \{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega_I t)\}, H_I = \frac{\mathbf{k}_I \times E_I}{\omega_I \mu_1} \quad (7.1)$$

$$E_R = E_{0R} \exp \{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t)\}, H_R = \frac{\mathbf{k}_R \times E_R}{\omega_R \mu_1} \quad (7.2)$$

and

$$E_T = E_{0T} \exp \{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t)\}, H_T = \frac{\mathbf{k}_T \times E_T}{\omega_T \mu_2} \quad (7.3)$$

حيث ان الرموز السفلية الدلالية للموجات الساقطة والمنعكسة والمنتقلة هي T,R,I على التوالي، والكميات E_{0T}, E_{0R}, E_{0I} هي سعات عددية مستقلة عن الزمن التي قد تكون معقدة. ويمكن ايجاد العلاقة بالمجال الكلي للشروط الحدودية في المستوي $X=0$. يمكن ان تكون المركبات المماسية لـ E و H مستمرة عبر الحدود في جميع النقاط وكل الاوقات في حالة كون الاس (exponential) نفسها للمجالات الثلاثة وهذا يمكن اذا :

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T$$

اي ان التردد (frequency) لا يتغير في الموجة المنعكسة والمنتقلة و :

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \quad (7.4)$$

وهذا يثبت ان جميع متجهات الانتشار (propagation vectors) متحدة المستوى (Coplanar). اذا اخترنا \mathbf{r} في مستوي الحدود (اي $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{r} = 0$) حيث ان $\hat{\mathbf{e}}_n$ يمثل متجه وحدة عمودي على المستوي) وفي مستوي متجه الانتشار يتبع ماييلي :

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T. \quad (7.5)$$

الآن متجهات الانتشار \mathbf{k}_R و \mathbf{k}_I يقعان في نفس الوسط وكذلك لها نفس القيمة.

$$\therefore \theta_I = \theta_R \quad (7.6)$$

بما أن :

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T$$

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \frac{k_T}{k_I} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \quad (\because k = \omega \sqrt{\epsilon \mu})$$

وللمواد غير المغناطيسية يمكن ان نفرض ان $\mu_2 = \mu_1$

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \text{ Snell's law} \quad (7.7)$$

قانون سنيل

حيث n_1 و n_2 يمثلان معاملي انكسار الوسطين 1 و 2 . وتعتبر المعادلتين (7.6) و

(7.7) ايسط قوانين البصريات الهندسية التي نألفها. لنحاول الآن ايجاد العلاقة بين

متجهات المجال المختلفة. طالما ان معادلات التباعد $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ يمكن ايجادها

باستخدام عامل التباعد (divergence operator) في بقية معادلات ماكسويل التي

تتضمن \mathbf{E} و \mathbf{H} نتيجة التحقق التلقائي للشروط الحدودية على \mathbf{D}_n و \mathbf{B}_n فما اذا التقت

شروط \mathbf{E}_1 و \mathbf{H}_1 ، والشروط هي :

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = \mathbf{E}_T \times \hat{\mathbf{e}}_n \quad (7.8)$$

$$(\mathbf{H}_I + \mathbf{H}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = \mathbf{H}_T \times \hat{\mathbf{e}}_n. \quad (7.9)$$

ويكمن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل الآتي :

$$(\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I + \mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_R) \times \hat{\mathbf{e}}_n = (\mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T) \times \hat{\mathbf{e}}_n \quad (\because \mu_1 = \mu_2) \quad (7.10)$$

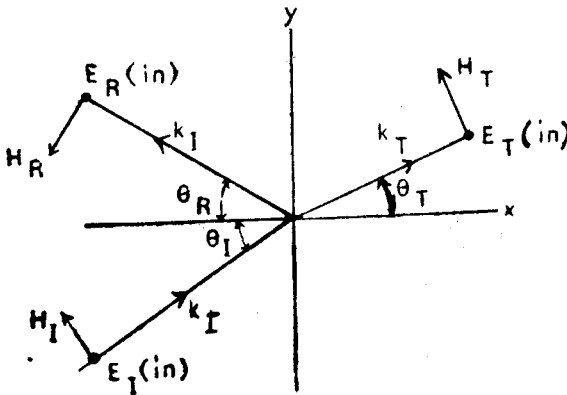
لندرس الآن وضعين منفصلين (i) مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط أي المستوى المعرف بـ K و $\hat{\mathbf{e}}_n$. (ii) مستقطبة بشكل موازي لمستوي السقوط اعلاه بارتباط خطي ملائم.

(i) حالة كون E مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط .

يوضح الشكل (2.7) متجهات المجال الخاصة بهذه الوضعية، حيث تتجه متجهات المجال الكهربائي بعيداً عن الناظر. والشرط (ZB) و (7.10) يعطي :

$$E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \quad (7.11)$$

$$k_I E_{0I} \cos \theta_I - k_I E_{0R} \cos \theta_R = k_T E_{0T} \cos \theta_T$$



شكل رقم (7.2)

$$(E_{0I} - E_{0R}) \cos \theta_I = \frac{k_T}{k_I} E_{0T} \cos \theta_T \quad (7.12)$$

حيث E_{0I} , E_{0R} و E_{0T} تمثل السعات العددية للموجات الساقطة و المنعكسة والنتقلة على التوالي، وبجمل هاتين المعادلتين يكون لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{E_{0R}}{E_{0I}} &= \frac{\cos \theta_I - \frac{k_T}{k_I} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{k_T}{k_I} \cos \theta_T} = \frac{\cos \theta_I - \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T} \\ &= \frac{\cos \theta_I - \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} \cos \theta_T} \quad (\text{حسب قانون سنيل}) \quad (7.7) \\ &= \frac{\sin(\theta_T - \theta_I)}{\sin(\theta_T + \theta_I)} \quad (7.13) \end{aligned}$$

and

$$\frac{E_{0T}}{E_{0I}} = \frac{2 \cos \theta_I}{\cos \theta_I + \frac{k_T}{k_I} \cos \theta_T} = \frac{2 \cos \theta_I \sin \theta_T}{\sin(\theta_I + \theta_T)} \quad (7.14)$$

وتعطينا المعادلة (7-13) النسبة بين سعة الموجة المنعكسة والساقطة. اذا كانت $n_2 > n_1$ تكون النسبة سالبة مشيرة الى ان انعكاس الموجة احدث تغيراً في الطور مقداره π اي ان المتجه الكهربائي للموجة المنعكسة تتذبذب بمقدار 180° خارج طور الموجة الساقطة. النسبة $\frac{E_{0R}}{E_{0I}}$ موجبة دائماً.

يعرف معامل الانعكاس (R reflection coefficient) على انه «دفع الطاقة المنعكس من السطح البيني (interface) مقسوماً على الدفع الساقط عليه».

$$R_{\perp} = \frac{\hat{e}_n \cdot \langle \mathbf{N}_R \rangle}{\hat{e}_n \cdot \langle \mathbf{N}_I \rangle} = \frac{|\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R^*|}{|\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I^*|} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} \quad (7.15)$$

حيث يشير الرمز السفلي الدليلي \perp الى ان \mathbf{E} مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط، وتمثل $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_R$ متجهات بوينتنگ (Poynting vectors).

$$\therefore R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_T - \theta_I)}{\sin^2(\theta_T + \theta_I)} \quad (7.16)$$

ونفس الشيء فان معامل الانتقال (transmission coefficient) هو :

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \frac{\hat{e}_n \cdot \langle \mathbf{N}_T \rangle}{\hat{e}_n \cdot \langle \mathbf{N}_I \rangle} = \frac{|E_{0T}|^2}{|E_{0I}|^2} \frac{n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I} \\ &= \frac{4 \cos^2 \theta_I \sin^2 \theta_T}{\sin^2(\theta_I + \theta_T)} \frac{\sin \theta_I \cos \theta_T}{\sin \theta_T \cos \theta_I} \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \cos \theta_I \cos \theta_T \sin \theta_I \sin \theta_T}{\sin^2(\theta_I - \theta_T)} = \frac{\sin 2\theta_I \sin 2\theta_T}{\sin^2(\theta_I + \theta_T)} \quad (7.17)$$

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1. \quad (7.18)$$

وللسقوط العمودي لدينا من (7-13) و (7-14) مايلي :

$$R_{\perp} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; \quad T_{\perp} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (7.19)$$

(ii) حالة كون E في مستوى السقوط.

تعطينا الشروط الحدودية :

$$E_{0I} \cos \theta_I - E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T \quad (7.20)$$

i.e.

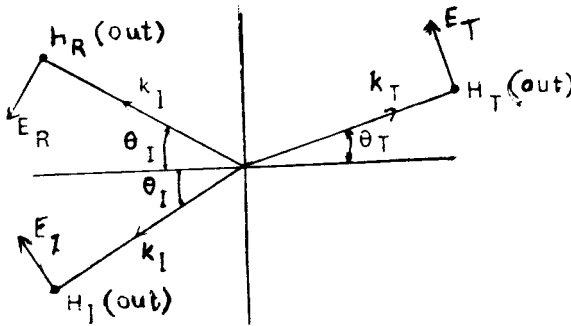
$$(E_{0I} - E_{0R}) \cos \theta_I = E_{0T} \cos \theta_T$$

and

$$k_I E_{0I} - k_I E_{0R} = k_T E_{0T}$$

i.e.

$$E_{0I} - E_{0R} = \frac{n_2}{n_1} E_{0T}. \quad (7.21)$$



شكل رقم (7.3)

Solving

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{\cos \theta_I - \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \cos \theta_T} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)} \quad (7.22)$$

and

$$\frac{E_{0T}}{E_{0I}} = \frac{2 \sin \theta_T \cos \theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T) \cos(\theta_I - \theta_T)}. \quad (7.23)$$

وتسمى العلاقات (7-13)، (7-4)، (7-15)، (7-22) باسم علاقات فرينل (Fresnel's relations).

تظهر المقارنة بين المعادلتين (7-13)، (7-22) ميزة مهمة بين حالي استقطاب E. اذا تركنا جانباً الحالة الاقل اهمية وهي عندما $n_2 = n_1$ ، $\Phi_2 = \Phi_1$ نجد من المعادلة (7-13) انه عندما تقع قيمة زاوية السقوط θ_I بين 0 و $\pi/2$ فان $\frac{E_{0R}}{E_{0I}} \neq 0$ ولكن نجد في الحالة الثانية أي عندما تستقطب E في مستوى السقوط، أن المعادلة (7-22) تعطينا :

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = 0 \quad (7.24)$$

$$R_H = 0$$

ومن ثم :

$$\theta_I + \theta_T = \pi/2.$$

عندما

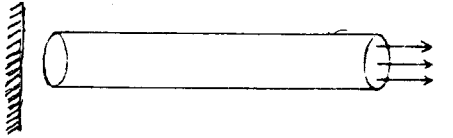
ومعنى هذا انه اذا سقطت موجة بزواوية $\theta_I = \pi/2 - \theta_T$ فانها ستعبر مستوى السطح البيني دون ان يحصل لها أي انعكاس، وتعرف هذه الزاوية باسم زاوية بروستر (Brewster's angle) ويرمز لها θ_B ويمكن إيجاد قيمتها من قانون سنيل أي :

$$\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_T} = \frac{\sin \theta_B}{\sin (\pi/2 - \theta_B)} = \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\therefore \theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (7.25)$$

اذا سقط الضوء على سطح بيني بزواوية بروستر فانه لا يستقطب (أي يحتوي على تراكب عدة مركبات مع متجهاتها الكهربائية في اتجاهات عشوائية)، ومركبات E المستقطبة عمودياً على مستوى السقوط سوف تنعكس. ومن ثم فان الموجة المنعكسة هي مستوية مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط. ولهذا السبب تسمى الزاوية θ_B احياناً باسم زاوية الاستقطاب (polarizing angle) وسنشرح الآن احد الاستخدامات المهمة لزاوية بروستر، في الليزر الغازي تستخدم عادة المرايا خارج النوافذ الزجاجية وكما هو موضح في الشكل (7-4) في السقوط العمودي للضوء ينتقل حوالي 90% من الضوء الساقط اي هناك فقدان في الشدة مقداره حوالي 8% في كل عبور ونظراً لوجود عدد

كبير من العبور في الليزر اذن سيتبقى القليل على هذه المشكلة يتم ترتيب النوافذ حسب زاوية بروستر.



شكل رقم (7.4)

وبهذه الطريقة فان مركبة المجال الكهربائي المستقطبة بشكل موازي لمستوي السقوط ستنتقل بصورة كاملة ولا تعاني الامن فقدان ضئيل جداً غير مؤثر حتى بعد عدد كبير من العبورات لكن المركبة المستقطبة عمودياً على مستوي السقوط ينعكس جزء منها والجزء الآخر ينتقل في كل مرة تضرب الحزمة السطح وبعد عدد من العبوات تزال كلياً. وهكذا فان الحزمة الخارجة تكون خطية الاستقطاب بنسبة مائة في المائة (أو تكون خطية الاستقطاب كلية).

7-2 الانعكاس الداخلي الكلي (Total Internal Reflection) :

لندرس الآن حالة يسقط فيها اشعاع على سطح وسط معامل انكساره اقل من معامل انكسار الوسط الذي سقطت منه، اي $n_1 > n_2$ لدينا من قانون سنيل:

$$\sin \theta_T = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_I. \quad (7.26)$$

ماذا سيحدث لو ان θ_I تم تكبيرها تدريجياً وابتداءً من الصفر؟ من الواضح ان θ_T ستكبر ايضاً حتى تصل قيمتها الى $\pi/2$ ، وسنرمز لقيمة الزاوية θ_I عند هذه الحالة بالرمز θ_C من المعادلة (7-26) لدينا :

$$\sin \theta_C = \frac{n_2}{n_1} \quad (7.27)$$

تسمى الزاوية θ_C بالزاوية الحرجة (critical angle) بما انه عندما $\theta_I = \theta_C$ تكون هناك موجة منعكسة فقط ولا توجد موجة منتقلة.

ماذا سيحدث اذا زادت الزاوية θ_c اكثر؟ أي $\theta_I > \theta_c$ سنحاول ان نجد قيمة θ_T بدلالة θ_c, θ_I .

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}$$

But $\sin \theta_T = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_I = \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_c}$ (from 7.26)

$$\therefore \cos \theta_T = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_c}} \quad (7.28)$$

نجد ان قيمة θ_T تقل كلما زادت θ_I وتصبح عندما $\theta_I = \theta_c$ ، وعند قيم θ_I الاكبر من θ_c يصبح $\cos \theta_T$ رقماً خيالياً .
 لنحسب الآن سعة المتجه الكهربائي المنعكس عندما $\theta_I = \theta_c$

$$\theta_I > \theta_c$$

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_c}} = iQ$$

$$Q = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_c} - 1} \quad (7.29)$$

في حالة كون E مستقطبة عمودياً على مستوى السقوط.

$$\frac{E_{oR}}{E_{oI}} = \frac{\cos \theta_I - \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T} = \frac{\cos \theta_I - \frac{n_2}{n_1} iQ}{\cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1} iQ}$$

$$\therefore \left| \frac{E_{oR}}{E_{oI}} \right|^2 = 1 \quad \text{i.e.} \quad |E_{oR}| = |E_{oI}|.$$

ونفس الشيء عندما تكون E مستقطبة بشكل موازي لمستوي السقوط.

$$\left| \frac{E_{oR}}{E_{oI}} \right|^2 = 1$$

$$|E_{oR}| = |E_{oI}|$$

وهكذا فان الموجة تنعكس انعكاساً تاماً وتعرف هذه الظاهرة باسم الانعكاس الداخلي الكلي (total internal reflection).

يجب الإشارة هنا الى وجود اختلاف او تغير في الطور في الانعكاس لذلك اذا ما استقطبت الموجة الساقطة في مستوي يقع بين مستوي السقوط والمستوي العمودي عليه لاتكون المركبتان في طور واحد بعد الانعكاس والموجة ستستقطب استقطاباً ناقصاً اي بشكل قطع ناقص (elliptically polarized).

نستنتج انه عندما تكون زاوية السقوط θ_T اكبر من (refractive wave) وكل الطاقة تنعكس. ويمكن اثبات ذلك باحساب متوسط معدل سريان الطاقة عبر الحدود. معدل سريان الطاقة هو :

The rate of energy flow $= \langle N \rangle \cdot \hat{e}_n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* \right) \cdot \hat{e}_n = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\mathbf{E}_T \times \frac{\mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T^*}{\omega \mu} \right) \cdot \hat{e}_n \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu} \text{Re} \left[\left(\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* \right) \mathbf{k}_T - (\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{k}_T) \mathbf{E}_T^* \right] \cdot \hat{e}_n \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu} \text{Re} \left(\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{E}_T^* \right) \mathbf{k}_T \cdot \hat{e}_n \quad (\because \mathbf{E}_T \perp \mathbf{k}_T) \\
 &= \frac{1}{2\omega \mu} \text{Re} |E_{0T}|^2 k_T \cos \theta_T = \frac{1}{2\omega \mu} \text{Re } iQ k_T |E_{0T}|^2. \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

وبما ان هذه الصيغة خيالية تماماً فان ما يحقق استنتاجنا هو $\langle N \rangle \cdot \hat{e}_n = 0$ عند هذه المرحلة اذا كانت $n_1 > n_2$ والموجة تسقط بزاوية اكبر من الزاوية الحرجة يجب ان لاتستنتج عند عدم وجود أي مجال في الجانب الآخر للحدود على الرغم من عدم تدفق الطاقة (او سريان الطاقة) عبر السطح الا انه يوجد مجال في الجانب الآخر من السطح كما سنثبت الآن في ادناه :
 نأخذ معادلة الموجة المنكسرة.

$$\mathbf{E}_T = E_{0T} \exp \{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (7.31)$$

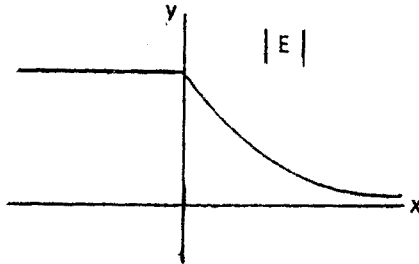
وتصبح هذه المعادلة حسب المحاور الاحداثية الموضحة في الشكل (7-1) بالصيغة الآتية

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_T &= E_{0T} \exp \{i(k_{Tx} \cos \theta_T + k_{Ty} \sin \theta_T - \omega t)\} \\
 &= E_{0T} \exp \{(-k_{Tx} Q \exp \{i(k_{Ty} \sin \theta_T - \omega t)\}). \quad (7.32)
 \end{aligned}$$

هذا يثبت وجود المجال في الجانب البعيد من السطح في الوسط 2. الا انه يتوهن فجأة كما هو موضح في الشكل (5-7).

الى اي مدى تنفذ الموجة في الوسط؟ مسافة النفوذ او العمق السطحي يحسب من المعادلة الآتية :

$$x = \frac{1}{k_T Q} = \frac{1}{k_T} \left(\frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_C} - 1 \right)^{-1/2} \quad (1.33)$$



شكل رقم (7.5)

سنأخذ على سبيل المثال مرور موجة من الزجاج الى الهواء. معامل انكسار الزجاج هو 1.5 ، لذلك فان الزاوية الحرجة للزجاج هي $\theta_C = \sin^{-1} 2/3$ اي تساوي تقريباً 42° . فاذا سقط الضوء داخل الزجاج بزاوية اكبر من 42 (لنقل 45) سوف يكون انعكاس داخلي كلي، و

$$x = \frac{1}{k_T} \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} - 1 \right)^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\pi} 2\sqrt{2} = 0.45\lambda.$$

وهكذا فان المجال يزول تقريباً بعد مسافة تساوي بعض الاطوال الموجية (او عدد من الطول الموجي). ماهو التفسير المجهري لهذا التوهن. ان الشحنات الجزئية تتذبذب نتيجة مرور الموجة الساقطة مولدة مجالاً اشعاعياً (radiation field) - سنتعرض للمجال الاشعاعي في الفصل التاسع - الموجة المتقدمة (forward wave) في هذا المجال تتداخل تداخلاً هداماً مع الموجة الاصلية. ولا تظهر سوى انتقالاً طفيفاً.

وجدنا فيما سبق انه لا يوجد انتقال للطاقة عبر الحدود. كيف تحسب اذن وجود المجال المضلل في الجانب البعيد من الحدود؟ في الحقيقة ان الطاقة تعبر الى الوسط الثاني لان مركبة المجال فيه لها قيمة محددة، الا انه في اثناء الجزء الآخر من الدورة يصبح مجرى السريان عكسياً وتعود الطاقة الى الوسط الاول.

7-3 الانعكاس من سطح معدني (Reflection from the surface of a metal):

سنبين في هذا الجزء كيف ان مناقشات البند السابق يمكن توسيعها لتشمل السطح 'اندودي لوسط موصل. بما ان حالة السقوط المائل هي الاكثر شمولاً ، لذا سنتحدد في الحالة البسيطة فقط وهي السقوط العمودي.
لدينا الموجة الساقطة والمنعكسة والمنتقلة كما يلي :

$$E_I = E_{0I} \exp \{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}; \mathbf{H}_I = \frac{\mathbf{k}_I \times E_I}{\omega \mu_1} \quad (7.34)$$

$$E_R = E_{0R} \exp \{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}; \mathbf{H}_R = \frac{\mathbf{k}_I \times E_R}{\omega \mu_1} \quad (7.35)$$

$$E_T = E_{0T} \exp \{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}; \mathbf{H}_T = \frac{\mathbf{k}_T \times E_T}{\omega \mu_2} \quad (7.36)$$

بما ان الوسط الثاني وسط موصل لذا بحسب متجه الانتشار (Propagation vector) K_T من المعادلة الآتية :

$$k_T^2 = \epsilon_2 \mu_2 \omega^2 \left[1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_2 \omega} \right] \quad \text{by (6.50)}$$

تتطلب الشروط الحدودية ان تكون :

$$E_{0I} - E_{0R} = E_{0T} \quad (7.37)$$

$$k_I(E_{0I} + E_{0R}) = k_T E_{0T} \quad (7.38)$$

بما أن K_T كمية معقدة لايمكن لـ E_{0R} و E_{0T} كليهما ان يكونا حقيقيين لذا يمكن ان نتوقع ازاحة في الطور اما صفر أو π في الموجة المنعكسة والمنتقلة .
بحل المعادلة (7-37)، (7-38) نحصل على :

$$E_{0R} = \frac{k_T - k_I}{k_T + k_I} E_{0I} \quad (7.39)$$

$$E_{0T} = \frac{2k_I}{k_T + k_I} E_{0I}$$

وبالتعويض عن $k_I = \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}$ وعن K_T من المعادلة (7-50) نحصل على :

$$E_{0R} = \frac{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\omega^2 \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} - \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\omega^2 \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}} E_{0I} \quad (7.40)$$

and

$$E_{0T} = \frac{2\omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\omega^2 \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_2\omega}\right)^{1/2} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}} E_{0I}. \quad (7.41)$$

سنبحث الآن حالة الموصل الكامل حيث $\sigma = \infty$. إذن :

$$E_{0R} = E_{0I} \text{ and } E_{0T} = 0$$

إذن فالانعكاس تام.

إذا لم يكن الموصل كاملاً بل موصل جيد جداً أي $\frac{\sigma}{\epsilon_2\omega} \gg 1$. التقريب الذي تبينناه في الفصل السابق يعطينا:

$$k_T = \alpha + i\beta = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_2}{2}} = \frac{1+i}{\delta}$$

حيث استفدنا من تعريف العمق السطحي δ المعطى في المعادلة (6-57) وبتعويض هذا في المعادلة (7-39) نحصل على :

$$\begin{aligned} E_{0R} &= \frac{\frac{1+i}{\delta} - \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}}{\frac{1+i}{\delta} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}} E_{0I} \\ &= \frac{\left\{\frac{1}{\delta} - \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\right\} + \frac{i}{\delta}}{\left\{\frac{1}{\delta} + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\right\} + \frac{i}{\delta}} E_{0I} \end{aligned}$$

لذلك بحسب معامل الانعكاس R من المعادلة الآتية :

$$R = \frac{|E_{0R}|^2}{|E_{0I}|^2} = \frac{\{1 - \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta\}^2 + 1}{\{1 + \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta\}^2 + 1}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_2\omega} \gg 1, \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}\delta \ll 1$$

and, hence.

$$R \approx 1 - 2 \omega (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2} \delta \quad (7.42)$$

$$= 1 - 2 \sqrt{\frac{2 \omega \epsilon_1 \mu_1}{\sigma \mu_2}}. \quad (7.43)$$

إذا فرضنا ان الانفاذيات المغناطيسية (magnetic permeabilities) تساوي :

$$R = 1 - 2 \sqrt{\frac{2 \omega \epsilon_1}{\sigma}}. \quad (7.44)$$

يمكن ايجاد مقدار الطاقة المنتقلة للوسط الموصل باحتساب معامل الانتقال T الذي يعطي النسب بين الطاقة المنتقلة والطاقة الساقطة .

$$T = 1 - R = 2 \sqrt{\frac{2 \omega \epsilon_1}{\sigma}}. \quad (7.45)$$

لاجل الحصول على فكرة واضحة عن نسبة مقدار الطاقة المنتقلة في موصل جيد سنأخذ على سبيل المثال النحاس، ولدينا المعلومات الآتية :

$$= 6 \times 10^7 \text{ (Ohm m)}^{-1}, \nu = 10^{10} \text{ sec}^{-1} \quad (\text{للنحاس})$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{2 \times 2 \pi \times 10^{10} \times 8.85 \times 10^{-12}}{6 \times 10^7}} \approx 3 \times 10^{-4}$$

وهذا المقدار صغير جداً اذا ماأريد قياسه مباشرة.

الطاقة الكلية في الوسط \perp هي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$$

Now $\mathbf{E}_I = \hat{\mathbf{e}}_n E_{0I} e^{i(k_I x - \omega t)}$

and $\mathbf{E}_R = -\hat{\mathbf{e}}_n E_{0I} e^{i(k_I x - \omega t)}$.

لاحظ ان السعة اخذت متساوية لكلا الموجتين وهذا يتبع الحقيقة التي تبين ان معامل انعكاس السطح المعدني هو وحدة واحدة تقريبا.

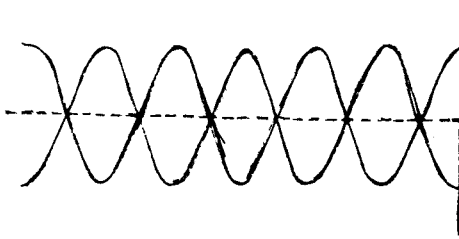
$$E = \hat{e}_n E_{0I} e^{-i\omega t} \left\{ e^{ik_I x} - e^{-ik_I x} \right\}$$

او اذا اخذنا الاجزاء الحقيقية منه فان :

$$E = 2 \hat{e}_n E_{0I} \sin \omega t \sin k_I x$$

(7-46)

لذلك فان المجال في الوسط \perp يمكن تمثيله بالموجة المستقرة (أو الواقفة) (Standing wave) وسيصرف المجال كما هو موضح في الشكل (7-6).



شكل رقم (7.6)

- تمارين الفصل السابع -

7-1 برهن على أن معامل انعكاس الضوء المر عبر الزجاج الى الهواء ويسقوط عمودي هو نفسه الضوء المر الى الزجاج من الهواء. وبرهن كذلك على أن تغير الطور في الحالتين مختلف.

7-2 موجة كهرومغناطيسية مستوية اسقطت عمودياً على الحد المستوي الفاصل بين عازلين معامل انكسارها n_1 و n_2 اذا كانت العلاقة بين معاملي الانكسار هي $(n_2/n_1) = 3 + 2\sqrt{2}$ ، برهن على أن دفع الطاقة المنعكسة مساوي لدفع الطاقة المنتقلة.

7-3 جد الزاوية الحرجة وزاوية بروستر لموجة كهرومغناطيسية تمر عبر العوازل الآتية :

المادة	السماحية النسبية
كوارتز (Quartz)	5
زجاج (Glass)	9
ماء (Water)	81

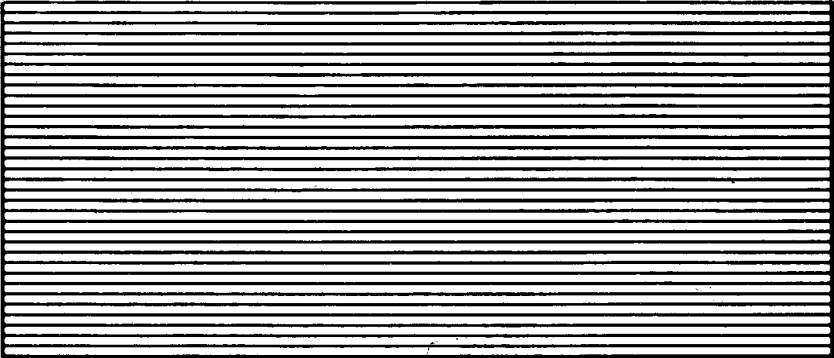
7-4 سعة المجال الكهربائي في موجة مستوية احادية اللون في الفضاء الحر هي 10 Vm^{-1} . فاذا اسقطت عمودياً على سطح مستوي لوسط معامل انكساره 2 . جد سعة المجال الكهربائي داخل الوسط.

7-5 لوح عازل محدد بوجهين متوازيين. برهن على أنه اذا اسقطت موجة كهرومغناطيسية على الوجه الاول بزاوية بروستر فان الموجة المنكسرة تستقطب على الوجه الثاني بنفس الزاوية ايضاً.

7-6 موجة كهرومغناطيسية مستوية في الفضاء الحر اسقطت على الحد المستوي لعازل سميك مكونة زاوية مع المستقيم العمودي على الحد مقدارها 65.6° . واستقطبت الموجة في مستوي السقوط. فاذا لم تكن هناك موجة منعكسة) فما هو مقدار السماحية النسبية للعازل؟

الفصل الثامن

دلائل الموجة (Wave Guides)



الفصل الثامن

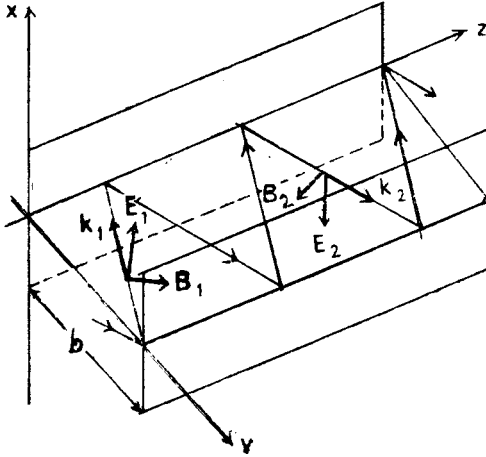
دلائل الموجة (Wave Guides)

في الفصل السابق بينا تأثير الحدود على انتشار موجة كهرومغناطيسية وسندرس الآن سلوك مثل هذه الموجات على ضوء حدود مختارة بطريقة تقود تلك الموجة بمحاذاة اتجاه معين. مثل هذه الانظمة تدعى دلائل الموجة. ان افضل طريقة لنقل الطاقة لمسافات قصيرة هي تلك التي تستخدم دلائل الموجة (wave guides) تطورت دلائل الموجات وشاع استخدامها في بادئ الامر في الاتصالات الالكترونية العملية اما الآن فتعتبر ذات اهمية كبيرة في انظمة الاتصالات البصرية - الالكترونيات البصرية - (Optoelectronics).

8-1 انتشار الموجات بين المستويات الموصلية

- : (Propagation of Waves Between Conducting Planes)

سنناقش اولاً مسألة انتشار الموجات بين مستويين موصلين متوازيين والتي ستقودنا لحل مسألة دليل الموجة.



شكل رقم (8.1)

الشكل (8-1) يوضح لنا لوحين متوازيين فسوف نختار محاور احداثياتنا كما هو موضح في الشكل. اللوح الاول يقع في المستوي $(Y=0)$ ويقع اللوح الثاني في المستوي $(Y=b)$ سوف نعتبر اللوحين مثالين من حيث التوصيلية وتمدت الى اللانهاية وسنعتبر ايضاً ان الفضاء المحصور بين اللوحين هو فراغ أي : $\sigma = 0, \rho = 0, \epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$

الآن اذا دخلت موجة في المنطقة بين اللوحين ، فان الجدران سوف تعكس الموجة ذهاباً وإياباً ونتيجة لذلك ستنتشر الموجة باتجاه موازي للوحين ، المجالات يجب ان تخضع لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر بين اللوحين ويجب ان تحقق شروطاً حدودية معينة في كل النقاط على الجدار . الشروط الحدودية التي يجب ان تتحقق هي :

(i) المركبة المماسية للمجال E يجب ان تكون صفراً في أي نقطة على الجدار.

(ii) المركبة العمودية للمجال المغناطيسي يجب أن تكون صفراً في أي نقطة على الجدار.

لاحظ أن المركبة العمودية لـ E يمكن أن لاتساوي صفراً مادام هناك احتمالية وجود شحنات على الطول وكذلك المركبة المماسية للمجال المغناطيسي يمكن ان لاتساوي صفراً ايضاً لوجود تيارات سطحية في الجدران الموصلة. ان الموجات الكهرومغناطيسية مستعرضة، حيث ان متجهات مجالها الكهربائي E والمغناطيسي H مستعرضان لاتجاه انتشارها K فأنها تدعى بالموجات الكهرومغناطيسية المستعرضة ويرمز لها بالحروف TEM . افرض أن موجة مستوية مستقطبة خطياً تتحرك بين اللوحين في اتجاه موصوف بتجه الانتشار K وفي مستوي عمودي على المحور X ويضع زاوية θ مع المحور y. اذا كان E باتجاه X فان B سيكون بالمستوي (Oyz) ، $(\mathbf{B} \parallel \mathbf{E})$ أي بعبارة اخرى $\mathbf{B} = \hat{e}_y B_y + \hat{e}_z B_z$ ، وله مركبة باتجاه الموجة، أي باتجاه z، لكن E لايملك مثل هذه المركبة. مثل هذه الموجة تدعى بالموجة الكهربائية المستعرضة (transverse electric wave) ويرمز لها موجة TE. واذا اخترنا B بحيث يكون بمحاذاة المحور x، فان E سيكون له مركبة طولية باتجاه Z مثل هذه الموجة تعرف بالموجة المغناطيسية المستعرضة (transverse magnetic wave) ، (موجة TM) . وانتشار الموجات ضمن منطقة موصلة ومغلقة يكون اما من انماط TE أو TM.

المجال الكهربائي في الموجة المستوية هو :

$$E_I = \hat{e}_x E_{0I} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = ky \cos \theta + kz \sin \theta \quad \text{حيث} \quad (8.2)$$

$$\therefore E_I = \hat{e}_x E_{0I} e^{i(ky \cos \theta + kz \sin \theta - \omega t)} \quad (8.3)$$

والموجة ستنعكس على الجدار. للموجة المنعكسة يكون لدينا :

$$E_R = \hat{e}_x E_{0R} e^{i(-ky \cos \theta + kz \sin \theta - \omega t)} \quad (8.4)$$

المجال الكهربائي الكلي بين المستويين الموصلين هو :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} e^{i(ky \cos \theta + kz \sin \theta - \omega t)} \\ &\quad + \hat{\mathbf{e}}_x E_{0R} e^{i(-ky \cos \theta + kz \sin \theta - \omega t)} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(kz \sin \theta - \omega t)} \left(E_{0I} e^{iky \cos \theta} + E_{0R} e^{-iky \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

في الحدود (أي عند $E_I = 0, y = 0$). هذا الشرط سيتحقق اذا كان $E_{0I} + E_{0R} = 0$, أي $E_{0I} = -E_{0R}$

$$\therefore \mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} e^{i(kz \sin \theta - \omega t)} \left(e^{iky \cos \theta} - e^{-iky \cos \theta} \right) \quad (8.6)$$

$$= 2i \hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin(ky \cos \theta) e^{i(kz \sin \theta - \omega t)}. \quad (8.7)$$

المجال سيتلاشى عندما $y=b$ ، وهذا ممكن اذا كان :

$$kb \cos \theta = n\pi \quad (8.8)$$

حيث n تأخذ اعداد صحيحة فقط. سيكون هناك عدة مجالات تبعاً لذلك اعتماداً على القيم المختلفة لـ (n) . الموجات المختلفة المناظرة لقيم (n) المختلفة تدعى الانماط (modes)، والآن بما ان $\cos \theta \leq 1$

$$\frac{n\pi}{kb} \leq 1. \quad (8.9)$$

هذا الشرط يحدد اعلى قيمة لـ (n) لتردد اشعاعي معين. اذا كان $\frac{\pi}{kb} > 1$ ، فلن يكون هناك اي موجه من نوع (7-8) في المنطقة المأخوذة بنظر الاعتبار لذلك سيكون هناك طول موجة القطع (cut-off wave length) اذا تجاوزته الموجة فلن يكون باستطاعتها الانتشار.

كل شكل له طول موجة القطع λ_n يعطى بصيغة :

$$\lambda_n = \frac{2b}{n} \quad (8.10)$$

لذلك يعتمد طول موجة القطع على رقم الشكل وعلى المسافة التي تفصل بين اللوحين.

من (8-8) نحصل على :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2}{k^2 b^2}} \quad (8.11)$$

بتعويض (8-8)، (8-11) بالمعادلة (8-7) نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 2i\hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i \left\{ kz \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2}{k^2 b^2}} - \omega t \right\}} \\ &= 2i\hat{\mathbf{e}}_x E_{0I} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (8.12)$$

حيث :

$$k_g = \left(k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (8.13)$$

رقم الموجة k_g يعرف برقم موجة الدليل (guide wave number) ويمكن التعبير عنه بصيغة $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ حيث λ_g هو طول موجة الدليل (guide wave length)، كما هو واضح من المعادلة (8-112)، E لا تملك مركبة باتجاه Z . لذلك تكون الموجات كهربية مستعرضة وتمثل بـ TE_n حيث n هو رقم النمط (mode number) يمكن إيجاد المجال المغناطيسي في موجات TE_n باستخدام العلاقة :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

سرعة الطور للموجة (8-112) هي :

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k_g} = c \frac{k}{k_g} \\ &= c \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{k^2 b^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (8.14)$$

المعادلة (8-12) توضح ان سرعة الطور للموجة تتجاوز سرعة الضوء في الفضاء الحر. (لاحظ ان كون سرعة الطور اكبر من الضوء محتملة بسبب كونها تمثل سرعة عقد (nodes) فقط وليس طاقة). سرعة المجموعة يمكن اعطاؤها بالصيغة :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$$

طاقة مجموعة من الموجات تتحرك مع هذه السرعة. من العلاقة (8-13) نحصل على :

$$k_g^2 = k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

بالتفاضل نسبة الى k_g نحصل على :

$$k_g = k \frac{dk}{dk_g} = \frac{k}{c} \frac{d\omega}{dk_g}$$

$$\therefore v_g = c \frac{k_g}{k}$$

(8.15)

والتي هي اقل من سرعة الضوء.

ان حاصل ضرب v_g و v_p هو :

$$v_p v_g = c^2.$$

(8.16)

وبنفس الطريقة يمكن ان نحصل على مجموعة حلول اخرى يكون فيها المجال المغناطيسي مؤثراً بمحاذاة المحور x وليست له اي مركبة باتجاه الموجة. هذه هي الموجات المغناطيسية المستعرضة او موجات TM_n . انماط TM_n المختلفة وتمتلك اطوال موجات القطع بنفس مقدار اطوال موجات القطع لحالات TE_n المعطى بالمعادلة (8-10).

2-8 الموجات في دلائل ذات مقاطع عرضية اعتباطية

-(Waves in Guides of Arbitrary Cross - section)

سنأخذ بنظر الاعتبار هنا انتشار الموجات داخل موصل مجوف له اي مقطع عرضي منتظم، ونفرض ان الجدران هي موصلاً مثالية. سنستخرج الحل العام لمعادلة الموجة لكل من المجالين الكهربائي والمغناطيسي ضمن الدليل، وبحيث يحقق مطالبات معادلات ماكسويل وشروط حدودية مناسبة ايضاً.

معادلة الموجة للمجال الكهربائي هي :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$$

(8.17)

تكون صيغة الحل المطلوب للموجة المستوية هي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

(8.18)

كما يمكن كتابة معادلة مماثلة للمجال المغناطيسي :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_g^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0(x, y) = 0 \quad (8.19)$$

ويعرف عامل لابلاسيان المستعرض ∇_T (transverse Laplacian operator)

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.20) \quad \text{على أنه :}$$

ومن هنا نستنتج ان المعادلة (8-19) يمكن كتابتها كالاتي :

$$(\nabla_T^2 + k_c^2) E_0(x, y) = 0 \quad (8.21)$$

حيث :

$$k_c^2 = -k_g^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.22)$$

من المناسب التعبير عن المجالين E و B بواسطة مركبات موازية (E_z, B_z) ومستعرضة (E_T, B_T) والمحور الموصل أي للمحور Z أي :

$$\mathbf{E} = E_z + \mathbf{E}_T, \quad \mathbf{B} = B_z + \mathbf{B}_T$$

حيث :

$$\mathbf{E}_z = \hat{\mathbf{e}}_z E_{0z}(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$= \{ \hat{\mathbf{e}}_x E_{0x}(x, y) + \hat{\mathbf{e}}_y E_{0y}(x, y) \} e^{i(k_g z - \omega t)} \quad (8.24)$$

ومعادلات مماثلة لكل من B_T و B_z .
الجات يجب ان تحقق معادلات ماكسويل

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + ik_g E_{0z} = 0 \quad (8.25)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} + ik_g B_{0z} = 0 \quad (8.26)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B}$$

i.e.

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - ik_z E_{0y} = i\omega B_{0x} \quad (8.27)$$

$$ik_z E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = i\omega B_{0y} \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = i\omega B_{0z} \quad (8.29)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}$$

i.e.

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - ik_z B_{0y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0x} \quad (8.30)$$

$$ik_z B_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0y} \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0z} \quad (8.32)$$

بحل المعادلتين (8-28) و (8-30) لـ E_{0x} نحصل على :

$$E_{0x} = \frac{i}{k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \right) \quad (8.33)$$

وبنفس الطريقة

$$E_{0y} = \frac{i}{k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right) \quad (8.34)$$

$$\therefore \mathbf{E}_{0T} = \hat{e}_x E_{0x} + \hat{e}_y E_{0y}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{k_z^2} k_z \left(\hat{e}_x \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \right) + \frac{i\omega}{k_z^2} \left(\hat{e}_x \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - \hat{e}_y \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right) \\ &= \frac{i}{k_z^2} \left[k_z \nabla_T E_{0z} - \omega \hat{e}_z \times \nabla_T B_{0z} \right] \end{aligned} \quad (8.35)$$

حيث

$$\nabla_T = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

نفس الهيكل من المعادلات يمكن الحصول عليه لكل من B_{0y} و B_{0x} وتبين هذه المعادلات كيف ان كل المركبات المستعرضة يمكن التعبير عنها او وضعها بصورة كاملة بواسطة استخدام المركبات الطولية.

الآن لنفحص قابلية موجات TEM على الانتشار داخل موصل مجوف.
لموجات TEM يكون $E_{oz} = B_{oz} = 0$ ، لذلك ومن المعادلتين (8-25) و (8-26) حصل على :

$$\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial B_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial B_{oy}}{\partial y} = 0 \quad (8.36)$$

ومن المعادلتين (8-29) و (8-32).

$$\frac{\partial E_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial E_{ox}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} = 0 \quad (8-37)$$

بأخذ المشتقات الجزئية لـ (8-36) و (8-37) بالنسبة لـ (x) و (y) على التوالي وجمعها بصورة مناسبة نصل الى النتيجة الآتية :

$$\nabla_T^2 E_{ox} = 0; \quad \nabla_T^2 B_{ox} = 0. \quad (8.38)$$

بما ان مركبات E تحقق معادلة لابلاس ، نتيجة كون سطح الدليل هو سطحاً متساوي الجهد، ومن هنا يتضح ان E داخل الموصل تساوي صفراً. لذلك لا يمكن وجود نمط TEM ضمن دليل مجوف جدرانه ذات توصيلية مثالية. وهذه النتيجة صحيحة لسطح متصل بمفرده. لفرض وجود نمط TEM، فن الضروري يوفر سطحين غير متصلين او اكثر على سبيل المثال الكيبل ذي الموصلين متحدي المحوران نمط TEM هو النمط السائد.

لقد رأينا من المعادلتين (2-21) و (8-38) انه للموجات TEM ، $K_c=0$ ، أي ان $K_g=K$. وهذا يعني ان رقم الموجة هو حقيقي لكل الترددات ، بعبارة اخرى ، ليس هناك تردد قطع (Cut off frequency) لموجات TEM .
المجالين E و B يجب أن يحققا الشروط الحدودية .

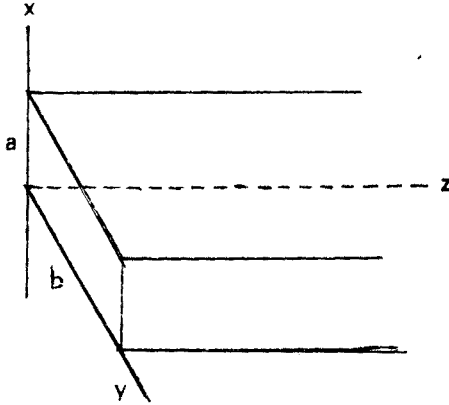
$$E_{\text{tangential}} = \hat{e}_n \times E = 0; \quad B_{\text{normal}} = \hat{e}_n \cdot B = 0. \quad (8.39)$$

هذه الشروط الحدودية مع معادلات الموجة لمتجهات المجالين E و B تقودنا لمسائل eigen - value . أي انه لتردد معين ω ، ستكون هناك قيم معينة لـ K موافقة للشروط الحدودية ومعادلة الموجة.

8-3 دلائل الموجة ذات المقطع العرضي المتعامد

(Wave Guides of Rectangular cross-section) :-

كشال للنظرية التي تناولناها في الجزء السابق، سنأخذ دليلاً ذا مقطع عرضي متعامد مستعمل لفرض انتشار طاقة كهرومغناطيسية ذات ترددات واطئة (microwave frequencies) نفرض ان ابعاد المقطع العرضي هي (a) و (b) كما هو موضح في الشكل (8.2) .



شكل رقم (8.2)

سنأخذ بنظر الاعتبار موجات TE، ان مثل هذه الموجات $E_{0z} = 0$ لذلك يحدد المجال بواسطة حل المعادلة :

$$(\nabla^2 + k_c^2) B_{0z} = 0 \quad (8.40)$$

من (8-35) وجدنا ان B_{0z} والمعادلة (8-40) يجب ان تحقق الشرط :

$$\left. \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right|_{x=0, a} = 0 \text{ and } \left. \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \right|_{y=0, b} = 0 \quad (8.41)$$

وذلك يجعل $E_{\text{tangential}} = 0$

من السهل التأكد من ان الحل :

$$B_{0x} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (8.42)$$

حيث m و n اعداد صحيحة ، يحقق كل من (8-40) و (8-41) إذا كان :

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (8.43)$$

اي ان :

$$\omega_{mn} = \pi c \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (8.44)$$

حيث ω_{mn} هي تردد القطع المناظر لارقام النمط m و n النمط المناظر سمي النمط TE_{mn} . اذا كانت $(m=0)$, $(n=0)$, فان الشكل مناظر لشكل TEM. ومن هنا نستنتج انه لاوجود لنمط TE_{00} . اذا كان $a < b$, فان اوطأ تردد قطع يمكن الحصول عليه بوضع $m=0$ و $n=1$.

$$\omega_{01} = \frac{\pi c}{b}$$

هذا هو النمط الاساسي او السائد (principal dominant mode) .

على العموم ، فان موجات TE_{mn} التي تردداتها اكبر من تردد القطع ($\omega > \omega_{mn}$) تنشر بدون وهن (اضعاف) اذا اردنا النمط السائد فقط. هو الذي ينتشر فان علينا اختيار ابعاد الدليل بدقة كبيرة.

مركبات المجال للشكل السائد TE_{01} هي :

$$\begin{aligned} E_{0x} &= \frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\pi}{b} \\ &= -\frac{i\omega b}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{انظر 8-43}) \end{aligned}$$

$$E_{0y} = 0, \quad E_{0z} = 0$$

$$B_{0x} = 0, \quad B_{0y} = \frac{ik_z}{k_c^2} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\frac{ik_z b}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (8.45)$$

هذه المجالات تناظر الموجات المنتشرة بالاتجاه Z، الذي هو اتجاه متجه بوينتنگ (Poynting vector).

الطاقة التي تسري خلال دليل الموجة تعطي كما يلي :

$$\langle \mathbf{N} \rangle_{01} = \frac{1}{2} \text{Real} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

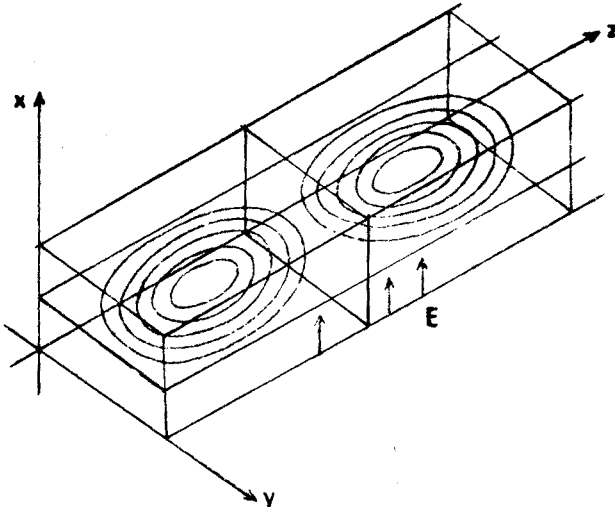
$$= \frac{1}{2\mu} R_e (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)$$

$$= \frac{1}{2\mu} R_e \left(-\hat{e}_y E_{0x} B_{0z}^* + \hat{e}_z E_{0x} B_{0y}^* \right).$$

من المعادلة (8-45) وجدنا أن $B_{0x} B_{0z}^*$ هو كمية خيالية بحتة.

$$\blacktriangle \langle \mathbf{N} \rangle_{01} = \frac{\hat{e}_z \omega b^2}{2\mu \pi^2} B_0^2 k_r \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (8.46)$$

القدرة الكلية يمكن إيجادها بأخذ تكامل هذه الصيغة من $(y=0)$ الى $(y=b)$.
المجال المغناطيسي الموصوف بهذه المعادلات موضح في الشكل (8-3) ، خطوط المجال رسمت في المستوى الموازي للمستوي $(y-z)$ عند الزمن $t=0$. بما ان المجال لايعتمد على احداثيات x فان شكل نموذج المجال هو نفسه في اي مستوي مواز للمستوي $(y-z)$.



شكل رقم (8.3)

مثال (8-1) : - أوجد ثلاثة أنماط ذات طول موجي مقداره (3 cm) لموجات رادار التي يمكن انتشارها في دليل موجة ذي مقطع عرضي متعامد (a=1 cm , b=2 cm). أوجد أيضاً سرعة المجموعة للموجات.

$$\omega_{mn} = \pi c \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad \omega_{mn} = 2\pi \nu_{mn}. \quad \text{تردد القطع هو :}$$

تردد الاشعاع المعطي هو 10^{10} Hz . ترددات القطع للانماط المختلفة هي :

$$\nu_{01} = \frac{c}{2} \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = 7.5 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$\nu_{10} = \frac{c}{2} \frac{1}{10^{-2}} = 1.5 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\nu_{11} = 1.68 \times 10^{10} \text{ Hz.}$$

أولاً تردد قطع لنمط TM ، اي نمط TM_{11} هو :

$$\nu_{11} = 1.68 \times 10^{10} \text{ Hz.}$$

بما ان نمط TE_{01} لها تردد اولاً من تردد الاشعاع. فانه النمط الوحيد الذي سيكون قابلاً للانتشار.

سرعة الطور للموجة هي :

$$\nu_p = \frac{\omega}{k_g}$$

$$k_g = \sqrt{k_c^2 - \omega^2/c^2} = 1.4 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{by 8.22})$$

$$\nu_p = 4.5 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$\nu_p \nu_g = c^2 \quad \therefore \nu_g = 2 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

4-8 التجاويف الرنانة (Resonant Cavities) :-

الغرض من دلائل الموجة هو نقل الطاقة الكهرومغناطيسية من نقطة الى نقطة اخرى بصورة كفوءة. ومن ناحية اخرى فان الرنان (resonator) جهاز يقوم بخزن الطاقة ويكافئ عنصر دائرة رنينية (resonant circuit) في عمله. سنتناول في هذا الجزء من هذا الفصل ابسط حالات التجاويف الرنانة وهو التجويف المتعامد (rectangular cavity) والذي يكون تردده قابلاً للحساب بسهولة.

تصور صندوقاً مغلقاً يتكون عن طريق اوجه نهايته على دليل موجة مستطيل او متعامد الشكل. سنفرض ان هذه الالوجه مستوية وعمودية بسبب الانعكاس الذي يحصل في اوجه النهاية، فان الموجات داخل التجويف هي موجات مستقرة (واقفة) وليست متقدمة. ويمكن بسهولة التحقق من ان مركبات المجال الكهربائي هي :

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

من اجل تحقيق الشروط الحدودية ، فانه من الضروري ان تأخذ (k_1, k_2, k_3) القيم الآتية :

$$k_1 = \frac{l\pi}{a}, k_2 = \frac{m\pi}{b}, k_3 = \frac{n\pi}{c} \quad (8.48)$$

حيث (a, b, c) تمثل ابعاد الصندوق و (l, m, n) هي اعداد صحيحة. بتعويض اي من المركبات بمعادلة موجة مناسبة فان المجالات المعطاة بـ (8-47) تكون مقبولة ، اذا كان رقم موجة الفضاء الحر يحقق الشرط :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right). \quad (8.49)$$

لذلك هناك عدد غير منتهي من الترددات الرنينية، ومن هنا نلاحظ وجود اعداد غير منتهية لانماط الفجوة مناظرة لقيم (l, m, n) المختلفة. يمكن ايجاد مركبات المجال المغناطيسي من علاقة ماكسويل

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اذا كان $(n=1, m=0, l=0)$ فان المجال الكهربائي سوف يكون مستعرضاً لاتجاه الانتشار كما نلاحظ ذلك من خلال (8-47), (8-48). هذا النمط عني كنط TE_{011} ، بالاضافة لشكل TE_{lmn} فان هناك انماط اخرى ممكنة في الفجوة. هناك انماط TM_{lmn} التي يكون فيها المجال المغناطيسي مستعرضاً لاتجاه الانتشار لنفس الفجوة فان موجات TE_{lmn} وموجات TM_{lmn} تحدث بنفس التردد، ومن هنا فانه عند تردد رنيني معين تكون الموجة المستقرة في الفجوة هي مجموع الموجتين الرنينيتين ، نمط TE ونمط TM .

عندما تتعامل الآن مع نظرية اشعاع الجسم الاسود (black - body radiation) لن نجد اي صعوبة في فهم كيفية ظهور العامل 2 في كثافة دالة الحالات.

لقد رأينا سابقاً ان كل هيئة مجال محددة تمتلك الفجوات بعض الترددات الرنينية المتقطعة (discrete resonant frequencies) هذا يعني اننا لو اردنا ان نثير مشكلاً معيناً من التذبذب في الفجوة فلن يتم بناء الاسلوب الصحيح من المجالات ما لم يكن تردد الاثارة مساوياً للتردد الرنيني. مع ذلك تحدث الاثارة الجيدة عملياً بنطاق ضيق من الترددات حول التردد الرنيني. وهذا نتيجة التردد الحاد (sharp frequency) الذي يحدث جزئياً بسبب الهدر في الطاقة الذي يحصل على جدران الفجوة. ويمبر عن هذه الخسارة او الهدر بكمية يرمز لها بالحرف P خاصة لكل فجوة، وتعرف كما يلي :

$$Q = \frac{\omega \times \text{energy stored in the cavity}}{\text{energy lost per cycle to the walls}} \quad \begin{array}{l} \text{(الطاقة المخزونة في الفجوة)} \\ \text{(خسارة الطاقة في كل دورة على الجدران)} \end{array}$$

(8.50)

ويمكن ايجاد مقدار الخسارة في القدرة في الفجوة بحساب المعدل الزمني لمتجه بوينتتك في الجدار عند السطح :

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} R_e (E_{||} \times H_{||})$$

حيث $E_{||}$, $H_{||}$ تمثل المركبتان الماسيتان للمجالين الكهربائي والمغناطيسي. تستخدم الفجوات عادة مقياساً للتردد، ونظراً لامكانية صناعة الفجوات الاسطوانية بدقة اعلى منها في الفجوات المتعامدة لذلك فهي تستخدم في قياس التردد بدقة عالية ، وتستخدم الفجوات ايضاً في التجارب التي تتطلب مجالات موجبة دقيقة عالية (high microwave fields)، على سبيل المثال رنين البرم الكهربائي (electric spin resonance)

5-8 دلائل موجة العازل (Dielectric wave - guides)

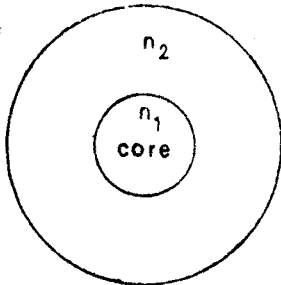
درسنا فيما سبق دلائل الموجة التي تكون جدرانها مثالية التوصيل ومجالاتها ضمن الدليل، وتركيبات دليلية اخرى ممكنة ايضاً. على سبيل المثال يمكن استخدام خط النقل متوازي السلك (parallel wire transmission line) لتوجيه الموجة الكهرومغناطيسية.

والقطعة العازلة هي أيضاً نظام آخر يمكن استخدامه دليلاً للموجة، ذو خصائص مشابهة لدلائل الموجة التي درسناها ولكن هناك اختلافات تظهر نتيجة اختلاف الشروط الحدودية المطلوب تحقيقها على السطح.

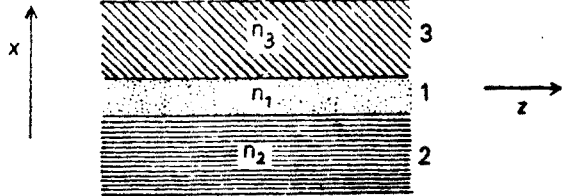
نالت دلائل موجة العازل أهمية كبيرة مع مجيء الليزر وخاصة في مجالات الاتصالات البصرية (Optical communication) حيث تعاني حزمة الليزر في أثناء انتقالها عبر الغلاف الجوي تشوهات عنيفة لذلك يستوجب قيادة الضوء بديل ل جعل الاتصالات البصرية أكثر كفاءة وهنا اثبتت الدلائل العازلة فائدتها العظيمة.

تعتمد الدلائل العازلة على مبدأ الانعكاس الداخلي الكلي ، حيث تسقط الموجة المنتشرة في العازل على السطح البيني (interface) مع عازل آخر ذي معامل انكسار اقل بزواوية اكبر من الزاوية الحرجة.

إحدى الطرق البدائية لانتاج الدلائل العازلة كانت تستخدم مايسمى بعدسة الغاز (gas lens) ، وهي عبارة عن انبوب مملوء بغاز معين تحت تدرج حراري مناسب. وهذا التدرج الحراري يولد تدرجاً شعاعياً (radial gradient) في معامل الانكسار الذي يولد نوعاً ما دليلاً لقيادة الموجة باتجاه المحور. وكانت هذه الطريقة مركبة وغير فعالة. مما ادى الى حلول انابيب الضوء محلها. تصنع انابيب الضوء من الياف زجاجية (glass fibres) ذات معامل انكسار معين وتغلف بطبقة معامل انكسارها اوطأ بقليل من معامل انكسار الليف (الشكل 8.4) وهذا يؤدي الى انعكاس الضوء داخلياً على السطح البيني المغلف مما يحافظ على انتشار الشكل بمحاذاة محور الليف. فاذا كان قطر القلب اكبر بكثير من الطول الموجب للضوء فيمكن انتشار عدد كبير من الاشكال فيه. اما اذا اريد تقل شكل مفرد فيجب اختيار ابعاد القلب بدقة.



شكل رقم (8.4)



شكل رقم (8.5)

لندرس الآن كيفية استخدام قطعة او لوح عازل مستوي دليلاً للموجة.
 نأخذ لوحاً عازلاً مستويًا (1) موضوع بين طبقتين (2) و (3) كما هو موضح في الشكل (5-8). حيث تشكل الطبقتان الخارجيتان الغلاف وتسميان الطبقة التحتية (substrate) (2) والطبقة الفوقية (3) (superstrate). بين هاتين الطبقتين تقع الطبقة العازلة التي هي عبارة عن لوح رفيع جداً لا يزيد سمكه على طول الموجة البعدية (optical wave length d) ويصنع عادة من فئات اوكسيد الزنك او زرنيخيد الجاليوم (gallium arsenide) الخ سنفرض ان الطبقات (sputtered zinc oxide) او (length d) زرنيخيد الجاليوم (gallium arsenide) الخ سنفرض ان الطبقات لاتمتص الاشعاع الكهرومغناطيسي الساقط عليها بتاتا أو تمتصه بصورة ضعيفة جداً وان معامل انكسارها يخضع للشرط :

$$n_1 > n_2 > n_3 \quad (8.51)$$

الذي يتوافق وشرط الانعكاس الداخلي.

لنأخذ بنظر الاعتبار انتشار نمط TE باتجاه Z. ان المجال E سيكون مستعرضاً لهذا الاتجاه. ولتكن مركباته هي $\{0, E_y e^{i(\beta z - \omega t)}, 0\}$ حيث B هو ثابت الانتشار باتجاه Z ويعطى من المعادلة الآتية:

$$\beta = k' \cos \theta = n_1 k \cos \theta \quad (8.52)$$

اذا كانت λ_e هي الطول الموجي في العازل فان $k' = \frac{2\pi}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1$ معادلة الموجة هي :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$$

بالاختصار

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (n^2 k^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (8.53)$$

يجب تلاشي المجالات عندما $x = \pm \infty$ وحل هذه المعادلة يكون :

$$\begin{aligned} E_y &= A e^{-\beta x} e^{i(\beta z - \omega t)} & \text{for } x > 0 \\ &= (B \cos Kx + C \sin Kx) e^{i(\beta z - \omega t)} & \text{for } 0 \geq x \geq -d \\ &= D e^{\gamma x} \cdot e^{i(\beta z - \omega t)} & \text{for } x \leq -d \end{aligned} \quad (8.54)$$

$$\delta^2 = \beta^2 - n_2^2 k^2; K^2 = n_1^2 k^2 - \beta^2; \gamma^2 = \beta^2 - n_3^2 k^2,$$

كل واحدة من هؤلاء هي كمية موجبة. من العلاقات الاولية نعرف ان :

$$\beta^2 > n_2^2 k^2 \quad \text{i.e.} \quad n_1^2 k^2 \cos^2 \theta > n_2^2 k^2$$

$$n_1 \cos^2 \theta > n_2$$

ومن العلاقة الثانية لدينا $n_1 \cos^2 \theta > n_2$.

بذلك تتحقق شروط الانعكاس الداخلي بين الحدود.

باستخدام معادلات ماكسويل يمكننا ايجاد المركبة المناسبة للمجال المغناطيسي H.

$$H_z = -\frac{i\delta}{\omega\mu_0} \left[A e^{-\delta x} e^{i(\beta z - \omega t)} \right] \quad \text{for } x > 0$$

$$= \frac{iK}{\omega\mu_0} \left[-A \sin Kx + C \cos Kx \right] e^{i(\beta z - \omega t)} \quad \text{for } 0 > x > -d$$

$$= \frac{i\gamma}{\omega\mu_0} \left[A \cos Kd - C \sin Kd \right] e^{\gamma(x+d)} e^{i(\beta z - \omega t)} \quad \text{for } x \leq -d.$$

بما ان المركبة المناسبة لـ H يجب ان تحقق الشروط الحدودية اي H_z يجب ان تكون

مستمرة عبر السطح في $(x=0)$, $(x=-d)$ لدينا :

$$-\delta A = KC \quad (8.55)$$

$$K[A \sin Kd + C \cos Kd] = \gamma[A \cos Kd - C \sin Kd] \quad (8.56)$$

$$\delta A + KC = 0$$

اي ان

$$(KA + \gamma C) \sin Kd + (KC - \gamma A) \cos Kd = 0.$$

لنتلك هذه حلاً معقولاً (non-trivial solution) لكل من A و C ، فان محددة

(determinant) النظام يجب ان تزول معطياً :

$$\tan Kd = \frac{K(\gamma + \delta)}{K^2 - \gamma\delta} \quad (8.57)$$

عندما تحل هذه المعادلة بطرق بيانية (graphically) او عددية (numerically)

ستمطي قيمة B^2 والتي بدورها تعطي قيمة الزاوية θ التي فيها تقترن الطاقة بالدليل.

اذا كان $\gamma=0$ تنتج خسارة في الانعكاس الداخلي الكلي عند الحدود السفلى مما يؤدي

الى عدم امكانية توجيه النقط بعد ذلك.

تمارين الفصل الثامن

8-1 موجة ATM تنتقل بمحاذاة السطح البيني لعازلين ساحتها ϵ_1 و ϵ_2 جد معادلة التشتت.

8-2 اوجد العلاقة بين المركبات المماسية لمجال كهربائي ومجال مغناطيسي بالقرب من موصل.

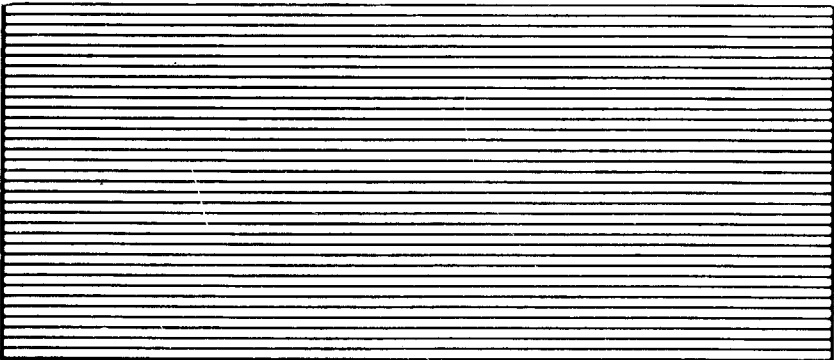
8-2 ماهو اقل سمك لدليل موجة ذي مقطع عرضي مربع ، اذا اريد نقل الموجات لنمط TE_{01} فقط؟

8-4 اسقطت موجة كهرومغناطيسية مستوية عمودياً على لوح من مادة عازلة سطحه الخلفي بتاس مع موصل مثالي اثبت ان $(\epsilon = \mu)$ للعازل اذا لم يكن هناك اي انعكاس على السطح الامامي.

8-5 اوجد عدد الرنينات الموجودة في فجوة مستطيلة ابعادها $(d=4\text{cm}), (b=3\text{ cm}), (a=2\text{cm})$ خلال مدى التردد $\nu = 9 \times 10^9 \text{ Hz}$ الى $= 10^{10} \text{ Hz}$

8-6 عين سمك القطع (cut - off thickness) لنمط TE الاساسية في دليل موجة من لوح عازل الذي يكون معامل انكسار الفلم هو $n_1 = 1.59$ ومعامل انكسار الطبقة السفلية $n_2 = 1.53$ وسمك الطبقة العلوية $k = 9.92 \text{ rad}/\mu\text{m}$.

الفصل التاسع
«الاشعاع الكهرومغناطيسي»
(Electromagnetic Radiation)



الفصل التاسع

«الاشعاع الكهرومغناطيسي»

(Electromagnetic Radiation)

درسنا في الفصل السابق انتقال الموجات الكهرومغناطيسية والطاقة بواسطة دلائل الموجة، وسندرس في هذا الفصل التنقل العشوائي (غير الموجة) للموجات والطاقة في الفضاء الخالي. ومثبت ان اي توزيع لشحنات وتيارات متغيرة يمثل مصدراً للاشعاع الكهرومغناطيسي. كيف ينتج الضوء المرئي؟ فهو نتيجة الانتظام المفاجيء (rapid adjustment) في توزيع الشحنة والتيار داخل السحابة الالكترونية للذرات. لا يمكن تفسير كيفية انبعاث الاشعة من الذرات الا بميكانيك الكم (quantum mechanics) بداية انهيار المفاهيم القديمة وفي الحقيقة بدأ واضحاً في نظرية الاشعاع. على كل حال ستقدم النظرية القديمة المستخدمة في هذا الفصل عوناً كبيراً في فهم نظرية الكم للاشعاع.

9-1 الجهود المعوقلة (retarded Potentials) :

يمكن ايجاد العلاقة بين المجالات الاشعاعية ومصادره بسهولة اذا ماتم التعبير عن هذه المجالات بدلالة الجهد الكهرومغناطيسية A و Φ .

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.1)$$

لاحظنا في الفصل الخامس كيف ان ادخال شرط لورنتس في معادلات ماكسويل انتج لنا المعادلتين غير المتجانستين الآتيتين لـ A و Φ .

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.2)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} \quad (9.3)$$

العامل في الطرف الايسر مشابه لذلك الخاص بمعادلة الموجة المتجانسة، لكن ظهرت الآن دلائل المصدر ρ و \mathbf{j} في الطرف الايمن وكل هذه المعادلات مازالت بحاجة قائمة لايجاد تعابير لـ A و Φ بدلالة توزيع التيار والشحنة.

سنقوم أولاً بإيجاد هذه الحلول بطريقة المشابهة مع الحلول المستخلصة لمسائل الحالة المستقرة في الفصلين الأول والخامس للكهربائية المستقرة والمغناطيسية المستقرة على التوالي، وحلول المعادلات :

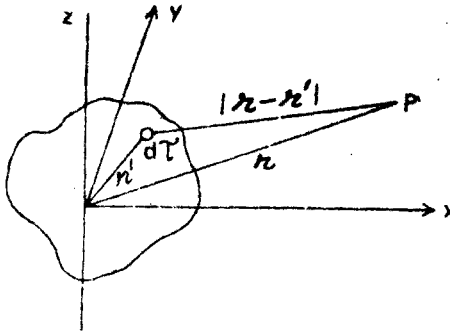
$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

كما وجدناه كان :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

and

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (9.4)$$



شكل رقم (9.1)

في الشكل (9-1) $d\tau'$ تمثل عنصر حجم صغير . ويجب حساب الجهود في نقطة P ومتجه موقعها هو \mathbf{r} . ويمكن ذلك بتكامل ρ و \mathbf{j} حول الحجم V باعتبارهما دوال لـ \mathbf{r}' : التي تمثل متجه موقع عنصر الحجم $d\tau'$. التعابير في (9-4) تصح إذا كانت الشحنة ساكنة والتيارات مستقرة لنأخذ الآن حالة كون ρ متغيرة مع الزمن، ماذا يكون الجهد في نقطة P عند الزمن t ؟ إذا تغير توزيع الشحنة في عنصر الحجم $d\tau'$ مع الزمن، فالجال المسجل في النقطة P عند الزمن t يجب أن يكون رأسياً في $d\tau'$ قبل هذا الزمن أي t' . ذلك لأن الجال الكهربائي مجتمماً مع هذه الشحنات ينتشر بسرعة محددة c لذلك فهو يحتاج إلى وقت للانتقال من $d\tau'$ إلى P وهو $\frac{r - r'}{c}$ عليه فان الزيادة في الجهد نتيجة الشحنة في $d\tau'$ عند النقطة P والزمن t لا يعتمد على ماهية الشحنة في $d\tau'$ عند الزمن t'

وإنما على ما كانت عليه عند الزمن $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ ، هذا هو الوقت الذي يفترض أن ينتشر المجال الكهربائي خلاله من الشحنات في $d\tau$ واتجاه \mathbf{r} ليصل إلى النقطة \mathbf{p} في الزمن t .
إذا :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau \quad (9.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau. \quad (9.6)$$

وجدت هذه التعابير لـ Φ و \mathbf{A} على أرضية فيزيائية، لكن هل هذه هي حلول المعادلتين غير المتجانستين (9-2) و (9-3) ؟ لتتحقق من ذلك ، سنموض (9-5) و (9-2) ،

سنكتب المعادلة (9-5) بالشكل الآتي :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R'/c)}{R'} d\tau \quad (9.7)$$

حيث أن R' تساوي $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

نظراً لصعوبة إيجاد الجهد عند $R' = 0$. سنقسم حجم التكامل في المعادلة (9-7) إلى قسمين : الحيز الأول ليكن كرة صغيرة نصف قطرها r_0 حول النقطة التي تحسب Φ عندها، والحيز الثاني هو ما تبقى من الفضاء. ويكون الجهد بهذا هو :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2\Phi_1 + \nabla^2\Phi_2$$

إذا أهمل المقدار $\frac{R'}{c} = \frac{r - r'}{c}$ في حيز الكرة الصغيرة عندها سيكون :

$$\nabla^2\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R'} d\tau$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{R'} \right) d\tau.$$

في البند (9-3) اثبتنا أن :

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{R'} \right) d\tau = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.9)$$

وهذا لا يعتمد على r_0 ، لذلك يمكن جعل الكرة اصغر ما يمكن بحيث تنكش الى النقطة.

لنجد الآن $\nabla^2 \Phi_2$. لاحظنا ان ∇^2 تعمل فقط على R' في الاحداثيات القطبية الكروية.

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{R'} \frac{\partial^2}{\partial R'^2} (R' \Phi_2) \quad (9.10)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R'} \frac{\partial^2}{\partial R'^2} \rho \left(r', t - \frac{R'}{c} \right) d\tau. \quad (9.11)$$

والآن لاي دالة $f(t - R'/c)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (9.12)$$

$$\therefore \nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R' c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \left(r', t - \frac{R'}{c} \right) d\tau.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \left(r', t - \frac{R'}{c} \right)}{R'} d\tau' \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\therefore \nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Phi_1 + \nabla^2 \Phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$\text{or } \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وهكذا اثبتنا أن المعادلة (9-5) هي حل للمعادلة (9-2).

تسمى الجهود (9-5) و (9-6) بالجهود المتوقفة (retarded potentials). لاحظ انه

يجب حساب التكاملات (integrands) $\rho(r')$ و $j(r')$ عند زمن التوقيف $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$

(retarded time) حيث r' تمثل البعد القطبي بين الجسم ومداره

الاهليجي (radius vector) في زمن التوقيف. هذه المفاهيم مألوفة في

علم الفلك (Astronomy) فضوء النجم الذي نشاهده على الأرض في زمن معين يعطينا معلومات عن النجم في زمن اشعاعه لهذا الضوء أي الذي يستغرقه الضوء في قطع المسافة بين النجم والارض. لذلك يجب استخدام القيم الاولية لـ (J) و (P) عند حساب الجهود. من السهولة ايجاد المجالين E و B عند معرفة الجهود. الا أن حساب A و Φ ليس بالسهولة التي تبدو بها. وتظهر الصعوبات نتيجة اختلاف ازمان التعويق باختلاف اجزاء المصدر. ويمكن ايجاد المجالات في حالات بسيطة معينة بادخال تقريبات محسوسة.

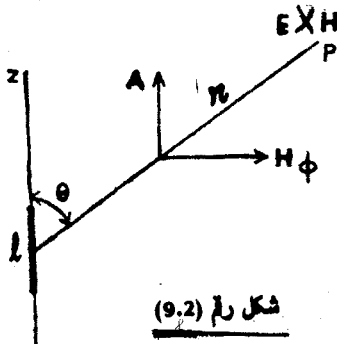
9-2 اشعاع من ثنائي قطب متذبذب (Radiation from an Oscillating Dipole)

لنسحب المجال الاشعاعي الناتج من ثنائي قطب كهربائي متذبذب ولهذا المجال عدة تطبيقات مهمة. حيث يمكن اعتبار منظومات اشعاعية عملية كثيرة على انها متكونة من عدد كبير من هذه الثنائيات لذلك تحتوي على الكثير من الخواص المفيدة في نظرية الكم للاشعاعات المنبعثة من الذرات والجزيئات والنويات. لناخذ سلكاً قصيراً في نهايته كرتين صغيرتين. ونفرض شحنة تنتقل دورياً بين الكرتين. ويتغير الزمن توافقياً أي :

$$q = q_0 \exp(i\omega t) \quad (9.14)$$

حيث q_0 تمثل الشحنة المتذبذبة و ω تمثل التردد الزاوي (angular frequency) للتذبذب . لنفرض أن الطول الموجي للموجة الناتجة اكبر مقارنة مع طول السلك (l) ، أي :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg l \quad \text{or} \quad \frac{2\pi}{\omega} = T \gg \frac{l}{c}$$



وهذا يعني ان الزمن $\frac{L}{c}$ والذي تستغرقه الاشارة لتنتشر على طول السلك من احدى نهايتيه الى الاخرى اقل بكثير جداً من الزمن الذي يتطلبه تغير تيار المصدر تغيراً محسوساً . لذلك سنأخذ التيار I متساوياً في جميع النقاط على طول السلك . الآن :

$$I = \frac{dq}{dt} = i\omega q_0 \exp(i\omega t). \quad (9.15)$$

الشحنة المتذبذبة بين الكرتين مكافئة لعزم ثنائي قطب متذبذب P .

$$| \mathbf{p} | = q\mathbf{l} = q_0 l \exp(i\omega t) = p_0 \exp(i\omega t) = \frac{II}{i\omega} \quad (9.16)$$

حيث $p_0 = q_0 l$.

نجد الآن (ا) كيف يتوزع مجال اشعاع الثنائي في الفضاء (ب) قدرة الاشعاع الكلية. الثنائي موضح في الشكل (2-9) السلك يمتد بمحاذاة المحور ويقع عليه. وتنطبق نقطة الاصل للاحداثيات على مركز السلك. ان ما يهمنا هو قيم المجال في النقطة P المحددة بمتجه الموقع \mathbf{r} . لكي نجد المجال اولاً ايجاد الجهد المعوق. ويعطي المجال المتجه A بالمعادلة الآتية :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau.$$

التكامل حول كل الحجم الذي يشغله التيار. الآن :

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d\tau = I\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \hat{\mathbf{e}}_x d.$$

بالاضافة الى ذلك ولكون التيار باتجاه المحور z دائماً يمكن ان نحل z محل \mathbf{r}' اذا ،

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I\left(z, t - \frac{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{e}}_x z|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{e}}_x z|} \hat{\mathbf{e}}_x dz. \quad (9.17)$$

بما ان $r \gg l$ عليه يمكن اجمال $\hat{e}_z Z$ بالنسبة لـ r ، ويصبح مقام المعادلة السابقة r . ونبدل الزمن $|r - \hat{e}_z Z|$ الذي يفترض ان تقاس عنده كثافة التيار في السلك بالزمن $(t - \frac{r}{c})$ وهكذا

$$\begin{aligned} A(r, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z, t - r/c)}{r} \hat{e}_z dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{e}_z \frac{I(t - r/c)}{r} \end{aligned} \quad (9.18)$$

هذه المعادلة تثبت ان الجهد المتجه A في جميع النقاط مواز لـ l كما هو موضح في الشكل (9-2) ذلك لكون التيار متساوي في جميع النقاط على طول السلك، وعليه تكون مركبات الجهد المتجه هي :

$$\begin{aligned} A_x(r, t) &= 0; \quad A_y(r, t) = 0 \\ \text{and} \quad A_z(r, t) &= \frac{\mu_0 l}{4\pi r} i\omega q_0 \exp\{i\omega(t - r/c)\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega p_0 \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/c) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega p(t) e^{-ikr} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}(t) \frac{e^{-ikr}}{r} \end{aligned} \quad (9.19)$$

ويمكن الحصول على الجهد العددي Φ بسهولة من شرط لورنتس،

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (9.20)$$

بما ان المركبة Z لـ A هي فقط لاتساوي صفراً.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \therefore -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \cos \theta \quad \left(\because \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta \right) \\ \text{i.e.} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \dot{p}(t) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\ \text{Hence, } \Phi &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} p(t) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \end{aligned} \quad (9.21)$$

ويمكن صياغة المعادلة السابقة على النحو الآتي :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{r^2} q \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{z}{cr^2} I \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \quad (9.22) \quad (\text{المسألة 9.1})$$

وهكذا وجدنا A و Φ والآن يمكن إيجاد E و B باستخدام المعادلة (9-1).
في الاحداثيات القطبية الكروية (التي تكون هي الملائمة اذا ما اخذنا طريقة تماثل
المسألة بنظر الاعتبار) تكون المركبات كالتالي :

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega p_0 \cos \theta \exp \{i\omega(t - r/c)\} = \frac{\mu_0}{4\pi r} p_0 \cos \theta e^{-ikr} \quad (9.23)$$

$$A_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega p_0 \sin \theta \exp \{i\omega(t - r/c)\} = \frac{\mu_0}{4\pi r} p_0 \sin \theta e^{-ikr}$$

$$A_\phi = 0.$$

ان مركبات E و H هي :

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{ipk}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \theta \left[1 - \frac{i}{kr} \right] \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -\frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[1 - \frac{i}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr} \right) \right] \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_\phi = 0 \quad (9.24)$$

$$H_r = 0, H_\theta = 0, H_\phi = -\frac{cpk^2}{4\pi} \sin \theta \left[1 - \frac{i}{kr} \right] \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (9.25)$$

العلاقات (9-24)، (9-25) تسمى علاقات هيرتز (Hertz relations) لثنائي القطب المتذبذب.

يمكننا ان نتخيل ان الفضاء مقسوماً الى منطقتين :

1 الحيز الذي فيه $|r| \ll \lambda$ ويسمى المنطقة القريبة (near zone)

وسنجد ان المجال في هذه الحالة هو نفسه لثنائي القطب الكهربائي المستقر.

2 الحيز الذي فيه $|r| \gg \lambda$ ويسمى منطقة الاشعاع (radiation zone)

، يتغير المجال في هذا الحيز ك $1/r$ سوف لاناخذ بنظر الاعتبار الحيز الذي

فيه $kr \approx 1$ لأنه معقد جداً.

لنختبر العلاقتين (9-24)، (9-25) الآن في المنطقة القريبة ومنطقة الاشعاع.

(i) Near Zone: $|r| \ll \lambda$, i.e. $kr \ll 1$

$$E_r \simeq \frac{p \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^2}, E_\theta \simeq \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}, E_\phi = 0 \quad (9.26)$$

$$H_r = 0, H_\theta = 0, H_\phi \simeq \frac{i\omega p \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

هذه التعابير مكافئة لجال ثنائي القطب الكهربائي المستقره النسبة بين المجالين المغناطيسي في هذه المنطقة هي :

$$\frac{\omega \mu_0 |H|}{k |E|} \simeq \frac{\omega \mu_0}{k} \epsilon_0 \omega r = kr \ll 1$$

وهذا يبين ان المجال الكهربائي هو السائد والتسلط في هذه المنطقة $kr \gg 1$.

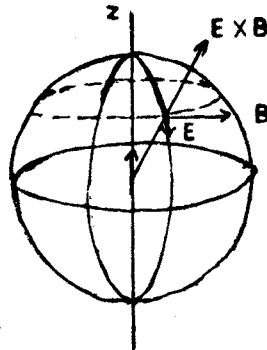
(ii) Radiation zone (منطقة الاشعاع)

$$E_r = 0, E_\theta = -\frac{pk^2}{4\pi \epsilon_0} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}, E_\phi = 0$$

$$H_r = 0, H_\theta = 0, H_\phi = -\frac{cpk^2}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (9.27)$$

تم الحصول على هذه النتائج بالغاء او اجمال الحدود الحاوية على $1/r^2$ ورتبها الاعلى، نجد من (9.27) أن :

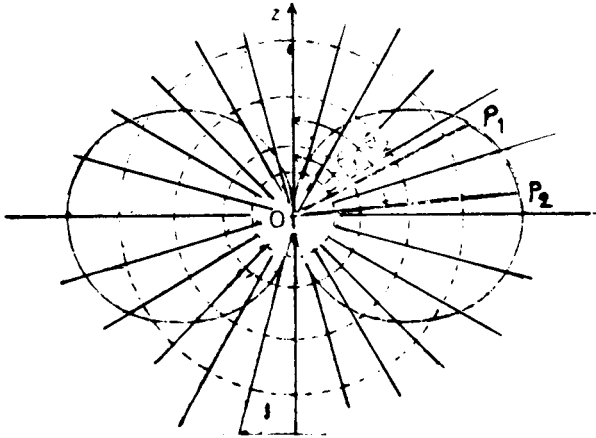
$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\phi. \quad (9.28)$$



شكل رقم (9.3)

يوضح الشكل (3-9) اتجاهات المجالات التي تكون متعامدة فيما بينها. في منطقة الاشعاع تكون $E_r = 0$ ، لذلك يكون توزيع المجال فيما بينها. في منطقة الاشعاع تكون $E_r = 0$ ، لذلك يكون توزيع المجال كروياً حيث يأخذ المجال الكهربائي شكل دوائر طولية ويأخذ المجال المغناطيسي شكل دوائر عرضية. وتكون قيمة المجال اعلى مايمكن عند خط الاستواء (equator) وصفرأ عند الاقطاب نظراً لكون المجال المغناطيسي مستعرضاً في كل مكان، فان اشعاع ثنائي قطب كهربائي متذبذب عادة يكون TM. وعند المسافات الكبيرة $E_r \rightarrow 0$ يصبح المجال الكهربائي مستعرضاً ايضاً لذلك تكون الموجات TEM.

يمكن توضيح التوزيع الفضائي (spatial distribution) للمجالات في رسم بياني قطبي (polar diagram) ، الشكل (49-9) .



شكل رقم (9.4)

تعطى الخطوط المنحنية المجسمة الشدة النسبية لمجال الاشعاع في نقاط مختلفة من كرة مركزها في ثنائي القطب. والمجال بمحاذاة المحور يساوي صفرأ ($\theta=0$). ويكون اعلى مايمكن في مستوي خط الاستواء. المجال لايعتمد على الزاوية السمتية ϕ (azimuthal angle).

النسبة بين المجال الكهربائي في P_1 ، P_2 والزاويتين القطبيتين -

θ_1 و θ_2 تعطى النسبة OP_1/OP_2

لنحسب الآن القدرة اللحظية (instantaneous power) التي تمر
سطح كرة ليكن نصف قطرها r في منطقة الاشعاع.

المعدل الزمني لتجه بوينتنگ (time - average Poynting vector) $\langle N \rangle$ هو :

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} R_r (\bar{E} \times H^*)$$

باستخدام القيم المستخلصة من (9.27) لمنطقة الاشعاع :

$$\langle N \rangle = \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{e}_r \quad (9.29)$$

قدرة الاشعاع الكلية هي :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{c p_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{c p_0^2 k^4}{12\pi \epsilon_0} \\ &= \frac{c p_0^2}{12\pi \epsilon_0} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4. \end{aligned} \quad (9.30)$$

وهكذا، فان القدرة المشعة تتناسب طردياً مع مربع سعة ثنائي القطب الكهربائي
وعكسياً مع الطول الموجي في القوة الرابعة.

سنقدم الآن مفهوم او مصطلح مقاومة الاشعاع (radiation resistance)، نحن
نعرف عند مرور تيار $I_0 \sin \omega t$ في دائرة تحتوي على مقاومة R ، فان متوسط معدل الهدر
او الخسارة في الطاقة يحسب من :

$$\text{Rate of energy dissipated (معدل هدر الطاقة)} = \frac{1}{2} R I_0^2 \dots (9-31)$$

يمكن كتابة التعبير (9.30) للقدرة المهذورة في حالة ثنائي القطب بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} \frac{c p_0^2}{12\pi \epsilon_0} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 &= \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \\ &= \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{c^3} \quad (\text{انظر 9.16}) \\ &= \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{l^2 4\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{c} I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2. \end{aligned} \quad (9.32)$$

هند مقارنة هذه مع (9.31) نجد لمقاومة الاشعاع :

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

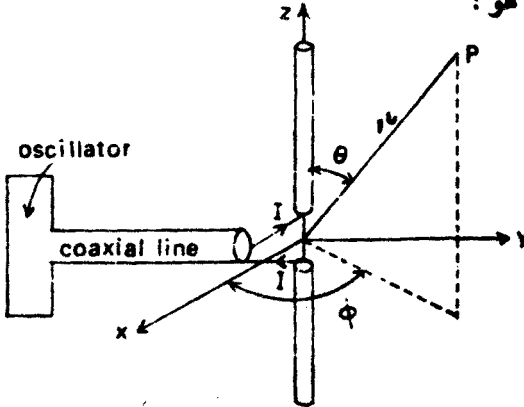
$$\approx 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ohms} \quad (9.33)$$

لاحظ ان هذا التعبير صحيح تحت شرط $l \ll \lambda$

9-3 الهوائي الخطي (Linear Antenna) :-

المعادلة المشتقة في البند السابق تستخدم فقط في منظومات ذات ابعاد خطية اصغر بكثير من الطول الموجي. والهوائيات المستخدمة في البث الاذاعي او التلفزيوني ليست قصيرة عادة مقارنة مع طول موجة الاشعاع الذي تبثه. لذلك لا يكون التيار في الهوائي ثابتاً ويجب اخذ تغير ستمته في الحسبان.

الهوائي البسيط هو هوائي خطي مركزي السحب (Linear antenna centre driven) كما هو موضح في الشكل (9-5). المعدل الزمني متجهه بونيتنك (time average poynting vector) (N) هو :



شكل رقم (9.5)

ويغذي التيار الى الهوائي عبر خط نقل على شكل سلك معدني ذي موصلين متحدي المحور - عادة سلك رفيع جداً - (coaxial cable transmission line) ويفترض ان يوجه الهوائي بمحاذاة المحور Z وان يكون طوله l يثار (excited)

الهوائي عبر فجوة صغيرة في النقطة الوسطية التي تتطابق مع نقطة الاصل. ويفترض ان تتغير كثافة التيار توافقياً في الزمن والفضاء (time and space) بمحاذاة الهوائي. الموجات الواقفة ترتب تحت شروط كون التيار صفراً في كل نهاية. ومن اجل تقريب جيد يمكن كتابة كثافة التيار بالشكل الآتي :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x I_0 \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) \delta x \delta y. \quad (9.34)$$

تضمن دالات دلتا (delta functions) سريان التيار باتجاه Z فقط. يمكن التكهن بسهولة ان هذا التمبر يحقق الشروط المطلوبة. التيار في الفجوة (gap)، اي الاشارة الداخلة (input signal) هي :

$$I(t) = I_0 \exp(i\omega t) \sin\frac{kl}{2}. \quad (9.35)$$

الجهد المتجه في نقطة P التي يحدد موقعها المتجه \mathbf{r} هو :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad \text{حيث } t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_x I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_x I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}{c}\right)} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|} dz. \quad (9.36) \end{aligned}$$

اذا كانت النقطة P بعيدة فيمكن ان نجعل المقام \mathbf{r} ونعوض في البسط :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}| = r - z \cos \theta$$

حيث θ تمثل الزاوية التي يشكل \mathbf{r} مع المحور \mathbf{z} .

$$\therefore \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_x \frac{I_0}{r} \exp(i\omega t) e^{-ikr} \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) e^{ikz \cos \theta} dz.$$

بعد اخذ التكامل نحصل على :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \exp(i\omega t) \frac{e^{-ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (9.37)$$

يمكن حساب \mathbf{E} و \mathbf{H} من هذه المعادلة بسهولة بحسب معدل نسبة سريان القدرة من:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_n}{2c\mu_0} |E_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{e}}_n \frac{I_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2. \end{aligned} \quad (9.38)$$

متوسط القدرة المشعة الى وحدة الزاوية المجمة (unit solid angle) هو :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{4\pi r^2 \langle \mathbf{N} \rangle}{4\pi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2. \end{aligned} \quad (9.39)$$

لذلك يعتمد التوزيع الزاوي للقدرة المشعة على قيمة $\frac{kl}{2}$. فاذا اخذنا هوائي نصف موجة (half-wave antenna) $kl = \pi$.

اي $l = \lambda/2$, فيكون لدينا :

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2. \quad (9.40)$$

ومتوسط القدرة الكلية (W) المشعة بهوائي نصف موجة هي بالمعادلة (9-38).

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \, d\theta. \end{aligned}$$

يمكن إيجاد هذا التكامل عددياً (numerically) ووجد ان قيمته هي :

$$\langle W \rangle \approx 73 \frac{I_0^2}{2} \quad (9.41)$$

وتكون مقاومة الاشعاع (radiation resistance) بهذا هي :

$$R_r \approx 73 \Omega.$$

عند مقارنة هذه القيمة المطابقة لثنائي القطب الكهربائي نجد ان هوائي نصف موجة اكثر كفاءة في الاشعاع.

اذا كان هوائياً مساوياً لرقم تكامل اطوال نصف موجة الذبذبات المسحوبة فان :

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} \right]$$

لقيم m الفردية (9.42)

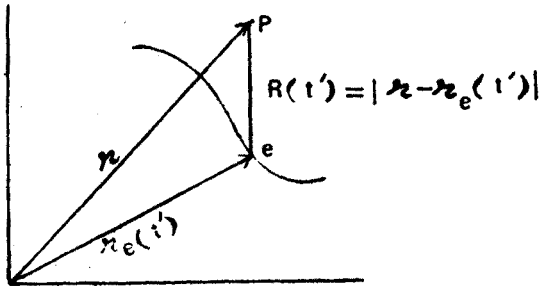
and

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} \right]$$

لقيم m الزوجية (9-43)

9-4 جهود لينارد - ويشرت (Lienard - Wiechert potentials)

لندرس استخدام الجهود الموقفة (9-5)،(9-6) في حساب الاشعاع من جسم فردي الشحنة (single charged particle) مثل الالكترن في حركة عشوائية. نظراً لاعتماد حساب الجهود على موقع وسرعة الشحنة في زمن التعميق $\frac{r - r'}{c}$ t لذا يجب ان يكون لدينا تفاصيل حركة الشحنة. يوضح الشكل (9-6) مسير الالكترن (trajectory) الموصوف بالمتجه الشعاعي او البعد القطبي بين الجسم ومساره الاهليجي $r_0(t)$ (radius vector).



شكل رقم (9.6)

ان حساب الجهود حسب الصيغ (9-5)، (9-6) يتضمن تكامل زمن التعويق حول كل الحجم الذي يتضمن الشحنة. لكننا هنا لانعرف الشكل الهندسي لتوزيع الشحنة داخل الالكترين نفسه، وكل الذي نعرفه ان له شحنة معينة. واذا فرضنا ان حجمه صفر سنقع في مشاكل وصعوبات. لذلك سنفرض ان للالكترين نصف قطر معين ومع ذلك فاننا سنأخذ بنظر الاعتبار فقط الخصائص التي لا تعتمد على نصف القطر هذا، يمكن التعبير عن جهد الالكترين الموق بصيغة دالة دلتا، وهكذا :

$$\Phi(r, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left\{t' - \left(t - \frac{|r - r_e(t')|}{c}\right)\right\}}{|r - r_e|} dt' \quad (9.44)$$

اذا مااعتدنا احدى خواص دالة دلتا ووضعنا هذا التكامل بصيغة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx$ فان تكامله يساوي بسهولة $f(x')$. لذلك سندخل متغيراً جديداً هو t بحيث :

$$t'' = t' - t + \frac{|r - r_e(t')|}{c} \quad (9.45)$$

$$dt'' = dt' + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |r - r_e(t')| dt' \quad (9.46)$$

حيث اخذنا $dt = 0$ ، لأن المراقبة (او المشاهدة) حدثت في مثبت t . نتحن احداثيات النقطة المثبتة p هي X_3, X_2, X_1 واحداثيات الالكترين هي $X_{03}(t), X_{02}(t), X_{01}(t)$

$$\text{Now } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \sqrt{\sum_i \{x_i - x_{ei}(t')\}^2} \quad (9.47)$$

$$\therefore \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \frac{1}{c} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{ei}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \frac{dx_{ei}}{dt'} \quad (9.48)$$

بما ان مركبات ميل المقدار $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$ هي $\frac{\partial}{\partial x_{ei}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$ ومركبات $\frac{dx_{ei}}{dt'}$ هي $-\frac{dr_{e_i}}{dt'}$ يمكن كتابة المعادلة الآتية :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \frac{1}{c} \text{grad}_{r_e} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \cdot \frac{d\mathbf{r}_e}{dt'} \quad (9.49)$$

ويمكن إيجاد الميل بسهولة :

$$\text{grad}_{r_e} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|^3} = -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (9.50)$$

حيث : $\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t) = \mathbf{R}$

نحن نعرف ان :

$$\frac{dr_{e_i}}{dt'} = u \quad (\text{سرعة الالكترتون})$$

$$\therefore \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \cdot u = -\frac{\beta \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (9.51)$$

حيث $\beta = \frac{u}{c}$ ، لذلك :

$$dt' = dt' \left[1 - \frac{\beta \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right]$$

$$dt' = \frac{|\mathbf{R}|}{|\mathbf{R}| - \beta \cdot \mathbf{R}} dt' \quad \text{اي} \quad (9.52)$$

إذا يمكن التعبير عن الجهد (9-44) بالصيغة الآتية :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t')}{|\mathbf{R}(t')|} \frac{|\mathbf{R}(t')|}{|\mathbf{R}(t')| - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')} dt' \quad (9.53)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{R}(t')| - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')} \right]_{t'=0} \quad (9.54)$$

بما ان كون $t=0$ يعني ان $t' = t - R(t)/c$

$$\Phi(r, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \beta \cdot R]_{t' = t - \frac{R(t')}{c}}} \quad (9.55)$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد الجهد المتجه وهو :

$$A(r, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{u}}{R - \beta \cdot R} \right]_{t' = t - \frac{R(t')}{c}} \quad (9.56)$$

تسمى الجهود Φ (9-55) , A (9-56) جهود لينارد - ويشرت التي تعتمد على سرعة الالكترتون ولكنها لاتعتمد على شكل توسيع الشحنة اي لاتعتمد على اي من تفاصيل الموديل الالكتروني (electronic model).

9-5 جهود شحنة في حركة منتظمة - صيغة لورنتس

(Potentials for a Charge in Uniform Motion - Lorentz Formula)

يمكن ايجاد مجالات شحنة متحركة من العلاقات الآتية :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

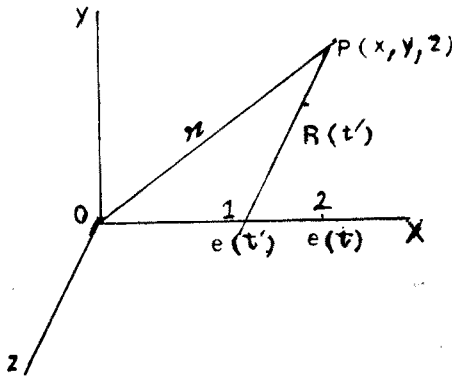
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

سيكون تقييم المجالات بصيغة الموقع المعوق (retarded position) للشحنة ولسرعتها. لأن العلاقة بين الموقع الحاضر (present position) للالكترتون وموقعه المعوق ليست معروفة عامة، على كل حال في حال الحركة المنتظمة فيمكن التعبير عن المجالات بصيغة الموقع الحاضر للشحنة في الزمن t . لنجد مجالات شحنة متحركة بسرعة منتظمة في خط مستقيم وذلك باستخدام جهود لينارد - ويشرت.

إذا كان المراقب او المشاهد في الاطار الثابت (rest frame) للشحنة، اي انه يتحرك مع الشحنة، فان الوضعية التي سيراها ستكون كهربائية مستقرة والجهد العددي بالنسبة له هو :

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

لكن ماهو الجهد اذا كان المراقب ثابتاً او الشحنة متحركة ؟ يمكن ايجاد تعبير لهذا الجهد باستخدام تحويلات النسبية (relativistic transformations) ، (كما سنرى في الفصل التالي) لكن النسبية اسسها الخاصة في الكهروديناميك (electrodynamics). في هذا الجزء سنبين كيف تقودنا معادلات ماكسويل الى مايسمى تحويل لورنتس (Lorentz transformation) وقد سبق ان بينا في البند السابق كيف نجد جهود الشحنة المتحركة من معادلات ماكسويل (Maxwell's equations). وبقي ان نوضح كيف تقود هذه الجهود الى تحويل لورنتس. وسوف تتبع الاسلوب الذي استخدمه لورنتس.



شكل رقم (9.7)

افرض ان شحنة q تتحرك بمحاذاة المحور x بسرعة u ونريد حساب الجهد في نقطة $P(x,y,z)$ عند الزمن t . في هذا الزمن ستكون الشحنة في النقطة (2) التي احداثيتها $x=ut, y=0, z=0$ ، على كل حال نحتاج الى موقعها (1) عند زمن التعويق $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ ، حيث $R(t')$ تمثل المسافة بين النقطة p وموقع الشحنة عند الزمن t' من هذه الصورة نجد :

$$R(t') = |r - \hat{e}_x ut'|$$

حيث r تمثل متجه موقع النقطة p .

$$\therefore R(t') = \{(x-ut')^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}$$

$$t' = t - R(t')/c$$

$$R(t')^2 = c^2(t - t')^2 = (x - ut')^2 + y^2 + z^2$$

$$(c^2 - u^2) t'^2 - 2(c^2 t - xu) t' - r^2 + c^2 t^2 = 0$$

اي :

$$t' = \frac{(c^2 t - xu) - \{(c^2 t - xu)^2 + (c^2 - u^2)(r^2 - c^2 t^2)\}^{1/2}}{(c^2 - u^2)}$$

اذا :

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) t' = \left(t - \frac{xu}{c^2}\right) - \frac{1}{c} \left\{ (x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2) \right\}^{1/2}$$

اي :

$$\begin{aligned} \therefore c(t - t') - \frac{u}{c}(x - ut') \\ = \left\{ (x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (9.57)$$

$$\beta \cdot \mathbf{R} = \frac{u}{c} R \cos \theta = \frac{u}{c} (x - ut')$$

الآن :

اذا

$$\begin{aligned} R - \beta \cdot \mathbf{R} &= c(t - t') - \frac{u}{c}(x - ut') \\ &= \left\{ (x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (9.58)$$

لذلك يكون جهد لينارد - ويشرت هو :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left\{ (x - ut)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2) \right\}^{1/2}} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left\{ \frac{(x - ut)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + y^2 + z^2 \right\}^{1/2}} \end{aligned} \quad (9.59)$$

والجهد المتجه A يكون :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left\{ \frac{(x - ut)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + y^2 + z^2 \right\}^{3/2}} \quad (9.60)$$

اذ كانت $u=0$ ، سنحصل على الصيغة الكهربائية المستقرة للجهد. وهذا مقترح بأن في نظم الاحداثيات المتحركة، يجب تحويل الاحداثيات الى :

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
 y &\rightarrow y \\
 z &\rightarrow z
 \end{aligned}
 \tag{9.61}$$

هذه هي تحويلات لورنتس (Lorentz transformations)

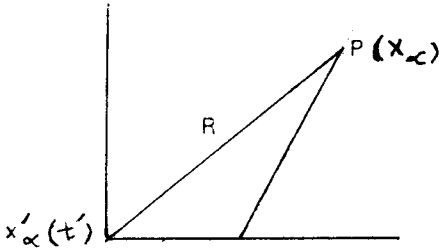
9-6 مجالات شحنة معجلة (Fields of an accelerated charge):

لنعد الآن الى الحالة العامة ونقصد عندما تكون الشحنة في حركة عشوائية والتعبير عن المجالات منها.

لتكن احداثيات نقطة المراقبة P هي $X_{oc} = X_1, X_2, X_3$ الشكل (9-8)، واحداثيات الشحنة عند الزمن t هي $X_c(t) = X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ ، وتنتشر عند هذا الزمن اشارة منها بسرعة C والمنبعثة اصلاً عند X'_c لتصل الى X_{oc} عند الزمن t.

$$R^2 = \sum (x_{oc} - x'_c)^2.$$

افرض اضافة لذلك ان $X'_c(t)$ معلوم.



شكل رقم (9.8)

يمكن ايجاد المجالات من العلاقات الآتية :

$$\begin{aligned}
 E &= -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \\
 B &= \nabla \times A.
 \end{aligned}$$

ونحسب الجهود من :

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \beta \cdot \mathbf{R}]} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{S} \quad (9.62)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \left[\frac{\mathbf{u}}{R - \beta \cdot \mathbf{R}} \right] = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{c^2 S}$$

حيث $S = (R - \beta \cdot \mathbf{R})$.

ان مركبات ∇ هي مشتقات جزئية (partial derivatives) عند زمن ثابت t وليست عند زمن ثابت t' ، بما ان تغير الزمن بالنسبة الى t' معلوم فيجب تحويل الصيغ الى تعابير بصيغة $\nabla_{x_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_\alpha}$ لاحتساب المجالات وهذا ضروري لانه لا يمكن عامة التعبير عن الجهد في حالة الشحنة المعجلة بصيغة الموقع الحاضر فقط. لدينا من الشكل (9-8).

$$R[x_\alpha, x'_\alpha(t')] = [\Sigma(x_\alpha - x'_\alpha)^2]^{1/2} \\ = c(t - t'). \quad (9.63)$$

بما ان x'_α معطاة بدلالة t' فان R هي دالة لـ x_α و t' .

$$R[x_\alpha, x'_\alpha(t')] = f(x_\alpha, t') = c(t - t'). \quad (9.64)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right). \quad (9.65) \quad \text{الآن :}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (9.66) \quad \text{وكذلك :}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \quad (\text{هل يمكنك اثبات ذلك ؟})$$

$$c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad \text{اذا}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \beta \cdot \mathbf{R}} = \frac{R}{S} \quad (9.67) \quad \text{أو}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{S} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (9.68) \quad \text{لذلك}$$

لنحول الآن العامل ∇ . بما ان R هي دالة لـ x_α و t' ، يمكننا كتابة :

$$\nabla R = \nabla_1 R + \frac{\partial R}{\partial t'} \nabla t' = \frac{R}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \nabla t' \quad (9.69)$$

حيث ∇ تتضمن التفاضل بالنسبة لـ x_α عند زمن تعويق ثابت t' . لدينا كذلك من

$$(9-64)$$

$$\nabla R = -c \nabla t'$$

$$-c \nabla t' = \frac{R}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \nabla t'$$

$$\nabla t' = -\frac{R}{Sc} \quad (9.70)$$

عند تعويض هذه في (6-69) نجد ان امكانية كتابة معادلة عامة لـ ∇ هي :

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{R}{Sc} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (9.71)$$

وهكذا وجدنا التحويل المطلوب للعامل $\frac{\partial}{\partial t}$ (9-68) و ∇ (9-71). الآن نحسب

B و E

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{S} \right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}}{Sc^2} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S^2} \nabla_1 S - \frac{\mathbf{R}}{S^3 c} \frac{\partial S}{\partial t'} - \frac{R}{S^2 c^2} \mathbf{u} + \frac{R\mathbf{u}}{c^2 S^3} \frac{\partial S}{\partial t'} \right] \quad (9.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}}{S^2 R} - \frac{\mathbf{u}}{c S^2} + \frac{R}{S^3 c} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \right) - \frac{R}{S^3 c} \frac{u^2}{c} + \frac{R}{S^3 c} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right) \right] \\ &- \frac{R\mathbf{u}}{S^3 c^2} - \frac{R}{S^3 c^2} \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} \right) + \frac{R}{S^3 c^3} \mathbf{u} u^2 - \frac{R}{c^2 S^3} \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right) \quad (9.73) \end{aligned}$$

$$\left(\because \nabla_1 S = \frac{R}{R} - \frac{u}{c} \right).$$

بإعادة جمع وترتيب الحدود نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S^3} \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c} \right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 S^3} \left\{ \mathbf{R} \times \left(\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c} \right) \times \mathbf{u} \right) \right\} \right]. \quad (9.74) \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة :

$$B = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{R}}{S^3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{1}{cS^3} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left\{ \mathbf{R} \times \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{u}}{c} \right) \times \mathbf{u} \right\} \right]. \quad (9.75)$$

تقوم المعادلتان السابقتان الى النتيجة :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc}. \quad (9.76)$$

لذلك فان المجال المغناطيسي B عمودي دائماً على R و E . اذا تفحصت العلاقة (9-74) جيداً فستجد ان المجال E مؤلف من مركبتين، المركبة الاولى هي المعطاة بالحد الاول وهي دالة للسرعة u ، لكن الثانية هي دالة التعميل، لذلك يمكننا كتابة :

$$\mathbf{E} = E_r + E_e \quad (9.77)$$

حيث E_r تمثل مجال السرعة و E_e مجال التعميل. اضافة لذلك نجد ان $E_r \propto (1/R^2)$ لكن $E_e \propto (1/R)$. اذا احتسبنا متجه بوينتسك لهذه المجالات فسنجد ان الزيادة الحاصلة فيه نتيجة هاتين المركبتين هي :

$$N_r \propto \frac{1}{R^4}$$

$$N_e \propto \frac{1}{R^2}. \quad (9.78)$$

لايجاد الطاقة المشعة من الجسم، يجب تكامل مركبة N العمودية على سطح كرة نصف قطرها R . لأن عنصر المساحة يتضمن R^2 والتكامل الذي يحتوي N_r يتغير ك $(1/R^2)$ لكن الذي يحتوي N_e يبقى محددًا، لذلك للقيم (R) العالية المنتجة من N_r تميل الى الصفر بينما تلك الناتجة من N_e هي محددة لذلك نستنتج انه اذا تحرك جسم بسرعة منتظمة فلا يستطيع ان يشع طاقة وانما الطاقة يمكن ان تشع فقط من الشحنات المعجلة. وتترتب على هذا نتائج واستخدامات مهمة.

قد يسأل احد هنا، مادامت الشحنات المعجلة تشع، وللتعميل حالتان سلبية وإيجابية، فهل هناك اشعاع في الحالة السلبية اي عند التباطؤ؟ في الحقيقة هناك اشعاع

فعلى سبيل المثال اذا قذفت قطعة معدنية مجزعة من الالكترونات فانها ستتوقف ويولد هذا التوقف اشعاعاً ويسمى (Bremsstrahlung) اي اشعاع الايقاف (Braking radiation).

(7-9) الاشعاع الناتج من جسم مشحون معجل في سرعة بطيئة
 - : (Radiation from an Accelerated charged particle at low velocity)

اذا كانت سرعة الجسم بطيئة جداً بحيث يمكن الغاء المقدار $\frac{1}{c}$ عندها $S \approx R$ والمجالات المستحصلة من (9-74), (9-75) تصبح:

$$E_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^2} \{ R \times (R \times \dot{u}) \} \quad (9.79)$$

$$B_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^2} (\dot{u} \times R). \quad (9.80)$$

ومتجه بونينتك الذي يضيف للاشعاع (او يزيد من الاشعاع) هو:

$$N_a = E_a \times H_a = E_a \times \frac{B_a}{\mu_0} = E_a \times \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{R \times E_a}{R} \right).$$

بما ان E_a عمودية على R .

$$N_a = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \hat{e}_a = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_a^2 \hat{e}_n \quad (9.81)$$

$$E_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^2} \{ R \times (R \times \dot{u}) \} \quad \text{الآن}$$

$$= \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^2} \{ (R \cdot \dot{u}) R - (R \cdot R) \dot{u} \}$$

$$= \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 R^2} \{ R \dot{u} \cos \theta R - R^2 \dot{u} \}$$

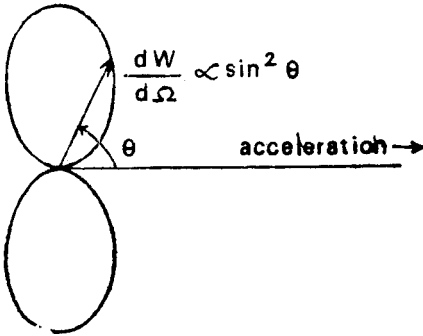
حيث θ تمثل الزاوية المحصورة بين R و \dot{u} .
 لذلك.

$$\begin{aligned}
N_a &= \frac{1}{\mu_0 c} \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 R^6} \{R\dot{u} \cos \theta \mathbf{R} - R^2 \dot{u}\}^2 \hat{e}_n \\
&= \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^6} \{R^4 (\dot{u})^2 \cos^2 \theta + R^4 (\dot{u})^2 - 2 R^4 (\dot{u})^2 \cos^2 \theta\} \hat{e}_n \\
&= \frac{e^2 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} (1 - \cos^2 \theta) \hat{e}_n = \frac{e^2 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \hat{e}_n.
\end{aligned} \tag{9.82}$$

يعطينا متجه بوينتنگ مقدار سريان الطاقة لوحدة المساحة ولوحدة الزمن. ويمكن ايجاد القدرة المشعة على وحدة زاوية مجسمة بالضرب في R^2 التي تمثل المساحة على وحدة زاوية مجسمة.

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \tag{9.83}$$

لذلك فان التوزيع الزاوي للطاقة هو مجرد عبارة عن توزيع $\sin^2 \theta$ (الشكل 9-9).



شكل رقم (9.9)

لايجاد مقدار الطاقة المشعة الكلية يجب اجراء التكامل حول كل كرة.

$$\begin{aligned}
W &= \frac{e^2 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \frac{e^2 (\dot{u})^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{e^2 (\dot{u})^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}.
\end{aligned} \tag{9.84}$$

وتعرف هذه باسم صيغة لارمر (Larmor formula)

8-9 الاشعاع عندما تكون سرعة وتجهيل الجسيمات في خط واحد

∴ (Radiation when the velocity and Acceleration of the Particles and colinear :

تكون مجالات الاشعاع في هذه الحالة :

$$E_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 S^2} \{R \times (R \times \dot{u})\} \quad (9.85)$$

$$B_a = \frac{eR}{4\pi \epsilon_0 c^3 S^2} (\dot{u} \times R) \quad (9.86)$$

$$\therefore E_a^2 = \frac{e^2 R^4 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 S^4} \sin^2 \theta \quad (9.87)$$

$$\text{and } N_a = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \hat{e}_n = \frac{e^2 R^4 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^4} \sin^2 \theta \hat{e}_n \quad (9.88)$$

تية الطاقة المشعة في وحدة زاوية مجسة في θ ومقاساً خلال الفترة dt هي :

$$dW(\theta) = \frac{e^2 R^4 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^4} \sin^2 \theta dt \quad (9.89)$$

وكية الطاقة سبقت بالاشارة السالبة لان هذه الطاقة هي التي يفقدها الالكترن في الفترة الزمنية dt' خلال انبعاث الاشارة.

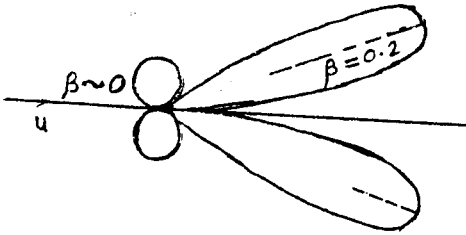
والطاقة المفقودة في وحدة الزمن وفي وحدة زاوية مجسة هي :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= -\frac{dW(\theta)}{dt'} = \frac{e^2 R^4 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^4} \sin^2 \theta \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{e^2 R^4 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^4} \sin^2 \theta \frac{S}{R} \end{aligned} \quad (9.90)$$

حيث استخدمنا العلاقة (9-97) في الحصول على هذه النتيجة .

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{e^2 R^6 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 S^3} \sin^2 \theta = \frac{c^2 R^5 (\dot{u})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^3 \left(1 - \frac{\beta \cdot R}{R}\right)^3} \sin^2 \theta \\ &= \frac{e^2 (\dot{u})^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \quad (9.91) \end{aligned}$$

تعطينا هذه العلاقة التوزيع الزاوي للطاقة المشعة . اذا كانت $\beta \ll 1$ اي $u \ll c$ ،
 فنستبعد صيغتنا (9-83) وللسرع البطيئة . على كل حال اذا كان $U \rightarrow C$ اي $\beta \rightarrow 1$ ،
 ستزداد الطاقة المشعة نحو الامام، شكل (9-10) ، لكن ليس الى الامام تماماً، اي للزاوية
 $\theta=0$



شكل رقم (9.10)

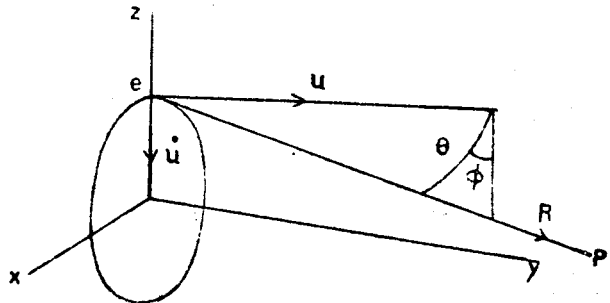
9-9 اشعاع صادر من جسيم مشحون يتحرك في مدار دائري

-(Radiation from a Charged Particle Moving in a Circular Orbit)

سندرس الآن حالة مهمة تتحرك فيها الشحنة في دائرة نصف قطرها ρ وبتردد

$$\therefore u = \rho\omega, u = \rho\omega^2$$

زاوي مقداره ω .



شكل رقم (9.11)

يوضح الشكل (9-11) مدار الجسم الذي يقع في المستوي yz ، واتجاه التمجيل لما نحو المركز، لهذا فهو عمودي على السرعة u .

لتكن θ هي الزاوية بين R ، u و ϕ هي الزاوية السمتية (azimuthal angle) لذا

$$u \cdot R = uR \cos \theta \quad (9.92)$$

$$\dot{u} \cdot R = \dot{u}R \sin \theta \cos \phi. \quad (9.93)$$

ويعطى مجال الاشعاع بالعلاقة الآتية :

$$E_a = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 c^2 S^2} \left[R \times \left\{ \left(R - R \frac{u}{c} \right) \times \dot{u} \right\} \right]$$

$$N_a = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \hat{e}_n \quad \text{ومتجه بوينتتك} :$$

$$\begin{aligned} \text{Now } \left[R \times \left\{ \left(R - \frac{Ru}{c} \right) \times \dot{u} \right\} \right]^2 &= \left[\left(R \cdot \dot{u} \right) \left(R - \frac{Ru}{c} \right) - \left\{ R \cdot \left(R - \frac{Ru}{c} \right) \right\} \dot{u} \right]^2 \\ &= \left(R \cdot \dot{u} \right)^2 \left(R - \frac{Ru}{c} \right)^2 + \left\{ R^2 \dot{u} - \frac{R}{c} (R \cdot u) \dot{u} \right\}^2 \\ &\quad - 2 \left(R \cdot \dot{u} \right) \left(R - \frac{Ru}{c} \right) \left\{ R^2 \dot{u} - \frac{R}{c} (R \cdot u) \dot{u} \right\} \\ &= - \left(\dot{u} \cdot R \right)^2 R^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + (\dot{u})^2 R^4 \left(1 - \frac{R \cdot u}{Rc} \right)^2 \\ &= - (\dot{u})^2 R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + (\dot{u})^2 R^4 \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ &\quad + (\dot{u})^2 R^4 - \frac{2\dot{u}^2 R^4 u \cos \theta}{c} + \frac{(\dot{u})^2 R^4 u^2 \cos^2 \theta}{c^2} \\ &= (\dot{u})^2 R^4 \left[\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right]. \quad (9.94) \end{aligned}$$

حيث استخدمنا العلاقتين (9-92) و (9-93)

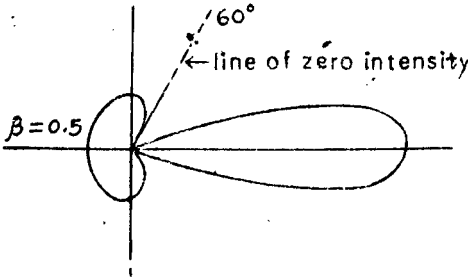
$$\begin{aligned} \therefore N_a &= \frac{1}{\mu_0 c} \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 S^2} (\dot{u})^2 R^4 \left[\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] \hat{e}_n. \quad (9.95) \end{aligned}$$

ويعطى التوزيع الزاوي للطاقة المشعة بالعلاقة الآتية :

$$-\frac{dW(\theta)}{dt'} d\Omega = \left(N_a \cdot \hat{e}_n \right) R^2 \frac{dt'}{dt} d\Omega$$

$$= \frac{e^2(u)^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right)^3} \right] d\Omega \quad (9.96)$$

حيث استخدمنا (4-67) وعضنا عن S كما في (9-91) يوضح الشكل (9-12) النموذج الاشعاعي او النموذج الاشعاع (radiation pattern) في المستوي $\phi=0$ ولقيمة معلومة ل β . عند قيم u الكبيرة يشتد الاشعاع في المقدمة ويصبح شعاعاً حاداً (sharp ray) كلما اقتربت u من c.



شكل رقم (9.12)

تكامل المعادلة (9-96) يعطي النسبة الكلية للاشعاع.

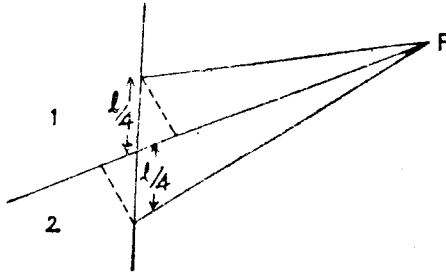
$$-\frac{dW(\theta)}{dt'} = \frac{e^2(u)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{\left[1 - \frac{u^2}{c^2} \right]^2} \quad (9.97)$$

9-10 اشعاع رباعي القطب الكهربائي (Electric Quadrupole Radiation) :-

تصور ان اثنين من ثنائي قطب كهربائي سعة كل منهم P، ويقعان على خط مستقيم واحد ، ويتذبذبان بطورين متعاكسين او خارج الطور بحيث ان لحظة عزم ثنائي القطب لها هي صفر. مع ذلك فان المنظومة هذه تمتلك عزم رباعي قطب وهكذا سيبعث اشعاع رباعي القطب.

يمكن اشتقاق علاقة مجال رباعي القطب بسهولة وذلك لتركيب مجالي ثنائي القطب.
يوضح الشكل (9-13) مجال رباعي القطب.

المجال الناتج من ثنائي القطب واحد في نقطة الاصل عند النقطة P في منطقة الاشعاع هو :



شكل رقم (9.13)

$$E_{\theta} = -\frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{k^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{i\omega t'} \sin\theta \quad (9.98)$$

يقع الثنائيان على مسافة $l/4$ و $l/4$ من نقطة الاصل وثنائي القطب (1) اقرب للنقطة P من نقطة الاصل بمسافة هي تقريباً $(l/4) \cos\theta$ ، لكن ثنائي القطب (2) ابعد بنفس المسافة. لذلك وان طوري ثنائي القطب بالنسبة الى نقطة الاصل يكونان :

$$\left(\frac{kl}{4}\right) \cos\theta \text{ and } -\left(\frac{kl}{4}\right) \cos\theta - \pi.$$

ويظهر عامل الطور $-\pi$ (Phase factor) لأن ثنائي القطب يتذبذبان في طورين متعاكسين. عليه تكون مركبة مجال رباعي القطب :

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= -\frac{k^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta e^{i(\omega t' - \frac{kl}{4} \cos\theta)} - \frac{k^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta e^{i\{\omega t' - (-\frac{kl}{4} \cos\theta - \pi)\}} \\ &= -\frac{k^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ e^{-i\frac{kl}{4} \cos\theta} - e^{i\frac{kl}{4} \cos\theta} \right\} e^{i\omega t'} \\ &= \frac{k^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} 2i \sin\left(\frac{kl}{4} \cos\theta\right) e^{i\omega t'}. \end{aligned} \quad (9.99)$$

باستخدام العلاقة نحصل على :

$$H_* = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_*$$

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{1}{2} R_e (E \times H^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \hat{e}_n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{k^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \sin^2 \left(\frac{kl}{4} \cos \theta \right) \cdot 4 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle &= \langle N \rangle \cdot \hat{e}_n r^2 \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_0} k^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{8\sqrt{\mu_0} \pi^2 \epsilon_0^2} \sin^2 \left(\frac{kl}{4} \cos \theta \right) \\ &= \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{kl}{4} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (9.100)$$

إذا $l = \lambda$, i.e. $kl = 2\pi$

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right). \quad (9.101)$$

عزم رباعي القطب هو Q ويساوي $2P_0 l$

$$\begin{aligned} \therefore \left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{\omega^4 Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 4 l^2} \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \\ &= \frac{\omega^4 Q^2}{128 \pi^4 \epsilon_0 c^6} \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (9.102)$$

فرضنا في معالجتنا اعلاه ان $l = \lambda$ ، الان سنفرض ان l صغير جداً ويقترّب من الصفر $l \rightarrow 0$ ، ستزداد P_0 لتبقى Q ثابتة. وسينقلها الثنائيان الى رباعي نصف قطبي (Point quadrupole) متركز في نقطة الاصل. بما ان kl صغير جداً يمكن كتابة العلاقة (9-99) بالشكل الآتي :

$$E_* = 2i \frac{k^3 p_0}{4\pi \epsilon_0 r} \sin \theta \frac{kl}{4} \cos \theta e^{i\omega t} \quad (9.103)$$

لذلك ،

$$\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle = \frac{k^4 p_0^2 l^2 c}{128 \pi^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{\omega^4 p_0^2 l^2}{128 \pi^2 \epsilon_0 c^6} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (9.104)$$

واضح جداً ان اعلى قدرة مشعة هي عند الزاوية $\theta = 45^\circ$

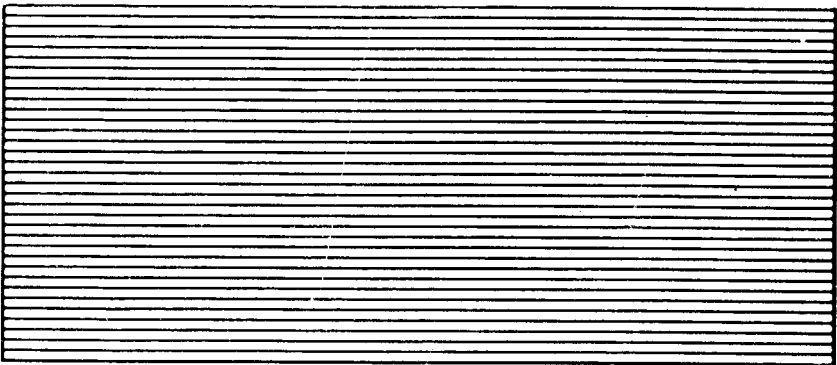
- تمارين الفصل التاسع -

- 9.1 برهن أن كيف العلاقة (9.22) مشتقة من العلاقة (9.21).
- 9.2 جد علاقة تعبر عن المجال الناتج من شحنة تتحرك بسرعة منتظمة.
- 9.3 استنبط علاقة تعبر عن المجالين الكهربائي والمغناطيسي الناتجين من أطار تيار صغير في نقاط بعيدة جداً عن الاطار ثم برهن على امكانية استخدام التكافؤ الامبيرى (Ampere's equivalence) بين الشئائي المغناطيسي والاطارات التيارية في حساب مجالات الاشعاع.
- 9.4 برهن على أن قشرة كروية مشحونة بانتظام تحت تذبذب شعاعي تماماً سوف لاتشع.
- 9.5 جسم كتلته m يتحرك في مدار دائري نصف قطره a تحت قوى كولومب. جد شدة اشعاع الجسم ثم عبر عنه بصيغ طاقة الجسم .
- 9.6 مذبذب رباعي قطب خطي (linear quadrupole oscillator) متكون من الشحنات $-e, 2e, -e$ تقع الشحنة الموجبة $2e$ في نقطة الاصل، وتقع احدى الشحنتين السالبتين في $Z_1 = a \cos \omega t$ والاخرى في $Z_2 = -a \cos \omega t$. جد المجالات في المسافات البعيدة وكذلك متوسط المعدل الذي تشع به الطاقة.

«الفصل العاشر»

الكهربائية الحركية النسبية

Relativistic Electrodynamics



«الفصل العاشر»

الكهربائية الحركية النسبية

Relativistic Electrodynamics

العالم الذي يحيط بنا له واقعية موضوعية، فهو لا يتغير بتغير وجهة نظرنا او مزاجنا في اثناء وصفه واحد اهداف الفيزياء هو صياغة قوانين مستقلة تماماً عن المراقب او الانظمة المرجعية، ويجب ان تكون القوانين صحيحة لكل المراقبين، سنتفحص قانون نيوتن الاول من وجهة النظر هذه وهو ينص على أن :

«الجسم الساكن يبقى ساكناً والمتحرك يبقى متحركاً بسرعة وبخط مستقيم مالم تؤثر عليه قوة خارجية».

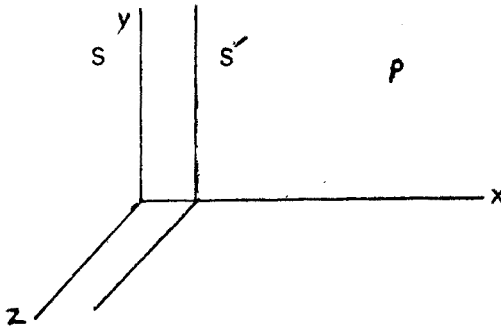
أن القانون يفترض مسبقاً وجود مراقب له وسائل معينة لقياس الموقع والزمن. اذا كان هناك مراقبان الاول (A) في اطار مرجعي معين وجد ان للجسم حركة منتظمة دون تأثير اي قوة عليه، اما المراقب الثاني (B) الذي يتحرك بتعجيل بالنسبة للمراقب (A) فسيجد ان حركة الجسم ليست منتظمة لذلك نستنتج أن قانون نيوتن الاول ليس صحيحاً على الرغم من أن قانون نيوتن الاول ليس صحيحاً لكل الانظمة او الاطر المرجعية لكنه صحيح لبعض الانظمة المرجعية ذات الامتياز المعين، وتعرف هذه الانظمة باسم الانظمة المرجعية ذات القصور الذاتي (inertial frame of reference). الاطر القاصرة هي تلك التي تكون فيها قوانين القصور الذاتي - قانون نيوتن الاول - صحيحة، ويمكن ان نسمي منظومة مرجعية (reference system) يتحرك فيها جسم دون تأثير قوة خارجية عليه ويستمر بسرعة ثابتة بانها منظومة قاصرة (inertial system) واذا تحركت منظومة اخرى بسرعة منتظمة بالنسبة للمنظومة القاصرة تعتبر هي ايضاً منظومة قاصرة. لحل الاطر التي تتحرك بسرر ثابتة بالنسبة لبعضها تعتبر اطر قاصرة (inertial frames)

10.1 تحويل كليليان (Galilean Transformation) :

لدينا في الفيزياء يسمى مبدأ النسبية (Principle of relativity) التي تعتبر بموجبه كل قوانين الطبيعة متشابهة في كل الانظمة المرجعية القاصرة. وهذا يعني ان المعادلات التي تعبر عن قوانين الطبيعة تبقى محتفظة بصيغتها في الانظمة القاصرة المختلفة، أي انها لا تتغير طبقاً لتحويل الاحداثيات والزمن من منظومة الى اخرى. وقد اثبتت التجارب مصداقية هذا المبدأ.

لنأخذ اطارين قاصرين S و S' ذوي محاور متوازية (الشكل 10.1). افرض أن S يتحرك بمحاذاة المحور X بسرعة منتظمة هي v نسبة الى S. سيتم تحديد وقوع أي حدث في نقطة P من المراقب في S بالاحداثيات الفضائية (Space coordinates) X, y, z والزمن t. ونفس الحدث سيوصف من قبل المراقب في S بالاحداثيات (X', y', z', t'). أن تحويل احداثيات نقطة من نظام الى آخر هو على النحو الآتي :

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t. \quad (10.1)$$



الشكل (10.1)

والعلاقة الاخيرة هي نتيجة احد معتقدات الفيزياء القديمة التي تؤمن بأن الزمن مطلق. وهذا مستقل عن الاطار المرجعي.

يسمى التحويل في (10.1) بتحويل كليليان (Galilean transformation) أن حواسنا الاعتيادية تقودنا الى الايمان بأن الاطوال والفترات الزمنية هي نفسها لكل المراقبين القاصرين (inertial observers) الذين يراقبون الحدث . وهذا يعني

انه اذا ماكان هناك قضيبان متساويان في الطول عند الثبات فلا يوجد مبرر لتغير اطولهما اذا تحركا بسرغ نسبية ونفس الشيء اذا ماتم ضبط تزامن ساعتين في حالة الاستقرار فهل ستتوافق قراءاتهما للزمن اذا ماتحركنا حركة نسبية وهكذا، ليكن x_B و x_A يمثلان نهايتي القضيب استناداً الى قياس المراقب في S لاحظ أن قياس النهايتين يؤخذ في نفس الوقت. لذا يكون طول القضيب هو :

$$dl = x_B - x_A.$$

وسيقاس المراقب في S' الذي يتحرك القضيب بالنسبة له بسرعة v ، النهايتين وهما x'_A و x'_B ويكون الطول بالنسبة له هو :

$$dl' = x'_B - x'_A.$$

بوجب افتراضاتنا التي نتوقعها فان $dl' = dl$ لنرى الآن هل تبقى هذه التوقعات صحيحة اذا ما طبقنا تحويل كاليان للاحداثيات :

$$\begin{aligned} dl' &= x'_B - x'_A \\ &= (x_B - vt) - (x_A - vt) \\ &= (x_B - x_A) = dl. \end{aligned} \quad (10.2)$$

لذا نجد أن قياسات الفواصل الفضائية (space - interval measurements) هي مطلقة أي انها نفسها لجميع المراقبين القاصرين طبقاً لتحويل كاليان. من (10.1) لدينا :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \left(\because t' = t \right)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

لذلك :

وهكذا نجد انه على الرغم من تغير سرعتها فان تعجيلها متطابق معادلة نيوتن للحركة في النظامين هي :

$$F_i = m \ddot{x}_i = m \ddot{x}'_i = F'_i \quad (i = 1, 2, 3). \text{ حيث } (10.3)$$

لذلك فان قوانين الميكانيك القديمة لاتتغير تحت تحويل كاليليان. لنفحص الآن سلوك قوانين الكهرومغناطيسية تحت تحويل كاليليان. نعرف أن معادلة الموجة العددية الآتية هي نتيجة معادلة ماكسويل :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.4)$$

لدينا من تحويل كاليليان :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}$$

$$\text{and} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

بالتعويض في (10.4) نحصل على :

$$\nabla'^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t' \partial x'} = 0 \quad (10.5)$$

وهكذا نجد أن معادلة الموجة لم تحتفظ ببيئتها عند التعويض في (10.1) لذلك يختلف الحال في الكهرومغناطيسية عنه في الميكانيك، ولاتحتفظ الكهربائية بنفس المبادئ مع افتراض الثبات الكاليليانى وهذا يمكن رؤيته اذا ماتذكرنا ان الموجة الكهرومغناطيسية المستنبطة من معادلة ماكسويل تنتشر بسرعة ثابتة c ، لكن السرعة التي سيقمها المراقب في الاطار المتحرك S' ستكون إما $c + v$ أو $c - v$ اعتماداً على اتجاه حركته النسبية. لذلك فان سرعة الموجة الكهرومغناطيسية ليست ثابتة تحت تحويل كاليليان. وعليه سيتغير شكل معادلات ماكسويل عند التحويل من نظام الى اخر. هذه الوضعية تجعلنا امام ثلاثة احتمالات علينا ان نختار احداها :

(1) النظرية الكهرومغناطيسية الصحيحة مثلها مثل ميكانيك نيوتن يجب أن لا تتغير تحت تحويل كاليليان، وبما انها ليست كذلك اذن معادلات ماكسويل التي تشكل اساساً للنظرية الكهروديناميكية ليست صحيحة ويجب تحويلها.

(2) يمكن استخدام تحويل كاليليان على الميكانيك، لكن هناك اطاراً قاصراً فريداً مفضلاً تصبح فيه معادلات ماكسويل وعند استخدام اطر مرجعية اخرى يجب تعديل هذه المعادلات بما يلائم هذه الاطر.

(3) معادلات ماكسويل هي صحيحة وهناك تحويل آخر لا تتغير فيه قوانين الكهرودينامك والميكانيك ايضاً. وهو بالتأكيد ليس تحويل كاليليان، وهذا يعني ضمناً أن قوانين نيوتن ليست صحيحة اذا كان الاحتمال الاول هو الصحيح وجب علينا اداء تجارب تثبت وجود انحراف عن نظرية ماكسويل للكهرودينامك، الا انه على العكس من ذلك فقد اثبتت التجارب نجاح نظرية ماكسويل وبشكل مدهش

اما اذا قبلنا البديل الثاني، فيجب ان نعثر على الاطار الممتاز تجريبياً، وهو في الحقيقة اطار الاثير القديم الذي بموجبه يعتبر الفضاء مملوءاً بوسط يسمى الاثير ويفترض ان تنتشر فيه الموجات بسرعة ثابتة "C" وتصح فيه ايضاً معادلات ماكسويل، والمراقب الممتاز هو ذلك الثابت بالنسبة للاثير.

أن أشهر التجارب التي حاولت اثبات الاطار المطلق - اطار الاثير - كانت تجارب مايكلسون - مورلي (Michelson - Morley experiments). وما وجدته هذه التجارب يبدو على كل حال انه بحكم اطار الاثير، الا انهم لم يجدوا اي دليل على وجود اطار قاصر فريد

على الرغم من النتائج السلبية لتجارب مايكلسون - مورلي لم يرغب العلماء في التخلي عن فكرة اطار الاثير، ولتوافق نظرية الاثير مع نتائج تجارب مايكلسون - مورلي افترضوا ان الاثير ينجرف (dragged) مع الاجسام المتحركة. هذا الافتراض يعطي تلقائياً نتائج غير صحيحة لتجاربننا للقياس بالتداخل. مع ذلك فان تجارب فيزاو (Fizeau) 1853 واكثر حداثة منها تلك المبنية على تأثير ماسباور (Mössbauer effect)

التي قام بها شامبيني (champeney)، اسحق (Isaak) وخان Khan (1963) وتجارب مماثلة نفذها جاسياً (Jaseja)، وجاران (Jaran)، وموازي (Murray) وتاونس (Townes) 1964 باستخدام ميزر الامونيا (ammonia maser) لم تعطي أي نتائج مبرهنة على عدم قابلية اكتشاف (أو عدم امكانية وجود) حركة نسبة الى اطار مرجعي مطلق معين.

10-2 فرضيات النظرية النسبية الخاصة (Postulates of Special Theory of Relativity)

وجدنا أن قوانين الكهروديناميك صحيحة ولا تحتاج الى تحويل، وكذلك وجدنا ان فرضية الاثير غير مستحبة (untenable). وهكذا اختار اينشتاين (Einstein) البديل الثالث. احدى النتائج المهمة لتجارب مايكلسون - مورلي هي ان للضوء سرعة ثابتة في جميع الاتجاهات اي انه موحد الخواص ولا تعتمد سرعته على حركة المراقب. فرض اينشتاين ان سرعة الضوء ثابتة في جميع المنظومات القاصرة. ولا تعتمد على المصدر او على المراقب. بما ان مبدأ كاليليان يتطلب اعتماد سرعة الضوء على المصدر والمراقب، استنتج اينشتاين حتمية ابدال تحويل كاليليان وتعديل قوانين الميكانيك التي تتوافق معه. وبنى نظريته النسبية الخاصة على فكرتين اساسيتين وهما تكافؤ الاطر القاصرة وثبات سرعة الضوء والفرضيات هي :

- (1) القوانين الفيزيائية هي نفسها في جميع المنظومات القاصرة، اي ان جميع الاطر القاصرة متكافئة. بعبارة اخرى يستحيل التقاط الاطر القاصر الممتاز بأي وسيلة من وسائل القياس الفيزيائية وكذلك يستحيل ايجاد حالة الحركة المطلقة (absolute motion) وانما يمكننا التحدث عن حركة نسبية.
- (2) سرعة الضوء لها نفس القيمة في جميع الانظمة القاصرة. من الضروري دراسة وتقييم الفرضية الثانية هذه. عندما جسم يتأثر تبادلياً مع جسم آخر، يعبر عن هذا التأثير المتبادل في الميكانيك بطاقته الكامنة. لذلك فان هذا التأثير المتبادل يعتمد على

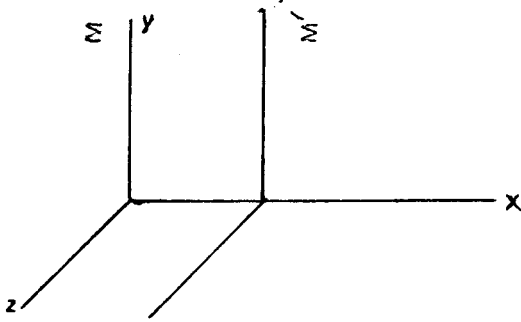
موقع الجسم. واي تغير فيه يؤثر حالاً على الجسم الآخر وهذا يعني ان اشارة التأثير المتبادل تنتشر لحظياً من جسم لآخر وبعبارة اخرى يفترض سرعة انتشار الاشارة ان تكون لانهاية او غير محددة وتعتمد نسبية كاليليان على هذا الافتراض. في الواقع اي تغير يحدث في جسم معين يظهر نفسه في الجسم الاخر بعد انقلاط او مرور فترة زمنية معينة. وتنتشر اشارة التأثير المتبادل بسرعة معينة ايضاً من جسم الى آخر. وهذه سرعة محددة وهي السرعة القصوى للتأثير المتبادل، واضح انه يمكن ان توجد اي حركة بسرعة اعلى من هذه في الطبيعة ويتطلب مبدأ النسبية ان تكون هذه السرعة سرعة الضوء - نفسها في جميع الاطر القاصرة.

في الحقيقة لم يتم اثبات الفرضية الثانية عند عرضها، الا انه قد تم التحقيق منه بصورة قاطعة في سنوات لاحقة. على سبيل المثال سرعة الاشعاع الصادر من اضمحلال (π - meson) كما قاسها كل من فارلي (Farley)، بايلي (Bailey)، وبيكاسو (Picasso) كانت $(2.9974 + 0.0003) \times 10^8$ متر / ثانية بالرغم من ان الميزونات mesons كانت تتحرك بسرعة اعلى من C 0.99975 (اي من سرعة الضوء). بالرغم من بساطة هذه الفرضية الا ان الفيزيائيين اجبروا على اعادة النظر في افكارهم عن الفضاء والزمن.

10-3 تحويل لورنتس (Lorentz Transformation): -

ينصب اهتمامنا الآن على ايجاد معادلة للتحويل بين منظومتين قاصرتين تحل محل تحويل كاليليان وتحفظ سرعة الضوء ثابتة في اثناء التحويل. وعلينا بعد ذلك التحقق من احتفاظ القوانين الفيزيائية بهيئتها تحت هذا التحويل الجديد. والقوانين التي تتغير تحت هذا التحويل يجب تحويلها. ويسمى التحويل الذي سنحصل عليه تحويل لورنتس وقد اشرنا اليه في الجزء (5-5) وسنرى الآن كيفية اشتقاق معادلات هذا التحويل من فرضيات اينشتاين مباشرة .

سنأخذ منظومتين قاصرتين Σ و Σ' كما في الشكل (2-10).



شكل (10.2)

تتحرك المنظومة Σ' بسرعة ثابتة v نسبة الى Σ وباتجاه المحور x . ويجب طبقاً لاينشتاين التخلي عن فكرة الزمن المطلق التي ورثها تحويل كاليبان لاينشتاين فالزمن معنى نسبي ويجب معاملته كالفضاء تماماً. في $t=0$ يتطابق اصل المنظومتين Σ و Σ' وينطبق المحور x' على المحور x . والنقاط الثابتة بالنسبة للمنظومة Σ تكون متحركة بسرعة v نسبة الى Σ' . ويمكن التعبير عن التحويل الاكثر شمولاً بين منظومتي الاحداثيات على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt), \quad y' = Cy, \quad z' = Dz, \\ t' &= Ex + Ft \end{aligned} \quad (10.6)$$

حيث علينا ايجاد الكيات a, C, D, E ايضاً. لنفترض ان موجة كروية كهرومغناطيسية تترك نقطة اصل Σ عند الزمن $t=0$ بما ان سرعة انتشار الموجة هي نفسها في جميع الاتجاهات وفي كل اطار، يمكن وصف تقدم الموجة في الاطارين بالمعادلات الآتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (10.7)$$

and

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (10.8)$$

لذلك

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (10.9)$$

إذا فرضنا ان $z=0, X=0$ عند الزمن $t=0$ ، سنحصل من المعادلتين (10-9)

$$y^2 = y'^2 \quad \therefore C = 1$$

(10-6) على مايلي :

وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان $D=1$

وبالتعويض في (10-8) من (10-6) نحصل على :

$$a^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(Ex + Ft)^2$$

أي :

$$(a^2 - c^2E^2)x^2 - 2(a^2v + c^2EF)xt + (a^2v^2 - c^2F^2)t^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

وهذا يجب ان يطابق (10-7)

$$\therefore a^2 - c^2E^2 = 1, a^2v^2 - c^2F^2 = -c^2, a^2v + c^2EF = 0. \quad (10.10)$$

ولحل هذه المعادلات سنحذف a^2 أولاً وسنحصل على :

$$F(F + vE) = 1$$

$$c^2E(F + vE) = -v$$

وبحذف E نحصل على :

$$F^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \therefore F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{حيث}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, E = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}$$

إذا

لذلك فان معادلات التحويل (10-6) هي :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t - vt)$$

$$y' = y$$

(10.11)

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

و

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

حيث

هذه هي معادلات تحويل لورنتس. لاحظ عندما تكون قيم المقدار v/c فإنها تقترب من معادلات تحويل كاليبيان ومعادلات التحويل العكسي المناظرة لها هي :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y = y' \quad (10.12)$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

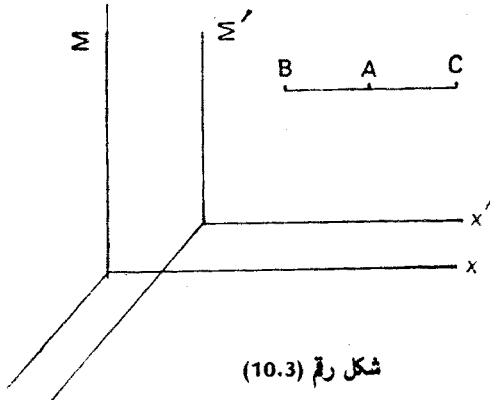
اما معادلات تحويل سرعة جسم متحرك فيمكن ايجادها باخذ مشتقة (10-11) بالنسبة لـ t, t' .

10-4 بعض النتائج المترتبة على تحويل لورنتس (some consequences of Lorentz Transformation)

سندرس الان ثلاث نتائج مهمة لتحويل لورنتس. وتأخذ اهميتها بالتحديد في المجالين الكهربائي والمغناطيسي.

1. مبدأ او فكرة التزامن (The concept of simultaneity):

اذا وقع حدثان في زمن واحد من وجهة نظرمراقب في منظومة مرجعية لايتحتم ان تكون متزامنة ايضا من وجهة نظر مراقب في منظومة اخرى. خذ منظومتان Σ و Σ' تتحرك فيها الان بسرعة v له بالنسبة للاسبق، كما في الشكل (10-3).



إذا انطلقت اشارة من النقطة A في Σ' باتجاهين متعاكسين وموازيين للمحور x فانها ستصل النقطتين B و C اللتين تبعدان بمسافة متساوية من A في نفس الوقت اي متزامنة. على كل حال بالنسبة لمراقب في Σ بما ان نقطة B تقترب منه ونقطة C تتراجع، فان الاشارتان سوف لاتصل في وقت واحد وانما باوقات مختلفة اي ان الاحداث لم تعد متزامنة.

2 - تقلص فيزجيرالد (Fitz Gerald contraction) :-

تصور قضيباً صلباً نهايتيه، مثبتين في الاطار Σ' عند النقطتين $(X_2', 0, 0)$ و $(X_1', 0, 0)$ وعند الزمن t بالذات شوهدت نهايتيه في الاطار Σ عند X_2, X_1 من (10-11) لدينا :

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ان طول القضيب المتحرك اذا ماقيس في Σ عند الزمن نفسه t هو المسافة بين نهايتيه ، اي :

$$x_2 - x_1 = (x_2' - x_1') \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{أو} \quad (10.13)$$

وهكذا فان القضيب تقلص بمقدار العامل $\sqrt{1 - \beta^2}$ ، ويسمى هذا تقلص فيزجيرالد (Fitz Gerald Contraction) وهكذا فان كل جسم يبدو اطول عندما يكون ساكناً بالنسبة للمراقب وعندما يتحرك الجسم يظهر تقلصاً باتجاه الحركة مقدار العامل $\sqrt{1 - \beta^2}$ بما ان $x' = x, y' = y, z' = z$ فان ابعاد الجسم العمودية على اتجاه الحركة لاتظهر تغيراً.

(3) تمدد الزمن (Time dilation) :-

افرض ان ساعة مثبتة بالنقطة X في الاطار Σ' تقيس الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ بين حدثين وقعا في النقطة x عند الزمن t_1 و t_2 وبالنسبة لمراقب في Σ فان الحدثين وقعا عند الزمن t_1 و t_2 من (10-12) ،

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10.14)$$

المراقب في Σ سيعتبر مقدار الفترة الزمنية الفاصلة بين الحدثين هي $t_2 - t_1$ والتي هي اكبر من تلك التي تقيسها الساعة في Σ' . وهذا يعني ان يثبت ان الساعة المتحركة تظهر كأنها تسير سيراً ابطاً.

5-10 الشحنات والمجالات كما تراقب في اطارات مختلفة

(Charges and fields as observed in different frames)

(1) الشحنة (Charge): نعرف ان الشحنة الكهربائية مطلقة الحفظ. البروتونات والالكترونات في حركة دائمة في الذرة ومع ذلك تحتفظ الذرة بتعادلها الكهربائي اذ تلتفى او تمحى تماماً الشحنات السالبة والموجبة. وهذا يعني ان الشحنة في كل جسيم اولي (elementary particle) هي $\pm e$ اذا كان او لم يكن الجسم متحركاً بالنسبة للمراقب. الشحنة في الجسيم الاولي ومن ثم الشحنة الكلية التي يحملها جسم كبير نسبياً هي غير متغيرة بالنسبة للورنتس.

٢- كثافة الشحنة (Charge density): عرفنا ان الشحنة غير متغيرة تحت او عند لورنتس فهل كثافة الشحنة هي كذلك ايضاً.

للإجابة عن هذا السؤال افرض ان مجموعة من الشحنات الموجبة موضوعة على خط معين وتقتل بينها مسافات متساوية وشحنة كل منها هي $+e$. اذا ازيمحت هذه الشحنات مسافة وحدة طول واحدة في الاطار Σ حيث الشحنات ساكنة فيه. فان كثافة الشحنة الخطية كما يراها مراقب Σ' هي Ne كولومب/ متر. اذا كانت N هي عدد الشحنات في وحدة الطول. مراقب آخر Σ' يتحرك بسرعة v

بموازاة الشحنات لا يرى ان الشحنات تغطي وحدة الطول، حيث تنحصر الشحنات في مسافة $\sqrt{1-\beta^2}$ بسبب تقلص فيزجيرالد، لذا فان كثافة الشحنة الخطية بالنسبة لهذا المراقب هي $\frac{N_e}{\sqrt{1-\beta^2}}$ كولومب / متر .

٢. القوى الكهربائية والمغناطيسية (Electric and Magnetic Forces)

لندرس الآن القوى التي يسلطها المجالان الكهربائي والمغناطيسي كما يراها مراقبون في Σ و Σ' افرض ان سلكاً مستقيماً طويلاً في الاطار Σ تجري فيه الالكترونات الحرة بسرعة انحراف مقدارها v باتجاه المحور X . لتكن n هي عدد الالكترونات لوحدة الطول. وهذا مساوٍ لعدد الايونات الموجبة لوحدة الطول. ونفرض ان شحنة q تتحرك بسرعة v بموازاة السلك. ستسلط على هذه الشحنة قوة هي F وتساوي $(v \times B)$ في الاطار Σ . حيث B تمثل المجال المغناطيسي الناتج من التيار في السلك.

الآن افرض ان مراقباً آخر في الاطار Σ' يتحرك بسرعة v باتجاه المحور x . بالنسبة لهذا المراقب ستكون الشحنة q ساكنة. ولذلك سوف لا يكون هناك اي قوة مغناطيسية أو $F = 0$ لكن جميع الانظمة القاصرة متكافئة لذلك يجب أن يتوافق هذا المراقب مع المراقب في Σ' في وجود قوة على q حتى وان لم تكن قوة مغناطيسية كيف سيبرر هذه القوة؟ للمراقب في Σ ، كثافة الشحنة الخطية السالبة هي $\lambda^- = -ne$ وكثافة الشحنة الخطية الموجبة هي $\lambda^+ = ne$ ، والكثافة الكلية

$$\lambda = \lambda^- + \lambda^+ = 0. \quad \text{هي (10.15)}$$

وتعطي كثافة التيار بالسلك من العلاقة :

$$\begin{aligned} \vec{J}_x &= -nev = \lambda^-v \text{ and } j_x^+ = 0 \\ j_x &= j_x^+ + j_x^- = \lambda^-v. \end{aligned} \quad \text{(10.16)}$$

ويولد هذا التيار مجالاً مغناطيسياً B هو :

$$B = -\frac{\mu_0 nev}{2\pi r}$$

وهذا ينتج قوة F تؤثر على الشحنة وتساوي :

$$| \mathbf{F} | = | q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) | = - \frac{\mu_0 n e v^2 q}{2\pi r} \quad (10.17)$$

لنرى الآن كيف تقيم القوة من المراقب في Σ' . ان الشحنات الموجبة التي هي ساكنة بالنسبة للمراقب في Σ ، تعتبر متحركة وبسرعة v وبالاجزاء المعاكس بالنسبة للمراقب Σ' وبأخذ تقلص فيزييرالد بنظر الاعتبار فان وحدة الطول في Σ

تساوي $\sqrt{1-\beta^2}$ في Σ' ، وكثافة الشحنة الخطية لايونات الموجبة هي $\lambda^+ = \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}}$ من جهة اخرى تعتبر الالكترونات ساكنة في الاطار Σ' ومزاحة مسافة

$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ فيه (لاحظ ان هذه المسافة هي وحدة طول واحدة في الاطار Σ) لذلك فان كثافة الشحنة الخطية هي $\lambda^- = -ne\sqrt{1-\beta^2}$. لذلك كثافة الشحنة الكلية في Σ' هي :

$$\lambda' = \lambda'^- + \lambda'^+ = -ne\sqrt{1-\beta^2} + \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ne}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta^2 \quad (10.18)$$

وهي موجبة وليست صفراً كما ظهرت للمراقب في Σ . ولم يعد السلك متعادلاً كهربائياً. وبالنسبة له هناك مجال كهربائي مستقر حول السلك يساوي :

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{ne\beta^2}{2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1-\beta^2}}$$

وعليه تتعرض الشحنة 'q' لقوة تساوي :

$$\begin{aligned} | \mathbf{F}' | &= | q\mathbf{E}' | = \frac{qne\beta^2}{2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{\mu_0 n e v^2 q}{2\pi r\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{| \mathbf{F} |}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\because c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \right) \end{aligned} \quad (10.19)$$

لاحظ ان القوة التي كانت مغناطيسية كلية للمراقب في Σ ظهرت انها كهربائية مستقرة بالنسبة للمراقب في Σ' . لذلك فان المراقبان لايتفقان حول اصل القوة ومقدارها ايضاً على الرغم من اننا فرضنا ان مجموعة الشحنات المكونة للتيار والشحنة

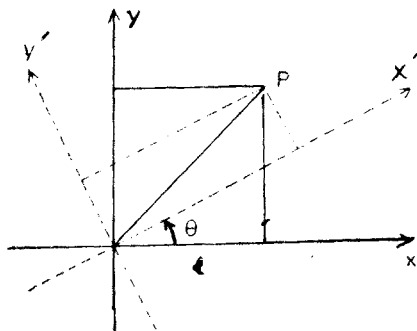
الاختبارية يتحركان بنفس السرعة في مثالنا الا ان هذه المقارنة عامة ويمكن استخدامها لجميع التيارات. قد يسأل احد هنا : ان المقارنة السابقة بينت وجود كثافة صافية للشحنة الموجبة في Σ' في حين كان مقدار الكثافة الصافية في Σ صفراً، اذاً ماذا حول ثبات الشحنة ؟ الا يعني هذا ان مقدار الشحنة الكلي في Σ' مختلف عنه في Σ ؟ انها ليست كذلك فالدائرة كاملة هي متعادلة كهربائياً لأن جزءاً من السلك سيكون موجب الشحنة والآخر سالب الشحنة لأن اتجاه حركة الالكترونات مختلف في اجزاء التيار المختلفة.

10-6 تحويل لورنتس كتحويل تعامدي

(The Lorentz Transformation as an Orthogonal Transformation)

افرض ان اطاراً مرجعياً يدور حول المحور Z بزاوية معينة هي θ . فان احداثيات النقطة P في الاطار الدائر لن تكون كذلك التي في الاطار الاصلي (original frame) والاحداثيات في الاطار الدائر ستكون كما في الشكل (10-4)

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (10.20)$$



شكل رقم (10.4)

هذه هي الاحداثيات الخطية للاحداثيات الاصلية. اذا كانت النقطة P محدودة بتجه الموقع r الذي طوله في الاطار الاصلى هو

$$|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

من السهل التحقق من المعادلة (10-20) أن :

$$|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (10.21)$$

ان التحويل (10-20) لا يغير طول المتجه. ومثل هذا التحويل يسمى التحويل التعامدي (orthogonal transformation).

ويسمى تحويل الاحداثيات خطياً اذا امكن التعبير عن الاحداثيات الجديدة بصيغة الجمع الخطي للاحداثيات القديمة . لذلك فان :

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

i.e.

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (10.22)$$

هي تحويل خطي (linear transformation)، ويمكن كتابتها على هيئة مصفوفة (matrix) على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

اذا كان هذا التحويل تعامدياً عندها :

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_k x_k^2$$

i.e.

$$\sum_j \sum_k \sum_i a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \sum_k x_k^2. \quad (10.24)$$

وهذا ممكن اذا :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$$

لكي يكون التحويل تبعامدياً فان عناصر مصفوفة التحويل هي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اي ان الشرط

$$\sum_{k,j} a_{kj} a_{ik} = \delta_{ij} \quad (10.25)$$

وجدنا ان الدالة الرباعية (quadratic function) $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ لها نفس القيمة في مختلف الاطر القاصرة المرتبطة بواسطة تحويل لورنتس. فتحويل لورنتس مثل التحويل الدوراني (rotational transformation) هو علاقة خطية ، منظومات الاحداثيات المختلفة. ولكنه يجمع الزمن مع الاحداثيات الفضائية. فاذا وقع حدث معين في زمن ومكان محددين في الاطار Σ يوصف باحداثياتنا X, Y, Z, t كما في المتجهات ثلاثية الابعاد فيمكن اعتبار $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ على انه مربع طول المتجه الاربعة (four vector) S . والاحداثيات الاربعة هي

$x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_4$ حيث :

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \text{ and } x_4 = ict. \quad (10.26)$$

هذا الفضاء اللاقليدي الرباعي الابعاد (non-Euclidean four dimensional space) ادخله منكوفسكي (Minkowski) ويسمى ايضاً فضاء منكوفسكي (Minkowski Space) ويمطى مربع الطول بالعلاقة :

$$\begin{aligned} s^2 &= x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \end{aligned} \quad (10.27)$$

حيث استخدمنا في كتابة هذه المعادلة طريقة عرف المجموع (summation convention) وحينما يظهر الرمز او الملحق اللاتيني (Greek suffix) مرتين في حد واحد فيفترض ان يجمع الحد من 1 الى 4.

بموجب الملاحظات الجديدة تصبح معادلات تحويل لورنتس كالاتي

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}; x'_2 = x_2; x'_3 = x_3; \quad (10.28)$$

$$x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

ومعادلات التحويل العكسي هي :

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}; x_2 = x'_2; x_3 = x'_3; \quad (10.29)$$

$$x_4 = \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

وموصوفة تحويل لورنتس هي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق بسهولة انها تحقق الشرط (10-25)، لذا فان تحويل لورنتس هو تحويل تعامدي.

10-7 الصيغ المتغايرة للكهروداينك

(Covariant Formulation of Electrodynamics) :

يعتبر تغاير (Covariance) المعادلات صيغة رياضية تتبع خضوع القوانين الفيزيائية التي تعبر عنها هذه المعادلات لمبدأ النسبية. وتسمى المعادلات التي لا تتغير بالتحويل اللامتغيرة (invariant) قد تتغير حدود هذه المعادلات ولكنها تتحول طبقاً لقوانين التحويل المطبقة وتسمى هنا الحدود متغيرة او متغايرة (covariant).

وجدنا فيما سبق في الجزء (5-9) ان معادلات ماكسويل هي متغيرة بالنسبة لتحويل لورنتس. مغزى هذا ان معادلات ماكسويل تسترد صيغتها في اي اطار مرجعي قاصر. لذا فان مبدأ النسبية نافذة تلقائياً لذلك قد يتردد احد بالاستنتاج ان النظرية النسبية لاتقدم اي شيء مهم للكهروديناميك. وهذا ابعد من ان يكون صحيحاً. فلم يتم اكتشاف علاقة قريبة بين الكميات الفيزيائية الا بعد تقارب نسبي للظاهرة الكهرومغناطيسية. لاجل التحقق من السلوك النسبي لمعادلات ماكسويل يجب كتابتها بصيغة رباعية الابعاد وان نعرف الخواص التحويلية لعواملها التفاضلية، باستخدام قواعد التفاضل الجزئي نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \end{aligned} \quad (10.31)$$

حيث استخدمنا (29-10) بمقارنة هذه العلاقة مع (28-10) نجد ان قانون التحويل هو نفسه المستخدم في تحويل الاحداثي x_1 وتبين المعادلات المناظرة للمركبات الاخرى $\frac{\partial}{\partial x_4}$ ، $\frac{\partial}{\partial x_3}$ ، $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ، انها جميعاً تتحول طبقاً لتحويل لورنتس، نستنتج من ذلك ان $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ هي متجه رابع (four - vector)، وحاصل الضرب العددي لهذا المتجه هو

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2. \end{aligned} \quad (10.32)$$

يجدر تذكيرك هنا بأن هذا العاقل هو الذي يظهر في معادلة الموجة للموجات التي تتحرك بسرعة c ، ويجب ان يكون واضحاً ايضاً انه لامتغير. ويسمى هذا النموذج الرباعي الابعاد للعامل باسم عامل دي المبرتيان (d'Ambertian operator) ويشار له بالرمز \square^2 . ويمكن صياغة معادلة الموجة الآن على النحو الآتي :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \square^2 \psi = 0. \quad (10.33)$$

النص الرياضي لحفظ الشحنة بداخل ضمن معادلة الاستمرارية (equation of continuity)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10.34)$$

لنرى كيف يمكن كتابة هذه المعادلة بصيغة لامتغيرة بحيث تكون لها نفس الصيغة في جميع الاطر القاصرة.

في النظرية النسبية ليست كثافة الشحنة وكثافة التيار كل قائم بذاته وبصورة واضحة لأن توزيع الشحنة الساكن في اطار مرجعي معين يبدو توزيعاً تيارياً في اطار متحرك، لذلك ادخلنا المتجه الرابع \mathcal{G}_μ والذي يساوي $(\mathbf{j}, ic\rho)$ والمتكون من كثافة التيار \mathcal{G}_0 وكثافة الشحنة ρ ، ومركباته هي $\mathcal{G}_1 = j_1, \mathcal{G}_2 = j_2, \mathcal{G}_3 = j_3, \mathcal{G}_4 = ic\rho$ ، والثلاثة الاولى هي الاجزاء الفضائية الشبه لـ \mathcal{G}_μ ، وهكذا لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_\mu}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (10.35)$$

إذا كانت الكلمة Div تمثل عامل التباطؤ الرباعي الابعاد يمكن كتابة معادلة الاستمرارية بالصيغة الرباعية الابعاد على النحو الآتي :

$$\operatorname{Div} \mathcal{G} = 0. \quad (10.36)$$

وإذا كان تعريف جهد المتجه الرابع (four vector Potential) \mathbf{A} هو

$$\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) \equiv \left(A_1, A_2, A_3, \frac{i\Phi}{c} \right) = \left(\mathbf{A}, \frac{i\Phi}{c} \right). \quad (10.37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{وشرط لورنتس هو :}$$

الآن :

$$\begin{aligned}\text{Div } \mathcal{A} &= \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial x_4} \\ &= \text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \left(\frac{i\Phi}{c} \right)}{\partial (ict)} \\ &= \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.\end{aligned}\quad (10.38)$$

لاحظ ان شرط لورنتس هو الآخر لامتغير ويمكن كتابته بالصيغة الرباعية الابعاد على النحو الآتي :

$$\text{Div } \mathcal{A} = 0. \text{ i.e. } \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (10.39)$$

ونعرف أن في الفضاء الحر تحقق الجهود \mathbf{A} و Φ المعادلتان

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (10.40)$$

and

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.41)$$

باستخدام \mathbf{A} , g كما عرفناهما سابقاً يمكن كتابة هاتين المعادلتين بشكل معادلة متجه رابع مفردة :

$$\square^2 \mathcal{A} = -\mu_0 \mathcal{J} \quad (10.42)$$

الجزء الفضائي من هذه المعادلة يعطي (10-40) والمركبة الرابعة تعطي (10-41).
توضح هذه المناقشة امكانية كتابة معادلات ماكسويل بصيغة لورنتس اللامتغيرة دون أي تعديل وانها تتوافق مع فرضية ثبات (consistency) سرعة الضوء.

10-8 ممتدات المجال الكهرومغناطيسي (The Electromagnetic Field :

Tensor)

لنختبر الآن اذا كانت قوة لورنتس $F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ هي ايضاً لامتغيرة لورنتس. ولاجل هذا ، يجب التحقق في تحويل المجالين \mathbf{E} و \mathbf{B} . ان المتجهين \mathbf{E} و \mathbf{B} ليسا متجهات رابعة ولكن يمكن انجاز تحويل المجالين بالتعبير عنها بصيغة الجهود. وسنرى

كيف يمكن استخدام المركبات الستة $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$ في تعريف الممتدة (tensor) من الرتبة الثانية يسمى ممتدة المجال الكهرومغناطيسية (electromagnetic field tensor). في فضاء عدد ابعاده n من الرتبة m مجموعة من كيات n^m التي تتحول كالآتي

$$T'_{abcd\dots} = \sum_{i,j,k,l,\dots} \lambda_{ai} \lambda_{bj} \lambda_{ck} \lambda_{dl} \dots T_{ijkl\dots}$$

نظراً لاننا معنيون بالفضاء الرباعي الابعاد والممتدة (Tensor) من الرتبة الثانية الذي يتحول كالآتي :

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} T_{kl} \quad (10.43)$$

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \text{ etc.}$$

ونعرف أن :

$$\mathcal{A}_\mu = \left(A_1, A_2, A_3, A_4 = \frac{i\Phi}{c} \right) \text{ and } x_4 = ict,$$

وبما ان :

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالشكل الاتي :

$$E_1 = ci \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right)$$

وبنفس الطريقة ،

$$E_2 = ci \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right); E_3 = ci \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) \quad (10.44)$$

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

ونعرف مجموعة كيات كالآتي :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (10.45)$$

لأجل ان تصبح ،

$$E_1 = ci F_{14}; E_2 = ci F_{24}; E_3 = ci F_{34}$$

$$B_1 = F_{23}; B_2 = F_{31}; B_3 = F_{12} \quad (10.46)$$

ويمكن الآن كتابة المتدة (F) tensor بصيغة عناصره $F_{\lambda\mu}$ كالاتي

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{1}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 \end{Bmatrix} \quad (10.47)$$

واضح ان تمتد tensor ضد متناظر (anti-symmetric) أي أن :

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

لن الآن كيف يستخدم المتدة (tensor) في التعبير عن معادلات ماكسويل :

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = 0 \quad (10.48)$$

إذا عينا القيم 3,2,1 ل λ, μ, ν بهذا الترتيب او بأي ترتيب آخر ، تقلصت المعادلة (10-48) الى :

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{اي :}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{أو :}$$

التي هي احدى معادلات ماكسويل، إذا خصصنا القيمة 4 لأحد الادلة أي $\lambda = 2, \mu = 3, \nu = 4$ سنحصل من المعادلة (10-48) على :

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial(ict)} + \frac{1}{ic} \frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{ic} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{أو :}$$

$$(\text{curl } \mathbf{E})_1 + \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0 \quad \text{أو :}$$

التي هي مركبة \times للمقدار $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$. وهكذا نجد أن المعادلة (10-48) تمثل أيضاً معادلة ماكسويل المتجانسة الأخرى. ويمكن الحصول على معادلتى ماكسويل غير المتجانستين الأخرين بسهولة من المعادلة:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu \quad (10.49)$$

على سبيل المثال إذا كانت $\mu = 1$ نأخذ المعادلة (10-49) الصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} &= \mu_0 j_1 \\ 0 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} - \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{1}{ic} \frac{\partial E_1}{\partial(ict)} &= \mu_0 j_1 \quad \text{أى :} \\ (\text{curl } \mathbf{B})_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \mu_0 j_1 \quad \text{أو :} \end{aligned}$$

وبصورة عامة :

$$\text{curl } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

إذا كانت $\mu = 4$ لدينا من (10-49)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} &= \mu_0 j_4 \\ -\frac{1}{ic} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{1}{ic} \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{1}{ic} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + 0 &= \mu_0 j_4 \quad \text{أى :} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{أو :} \end{aligned}$$

وهكذا قدمنا معادلات ماكسويل الأربع في معادلتين تتضمنان عمليات على مركبات ممتدة المجال (field tensor)

9-10 تحويل المجالات (Transformation of the fields)

سننجز الآن تحويل المجالات ، وسنقيم E_x في الاطار Σ' بصيغة E و B في الاطار Σ

$$E_x' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A_x'}{\partial t'}$$

$$\mathcal{A}_\mu \equiv \left(A_1, A_2, A_3, \frac{i\Phi}{c} \right) \quad , \text{ بما أن}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial(ict)} \right) \quad , \text{ و}$$

$$E_x' = ci F'_{14} = ci \left\{ \frac{\partial A_4'}{\partial x_1'} - \frac{\partial A_1'}{\partial x_4'} \right\}$$

بما أن A_μ هو متغير لورنتس.

$$A_4' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (A_4 - i\beta A_1) = \gamma (A_4 - i\beta A_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

$$A_1' = \gamma (A_1 + i\beta A_4); \quad \frac{\partial}{\partial x_1'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

$$\begin{aligned} \therefore E_x' &= ci \left[\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \{ \gamma (A_4 - i\beta A_1) \} \right. \\ &\quad \left. - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \{ \gamma (A_1 + i\beta A_4) \} \right] \\ &= ci\gamma^2 \left[\frac{\partial A_4}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \beta^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} + i\beta \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - \beta^2 \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \right] \\ &= ci\gamma^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) = ci \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) = E_x. \end{aligned}$$

ويمكن حساب المركبات الاخرى بنفس الطريقة ، وهكذا لدينا :

$$E_x' = E_x; \quad B_x' = B_x;$$

$$E_y' = \gamma (E_y - c\beta B_z); \quad B_y' = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \quad (10.50)$$

$$E_z' = \gamma (E_z + c\beta B_y); \quad B_z' = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right).$$

وهكذا حورت المركبات المستعرضة لـ E و B، لكن مركبات اتجاه الحركة لم تتأثر. ووجدنا ان المجالين الكهربائي والمغناطيسي هما نسبياين ايضاً. فقد يوجد المجال E أو B في اطار ما ويكونان صفرأ في اطار آخر.

10-10 المجال الناتج من شحنة نقطية في حركة منتظمة : (Field due to a Point Charge in Uniform Motion)

بيننا في الجزء (6-9) كيف يمكن الحصول على تعبير للمجال الكهربائي لشحنة متحركة باستخدام جهود لينارد - ويشرت.

لنرا الآن الى اي تعبير سنصل من النظرية النسبية.

افرض ان الشحنة واقفة في المنظومة Σ . سيكون المجال المغناطيسي فيها $B=0$ والمجال الكهربائي يعطى من :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (10.51)$$

ماذا سيكون المجال بالنسبة لمراقب في Σ' ؟ سنفرض أن الشحنة في نقطة اصل المنظومة Σ ، وبحسب المجال في اللحظة $t=0$ ، وهذا يعني تطابق تقطعي الاصل من (10-50)

$$E'_1 = E_1; E'_2 = \gamma E_2; E'_3 = \gamma E_3 \\ (\because B_2 = B_3 = 0 \text{ في الاطار الساكن } \Sigma) \quad (10.52)$$

وترتبط الاحداثيات عند الزمن $t=0$ حسب تحويل لورنتس بالعلاقة الآتية

$$x_1 = \gamma x'_1; x_2 = x'_2; x_3 = x'_3.$$

لذا فان المسافة r من نقطة الاصل الى تقطة المراقبة P هي :

$$r = \sqrt{x_\mu x_\mu} = \sqrt{\gamma^2 x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3} \quad (10.53)$$

لذلك فان مركبات المجال الكهربائي في Σ' هي :

$$E_1' = E_1 = \frac{q x_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\gamma x_1}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

$$E_2' = \gamma E_2 = \frac{q \gamma x_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x_2}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

$$E_3' = \gamma E_3 = \frac{q \gamma x_3}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x_3}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}}$$

وبصورة عامة ،

$$\mathbf{E}' = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{(\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{3/2}} \quad (10.54)$$

$$x_1' = r' \cos \theta$$

الآن :

حيث تمثل θ الزاوية التي يصنعها r مع المحور X.

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = r'^2$$

و

$$x_1'^2 = r'^2 \sin^2 \theta$$

$$\gamma^2 x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \gamma^2 r'^2 \cos^2 \theta + r'^2 \sin^2 \theta$$

لذا !

$$= r'^2 \gamma^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2} \right)$$

$$= r'^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \quad (10.55)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'(1 - \beta^2)}{r'^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (10.56)$$

وهكذا مكافئ للتعبير المستخلص في البند (6-9) وهذا توضيح آخر لحقيقة كور

معادلات ماكسويل صحيحة في النسبية.

نجد من المعادلة (56-10) ان المجال الكهربائي لم يعد كروي التناظر . اذا كانت

$\theta = 0$ أي بمحاذاة خط الحركة فيكون المجال :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} (1 - \beta^2) \quad (10.57)$$

وهذا يعني ان مجال كولومب قل بمقدار العامل $(1 - \beta^2)$ اذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ اي عمودي على خط الحركة.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.58)$$

وهذا يعني ان المجال ارتفع بمقدار العامل $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

10-11 صياغة لاكرانجيان لحركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي (Lagrangian Formulation of the Motion of a Charged Particle in an Electromagnetic Field)

يمكن تطبيق طريقة لاكرانجيان للميكانيك القديم (التقليدي) على حركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي اذا ماتم تنقيح دالة لاكرانجيان بصورة مناسبة. سنوضح اولاً الطريقة لحالة لانسية ثم نعطي التقريب النسبي الاكثر عموماً لها . يمكن التعبير عن لاكرانجيان باسلوب تقليدي في المجال الكهربائي الساكن على انه الفرق بين الطاقتين الحركية والساكنة.

$$L = T - U = \frac{1}{2} mv^2 - q\Phi$$

واذا وجد مجال مغناطيسي وجب تحويل لاكرانجيان بصورة ملائمة . واعتماد المجال المغناطيسي على سرعة الشحنات المتحركة ولأن دالة عددية يكون الحد الواجب اضافته لتمديد L هو حاصل الضرب العددي للمتدارين $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ والجهد المتجه A الذي يصف المجال. وسنفرض ان لاكرانجيان يكون :

$$L = \frac{1}{2} mv^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\Phi \quad (10.59)$$

لنستخلص معادلة الحركة ، لدينا من (10-59)

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + qA_i \quad (i = 1, 2, 3,) \quad (10.60)$$

أو بالمتجهات ،

$$\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial L}{\partial v_i} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \quad (10.61)$$

حيث P تمثل الزخم الخطي (Linear momentum) وتساوي mv وتسمى $p + qA$ بالزخم العام. ولدينا أيضاً.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} (v \cdot A) - q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (10.62)$$

او بالتجهات :

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial L}{\partial x_i} &= q \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v \cdot A) - q \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ &= q \text{grad} (v \cdot A) - q \text{grad} \Phi. \end{aligned} \quad (10.63)$$

وباستخدام المتطابقة :

$$\text{grad} (v \cdot A) = (v \cdot \text{grad}) A + (A \cdot \text{grad}) v + A \times \text{curl} v + v \times \text{curl} A$$

يصبح لدينا اذا كانت \vec{v} ثابتة :

$$\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = q (v \cdot \text{grad}) A + q v \times \text{curl} A - q \text{grad} \Phi \quad (10.64)$$

ومعادلة لاكرانجيان للحركة هي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

لذلك لدينا من (10-61) و (10-64)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p + qA) &= \frac{dp}{dt} + q \frac{dA}{dt} \\ &= q (v \cdot \text{grad}) A + qv \times \text{curl} A - q \text{grad} \Phi. \end{aligned} \quad (10.65)$$

مشتقة A بالنسبة للزمن.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\sum_i v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}) A \end{aligned}$$

المعادلة (10.65) تصبح كالآتي :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{A} - q \text{grad } \Phi$$

$$\mathbf{F} = q \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + q\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{A}$$

$$= q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{A}$$

$$= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

(10.66)

هذه هي معادلة لورنتس للقوة.

ونفرض ان يكون لاکرانجيان لجسيم نسبي في مجال كهرومغناطيسي هو :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\Phi \quad (10.67)$$

حيث m_0 تمثل كتلة جسيم مقيسة في إطار مرجعي يكون فيه الجسيم ساكناً. في فضاء منكوفسكي (Minkowski space) . متجه موقع النقطة هو :

$$\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, ict) \quad (10.68)$$

وتفاضل \mathcal{X} هو متجه رابع ايضاً.

$$d\mathcal{X} = (dx_1, dx_2, dx_3, ict) \quad (10.69)$$

نعرف ان عنصر الطول رباعي - الامد هو لامتغير تحت تحويل لورنتس.

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2}. \quad (10.70)$$

سندخل الآن الكمية $d\tau$ التي هي

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{c^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2)} \\ &= \frac{i}{c} \sqrt{dx_\mu dx_\mu}. \end{aligned} \quad (10.71)$$

ويمكننا كتابة $d\tau$ بالشكل الآتي أيضاً:

$$\begin{aligned} d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right\}} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \end{aligned} \quad (10.72)$$

واضح ان هذه الكمية هي لامتغيرة وتسمى عنصر الزمن المناسب (Proper time) في فضاء منكوفسكي متجه :

$$\begin{aligned} qU &= \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \left(\gamma \frac{dx_1}{dt}, \gamma \frac{dx_2}{dt}, \gamma \frac{dx_3}{dt}, ic\gamma \right) \\ &= (\gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3, ic\gamma) \end{aligned} \quad (10.73)$$

وهو سرعة متجه ريع (four - vector velocity)

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{A}, \frac{i\Phi}{c} \right)$$

يمكن صياغة لاجرانجيان (10-67) بالشكل الآتي

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} + \frac{q \mathbf{q}' \cdot \mathcal{A}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} (-m_0 c^2 + q U_\mu \mathcal{A}_\mu) \quad (10.74)$$

يمكن استخلاص معادلة الحركة باستخدام هذا اللاجرانجيان في مبدأ الفعل الادنى

(Principle of least action)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

or

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau = 0 \quad (10.75)$$

i.e.

$$\begin{aligned} &\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} [-m_0 c^2 + q U_\mu \mathcal{A}_\mu] d\tau \\ &= \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} [-m_0 c^2 d\tau + q \mathcal{A}_\mu dx_\mu] = 0 \left(\because U_\mu = \frac{d\mathcal{X}_\mu}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (10.76)$$

باداء التغير ،

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} [-m_0 c^2 \delta(d\tau) + q \mathcal{A}_\mu \delta(dx_\mu) + q \delta \mathcal{A}_\nu dx_\nu] = 0 \quad (10.77)$$

$$\delta(d\tau) = \frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} \delta(dx_\mu) = \frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} d(\delta x_\mu) \quad : \text{الآن}$$

$$d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{dx_\mu dx_\mu} \quad (\text{انظر 10-71})$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} = \frac{i}{c} \frac{dx_\mu}{\sqrt{dx_\mu dx_\mu}} = -\frac{1}{c^2} \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$\delta(d\tau) = -\frac{1}{c^2} \frac{dx_\mu}{d\tau} d(\delta x_\mu) = -\frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\mu d(\delta x_\mu). \quad (10.78)$$

$$\delta \mathcal{A}_\nu = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \quad \text{ايضاً} \quad (10.79)$$

اذن يمكن كتابة المعادلة (10-77) على النحو الآتي :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[(m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) d(\delta x_\mu) + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu dx_\nu \right] = 0 \quad (10.80)$$

تكامل الحد الأول يعطينا :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) d(\delta x_\mu) &= \left[(m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) \delta x_\mu \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &\quad - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) \delta x_\mu dx_\nu \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) \delta x_\mu dx_\nu. \end{aligned}$$

الحد الاول سيزول لان تغير الاحداثيات يجب ان يزول عند نقطة النهاية لذلك تصبح

المعادلة (10-80) :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[-\frac{\partial}{\partial x_\nu} (m_0 \mathcal{U}_\mu + q \mathcal{A}_\mu) + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu dx_\nu = 0$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} + q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - q \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu dx_\nu = 0 \quad : \text{أي}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_\mu}{\partial x_\nu} - q \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu} \right) \right] \delta x_\mu dx_\nu = 0 \quad : \text{أو}$$

وباستخدام (10-45) :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial x_\nu} - qF_{\mu\nu} \right] \delta x_\mu dx_\nu = 0. \quad (10.81)$$

$$\mathcal{U}_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \text{ and } \frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial x_\nu} dx_\nu = d\mathcal{U}_p = \frac{d\mathcal{U}_p}{d\tau} d\tau \quad \text{الآن :}$$

لذلك تبديل (10.81) الى :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[m_0 \frac{d\mathcal{U}_\mu}{d\tau} - qF_{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu \right] \delta x_\mu d\tau = 0 \quad (10.82)$$

مادام δx_μ تغيراً اعتباطياً لهذا ينتج.

$$m_0 \frac{d\mathcal{U}_\mu}{d\tau} - qF_{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu = 0 \quad (10.83)$$

وهذه هي المعادلة التغيرية المطلوبة للحركة. ويمكن إيجاد الجزء الفضائي منها باعطاء القيم 3, 2, 1 ، وهكذا

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d\mathcal{U}_1}{d\tau} &= qF_{1\nu} \mathcal{U}_\nu = qF_{11} \mathcal{U}_1 + qF_{12} \mathcal{U}_2 + qF_{13} \mathcal{U}_3 + qF_{14} \mathcal{U}_4 \\ &= \gamma q v_2 B_3 - \gamma q v_3 B_2 + \gamma q E_1 \end{aligned} \quad (10-73), (10-46) \text{ باستخدام}$$

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma \mathcal{U}_1) = \gamma q [E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2]. \quad \text{أي :}$$

والمعادلة العامة متجهياً هي :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (10.84)$$

حيث استخدمنا الرمز \mathcal{P} ليمثل $m_0 \gamma \mathbf{v}$ ، الذي هو الزخم.

$$\mathcal{P} = m_0 \gamma \mathbf{v} = m\mathbf{v}. \quad (10.85)$$

بالاستفادة من المركبات الثلاثة الاولى للمعادلة (10-83) وجدنا ان معادلة الحركة تسترد صيغتها كما في (10-66) لناخذ الآن المركبة الرابعة.

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d\mathcal{U}_4}{d\tau} &= qF_{41} \mathcal{U}_1 + qF_{42} \mathcal{U}_2 + qF_{43} \mathcal{U}_3 + qF_{44} \mathcal{U}_4 \\ &= -\frac{\gamma q}{ic} E_1 v_1 - \frac{\gamma q}{ic} E_2 v_2 - \frac{\gamma q}{ic} E_3 v_3 \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma \frac{d}{dt} (m_0 i \gamma c) = -\frac{\gamma q}{ic} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

أي :

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (10.86)$$

أهي العبرة الفيزيائية لهذه المعادلة؟ الطرف الايمن يعطينا معدل انجاز الشغل على الجسم من قبل المجال الكهربائي والذي يساوي في الحقيقة معدل تغير الطاقة الحركية T مع الزمن. اذا

$$q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2)$$

$$\text{and} \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = [m_0 \gamma c^2]_{t_1}^{t_2}.$$

اذا كان الجسم ساكناً حينما $t=t_1$ ، تكون قيمة γ عند هذا الزمن 1 .

$$\therefore T = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = m c^2 - m_0 c^2 \quad (10.87)$$

حيث $m = m_0 \gamma$.

تسمى الكمية $m_0 c^2$ طاقة السكون (rest energy) وتحسب الطاقة الكلية W من :

$$W = m c^2 = T + m_0 c^2. \quad (10.88)$$

ويعبر عن الطاقة الكلية احياناً بدلالة الزخم P .

$$W = m_0 \gamma c^2 \quad \therefore \frac{W^2}{c^2} = m_0^2 \gamma^2 c^2$$

$$\mathcal{P}^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2 \quad (\text{الآن انظر 10-85})$$

$$\frac{W^2}{c^2} = \mathcal{P}^2 + m_0^2 \gamma^2 (c^2 - v^2)$$

$$W = [m_0^2 c^4 + \mathcal{P}^2 c^2]^{1/2}. \quad \text{أو} \quad (10.89)$$

12- 10 اشعاع من الجسيمات النسبية
(Radiation from Relativistic Particles)

بيننا في الفصل السابق ان الشحنات المعجلة فقط هي التي تولد اشعاعاً، وبحسب الاشعاع بصيغة لارمر (Larmor formula)

$$-W = \frac{e^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (10.90)$$

اذا كانت سرعة حركة الشحنات اصغر جداً من C ، فان الصيغة صحيحة تماماً في الاطار الساكن بالنسبة للشحنات. وستحقق من الصيغة الآن فيما يخص الجسيمات التي تتحرك بسرور تقارن بسرعة الضوء. نعرف الآن :

$$QJ = (\gamma v, i\gamma c).$$

من هذه العلاقة وبالتفاضل بالنسبة ل τ ، نحصل على تعجيل متجه - رابع (four - vector accelration)

$$\frac{dQJ}{d\tau} = \left\{ \gamma^3 \dot{v} + \frac{\gamma^4 v (v \cdot \dot{v})}{c^2}, \frac{\gamma^4 i (v \cdot \dot{v})}{c} \right\} \quad (10.91)$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt}, \quad \gamma d\tau = dt. \quad \text{حيث}$$

ويمكن تعميم نتيجة (9-10) للطاقت النسبية باستبدال v بتعجيل المتجه الرابع الآن،

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQJ}{d\tau}\right)^2 &= \left[\gamma^4 (\dot{v} \cdot \dot{v}) + \frac{2\gamma^6 (v \cdot \dot{v})^2}{c^2} + \frac{\gamma^8 (v \cdot v) (v \cdot \dot{v})^2}{c^4} - \frac{\gamma^8 (v \cdot \dot{v})^2}{c^2} \right] \\ &= \left[\gamma^4 (\dot{v} \cdot \dot{v}) + \frac{2\gamma^6 (v \cdot \dot{v})^2}{c^2} - \frac{\gamma^6 (v \cdot v)^2}{c^2} \right] \\ &= \gamma^4 \left[(\dot{v} \cdot \dot{v}) + \frac{\gamma^2 (v \cdot \dot{v})^2}{c^2} \right] \end{aligned} \quad (10.92)$$

$$-W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \left[\dot{v} \cdot \dot{v} + \frac{(v \cdot \dot{v})^2}{c^2 (1 - \beta^2)} \right] \quad (10.93)$$

والحالات الخاصة التي يمكننا اخذها بنظر الاعتبار هي :

(1) عندما \mathbf{v} و $\dot{\mathbf{v}}$ تقعان على خط مستقيم واحد :

$$\begin{aligned}
 - W &= \left[\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1 - \beta^2)^2} |\dot{\mathbf{v}}|^2 + \frac{v^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^2 (1 - \beta^2)} \right] \\
 &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1 - \beta^2)^2} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \quad (10.94)
 \end{aligned}$$

(2) عندما $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$

$$- W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1 - \beta^2)^2} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \quad (10.95)$$

تمارين الفصل العاشر

10-1 برهن أن تحويلات لورنسيان ناجحان بنفس الاتجاه مكافئان لتحويل لورنتس مفرد سرعته :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

10-2 سفينة فضائية غادرت الأرض نحو الفضاء وتسير بسرعة $0.8c$ لدى وصولها الى مسافة 8 سنوات ضوئية عن الأرض ارسلت اشارة راديوية الى الأرض.
(ا) ماهو مقدار الفترة الزمنية على السفينة بين وقت المغادرة ووقت ارسال الاشارة ؟ (ب) ماهي الفترة الزمنية المقضية على الأرض حين ارسال الاشارة؟.

10-3 سفينتان فضائيتان تسيران باتجاهين متعاكسين وسرعة واحدة هي $0.7c$ كما يقيسها مراقب في الأرض ماهي سرعة احدى السفينتين كما يقيسها مراقب في السفينة الاخرى؟

10-4 اثبت ان حاصل ضرب E.B هو مقدار لامتغير لتحويل لورنتس؟

10-5 اذا كان المجالان الكهربائي والمغناطيسي متعامدين بعضها على بعض في الاطار المرجعي Σ . ماذا يجب ان تكون سرعة الاطار Σ' بالنسبة للاطار Σ لكي يجد المراقب فيه (ا) وجود المجال الكهربائي فقط؟ (ب) المجال المغناطيسي فقط.

10-6 الشحنة q ساكنة في الاطار Σ . جد بتطبيق تحويل لورنتس الجهدين A و Φ في الاطار Σ' الذي يتحرك بسرعة v . ومن ثم جد E و B.

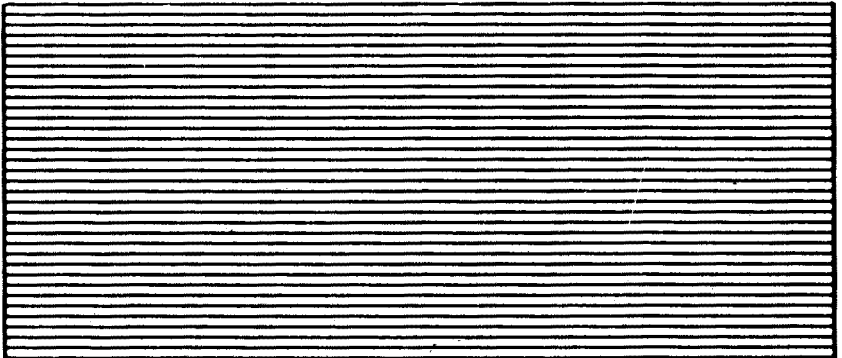
10-7 شعاع كوني فيه بروتون يتحرك عمودياً على مجال مغناطيسي قيمته $10^{-5}T$ مقترباً من الأرض. اذا كانت طاقة البروتون هي $10^{15}eV$. ماهي قيمة المجال الكهربائي في الاطار الذي يكون فيه البروتون ساكناً.

10-8 الشحنة q موزعة بانتظام على سطح قشرة كروية نصف قطرها (a) . اذا تحركت الكرة بسرعة v . بمحاذاة المحور x احسب الطاقة الكهربائية والطاقة المغناطيسية الكلية في الفضاء خارج الكرة مباشرة. اثبت عند $v < c$ ان الناتج يتقلص الى القيمة الساكنة $-\frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 a}$

10-9 جد مسار جسيم مشحون يتحرك في مجال منتظم E ، ناقش حالة جسيم بطيء.

10-10 تردد اهتزاز مذنب هو ω_0 . كم سيكون التردد اذا ماوضع المذبذب في مجال مغناطيسي؟

«الفصل الحادي عشر»
الاستطارة والتفريق
Scattering and Dispersion



«الفصل الحادي عشر»

الاستطارة والتفريق

Scattering and Dispersion

11-1 استطارة الاشعاع (Scattering of Radiation) :-

وجدنا في الفصل التاسع تعابير لمجالات الاشعاع بدلالة عزم ثنائي القطب $P(t)$. ومع اننا لم نحدد سبب اعتمادية $P(t)$ على الزمن، اعتبر وجود موجة كهرومغناطيسية ساقطة على منظومة من الجسيمات المشحونة. وبسبب التأثير المتبادل ما بين الموجة والشحنات، فان الاخيرة تكتسب الحركة بصورة دورية بمرور الزمن. وهكذا سيكون هناك تعجيلات، وبسبب ذلك سوف تشع المنظومة ويمكن اننا ان نعتبر العملية برمتها كأنها تحدث بخطوتين : يتم امتصاص الطاقة ثانية الى الفضاء. نصف هذه العملية على انها استطارة الاشعاع الاصلي الساقط بواسطة الجسيمات المشحونة.

لنعتبر اولاً موجة مستوية احادية اللون خطية الاستقطاب تسقط على جسيم يحمل الشحنة "q" تعطى الموجة من :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}. \quad (11.1)$$

سيسلط المجال الكهربائي قوة على الشحنة q تعطى من :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (11.2)$$

سنفرض ان السرعة التي امتلكها الجسم نتيجة هذا التأثير المتبادل هو اصغر بكثير من c ($v \ll c$) لذلك ستكون معالجتنا لانسيبية ويمكن الغناء الحد الثاني من تعبير لورنتس للقوة.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (11.3)$$

وهكذا لدينا :

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} = qE_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}. \quad (11.4)$$

$$\mathbf{p}(t) = q\mathbf{r}(t) \quad \text{الآن :}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = q \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{q^2}{m} \mathbf{E}(t). \quad (11.5)$$

والمعدل الزمني للقدرة المشعة لوحدة زاوية مجمة هو :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{q^2 \langle \dot{p}^2 \rangle}{16 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \\ &= \frac{\langle \dot{p}^2 \rangle \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \\ &= \frac{q^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 m^2 \epsilon_0 c^3}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

ونعرف المقطع العرضي للاستطارة التفاضلية (differential scattering cross section) على انه :

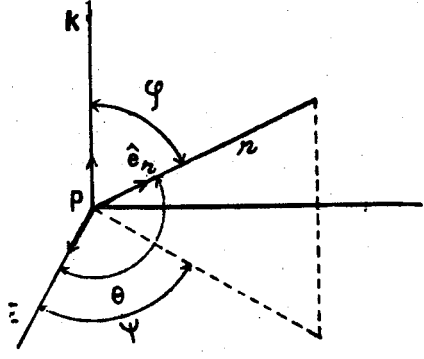
الطاقة المستطارة على وحدة زاوية مجمة على وحدة الزمن

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{الطاقة الساقطة على وحدة المساحة على وحدة الزمن}}{\text{الطاقة المستطارة على وحدة زاوية مجمة على وحدة الزمن}}$$

لذا

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle}{\langle \text{incident flux} \rangle} \\ &= \frac{\left\langle \frac{dW}{d\Omega} \right\rangle}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2} \quad (\text{انظر 9.81}) \\ &= \left(\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (11.7)$$

الزاوية θ هي الزاوية المحصورة بين عزم ثنائي القطب المحتث p واتجاه الشعاع الخارج، أي أنها الزاوية بين المجال الكهربائي E ومتجه الوحدة \hat{e}_r . ويوضح الشكل (11-1) هذه الزاوية.



شكل رقم (11.1)

لنأخذ الآن حالة عامة أكثر افرض ان الضوء الساقط غير مستقطب ماذا سيكون التوزيع الزاوي للضوء المستطار؟
لايجاد ذلك يجب ان نأخذ متوسط حول كافة الاتجاهات السمتية الممكنة للمجال E ، أي تأخذ متوسط الزاوية ψ في الشكل (11-1).

$$\cos \theta = \cos \psi \sin \varphi$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \psi \sin^2 \varphi$$

يجب علينا ان نأخذ متوسط حول ψ . ليكن $\sin^2 \theta$ هو متوسط $\sin^2 \theta$ حول كل الزوايا ψ .

$$\therefore \overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{\cos^2 \psi} \sin^2 \varphi$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \varphi).$$

لذلك في حالة الاشعاع غير المستقطب.

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{\text{unpolarized}} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \overline{\sin^2 \theta} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}. \quad (11.8)$$

يمكن ان نرى من الشكل ان الزاوية φ هي الزاوية بين اتجاه الاشعاع الساقط واتجاه الاشعاع المستطار لذا تسمى زاوية الاستطارة (Scattering angle).
 يمكن ايجاد المقطع العرضي الكلي بأخذ التكامل حول كل الزاوية المحيطة.

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle_{\text{unpolarized}} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \int \frac{1 + \cos^2\varphi}{2} \sin\varphi d\varphi d\psi \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (11.9)$$

وتسمى الاستطارة هذه ذات الموجة الكهرومغناطيسية المستوية غير المستقطبة نتيجة جسم مشحون حر باستطارة تومسن (Thomson scattering).
 اذا كان الجسم المشحون الكترونياً $q = e$ و:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (11.10)$$

حيث $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ ويسمى نصف قطر الالكترن التقليدي (Classical electron radius). التوزيع القديم لشحنة قيمتها الكلية e يجب ان يكون نصف قطره من هذا الترتيب اذا كانت طاقته الذاتية (self-energy) مساوية لكتلة الكترونة يساوي المقطع العرضي لاستطارة تومسن لاستطارة الكترن حر

$$\sigma_T = 0.665 \times 10^{-28} \text{ m}^2$$

11.2 مخمود الاشعاع (Radiation Damping) :

ناقشنا فيما مضى مسائل الكهروديناميك التي اخذنا بنظر الاعتبار فيها اما الاشعاع الكهرومغناطيسي الناتج من شحنات معجلة او تأثير مجال كهرومغناطيسي خارجي على حركة الجسم . وناقشنا هاتين الحقيقتين بصورة مستقلة وبدون ترابط . على كل حال عندما تتمجل شحنات نتيجة المجال الكهرومغناطيسي الموضوعه فيه ، يتولد الاشعاع الكهرومغناطيسي وهذا بدوره مرتبط بالتأثير المترتب على حركة الجسم لذلك ومن اجل معالجة صحيحة يجب اخذ هذا التأثير بالحسبان .

ويسمى رد فعل الاشعاع على حركة الجسم رد فعل الاشعاع (radiation reaction) أو خمود الاشعاع (radiation damping).

لنرى الآن كيفية ادخال تأثيرات مفاعلية الاشعاع في معادلة حركة الجسم المشحون . معادلة نيوتن للحركة لجسم كتلته m وشحنته e مسلط عليه قوة خارجية محفوظة F_0 هي :

$$m\dot{v} = F_e. \quad (11.11)$$

اهلنا في كتابة هذه المعادلة انبعاث الاشعاع. ومادام الجسم يتعجل فانه سيبعث اشعاعاً ولادخال رد فعل المجال الاشعاعي على الجسم يجب تحويل المعادلة (11-11) باضافة قوة رد الفعل F_r .

$$m\dot{v} = F_e + F_r \quad (11.12)$$

لكن ماذا تساوي هذه القوة؟ الطاقة المشعة لوحدة الزمن من الشحنة e المتحركة بسرعة v ، التي هي اقل بكثير من c وتحت تعجيل $a = \dot{v}$ ، كما هي معطاة في (9-84) هي :

$$W = \frac{e^2(\dot{v})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (11.13)$$

لأجل حفظ الطاقة يجب ان يكون الشغل الذي تنجزه القوة F_r على الجسم في فترة زمنية قل t_1 الى t_2 ، مساوياً لسالب الطاقة المشعة في هذه الفترة، اي :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_r \cdot v \, dt = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v} \cdot \dot{v} \, dt. \quad (11.14)$$

ويمكن تكامل الطرف الايمن بالاجزاء ونحصل على :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_r \cdot v \, dt = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[v \cdot \dot{v} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} v \cdot \ddot{v} \, dt.$$

إذا كانت الحركة دورية او كانت الفترة الزمنية قصيرة عندها فستكون حالة المنظومة عند t_2 هي نفسها تقريباً عند t_1 وبالامكان اهمال الحدود التي تم تكاملها وهكذا يمكننا كتابة العلاقة التقريبية الآتية :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(F_r - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{v} \right) \cdot v \, dt \simeq 0 \quad (11.15)$$

التي تريننا ماييلي :

$$F_r = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{v} = m\tau \ddot{v} \quad (11.16)$$

حيث جعلنا $\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$ لملائمتها، لذلك يمكن كتابة المعادلة المحورة (11-12)

$$m\dot{v} = F_e + m\tau \ddot{v}$$

$$m(\dot{v} - \tau \ddot{v}) = F_e \quad (11.18)$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة ابراهام - لورنتس للحركة

(Abraham - Lorentz equation of motion)

الآن اذا كانت القوة F_0 قوة خطية معيطة (linear restoring force) من النوع $F_0 = -m\gamma r$ (لا تختلف عن r المستخدمة في الفصل السابق) ، يمكن كتابة المعادلة (11-18) بالصيغة الآتية :

$$m \ddot{r} - m\tau \ddot{r} + m\gamma r = 0. \quad (11.19)$$

اذا كان حد خود الاشعاع صغيراً، فتختصر المعادلة الى :

$$m \ddot{r} + m\gamma r = 0 \quad (11.20)$$

وحلها هو :

$$r = r_0 e^{-i\omega_0 t} = r_0 e^{-i\omega_0 t} \quad (11.21)$$

حيث وضعنا $\omega_0^2 = \gamma$ ، لذلك لدينا.

$$\dot{r}(t) = -i\omega_0 r(t)$$

and

$$\ddot{r}(t) = i\omega_0^2 r(t) = -\omega_0^2 r(t) \quad (11.22)$$

وباستخدام هذه العلاقة التقريبية، يمكن كتابة المعادلة (11-9) على النحو الآتي :

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\tau\omega_0^2\dot{\mathbf{r}} + m\gamma\mathbf{r} = 0$$

$$m[\ddot{\mathbf{r}} + l\dot{\mathbf{r}} + \gamma\mathbf{r}] = 0 \quad (11.23)$$

$$l = \tau\omega_0^2 = \frac{e^2\gamma}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad \text{حيث} \quad (11.24)$$

31-1 التفريق في الغازات المخففة (Dispersion in Dilute Gases)

سندرس الآن انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الغازات المخففة التي تهمل فيها المفاعلات المتبادلة بين الجسيمات الأولية المتكونة منها. عند مرور الموجة خلال الغاز ستزاح الالكترونات من اماكنها المتوازنة وتصبح الجزيئات مستقطبة. سنهمل الفرق بين المجال الكهربائي المسلط والمجال الموضعي (local field) لأن كثافة الغاز قليلة. ونفرض ان الالكترون مرتبط ببقوة خطية معيدة والمحدد كما وضعنا في البند السابق يتناسب مع السرعة.

معادلة الحركة لالكترون (e) هي :

$$m[\ddot{\mathbf{r}}_e + l_e\dot{\mathbf{r}}_e + \gamma_e\mathbf{r}_e] = e\mathbf{E} \quad (11.25)$$

حيث e تقيس قوة التمرد. ويمكن كتابة هذه المعادلة على النحو الآتي

$$\ddot{\mathbf{r}}_e + l_e\dot{\mathbf{r}}_e + \gamma_e\mathbf{r}_e = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (11.26)$$

ان حل الحالة المستقرة لهذه المعادلة هو :

$$\mathbf{r}_e(t) = \frac{\left(\frac{e}{m}\right) \mathbf{E}_0}{(\omega_e^2 - \omega^2) - il_e\omega} \exp(-i\omega t) \quad (11.27)$$

وعزم ثنائي القطب الناتج من ازاحة الالكترون هو :

$$\mathbf{p}_e = e\mathbf{r}_e(t) = \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right) \mathbf{E}}{(\omega_e^2 - \omega^2) - il_e\omega} \quad (11.28)$$

افرض وجود N من الالكترونات في وحدة الحجم في الغاز وجزءاً منها f_α كاره خاصية تردد الرنين ω_α . عندها يكون مجموع عزم ثنائي القطب الكلي لوحدة الحجم هو :

$$P = \sum_{\alpha} N f_{\alpha} p_{\alpha} = E \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right) N f_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - i l_{\alpha} \omega} \quad (11.29)$$

حيث f_{α} تعرف بشدات المذبذب (oscillator strengths) وتخضع لقاعدة الجمع $\sum f_{\alpha} = 1$.

بما ان $P = \epsilon_0 \chi E$ (انظر 2-21) فان المتأثرية الكهربائية النوعية χ تعطى من:

$$\chi = \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{e^2}{m \epsilon_0}\right) N f_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - i l_{\alpha} \omega} \quad (11.30)$$

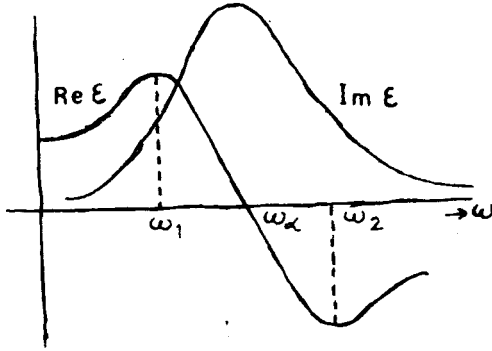
وثابت العزل ϵ يعطى من :

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{e^2}{m \epsilon_0}\right) N f_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - i l_{\alpha} \omega} \quad (11.31)$$

ونعرف ان معامل الانكسار n يساوي $\sqrt{\epsilon}$.

$$n^2 = \epsilon = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{e^2}{m \epsilon_0}\right) N f_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - i l_{\alpha} \omega} \quad (11.32)$$

المعادلة (11-32) هي علاقة التفريق (dispersion relation) للغاز الخفف. ثوابت الخمود l_{α} صغيرة عموماً لذلك n^2 (أو ϵ) رقم حقيقي تقريباً لمعظم الترددات، للقيم $\omega < \omega_{\alpha}$ تكون جميع حدود الجمع (11-32) موجبة و ϵ اكبر من واحد، وللقيم $\omega > \omega_{\alpha}$ تصبح او تزداد الحدود السالبة اكثر فاكثر في الجمع في النهاية ϵ تصبح اقل من الوحدة الواحدة. وبجوار ω_{α} يكون السلوك غريباً حيث تختفي الاجزاء الحقيقية ويصبح الحد خيالياً وكبيراً. ويوضح الشكل (2-11) تغير الاجزاء n^2 الحقيقية والخيالية



شكل رقم (11.2)

ويسمى التفريق طبيعي (normal) اذا كانت $\frac{dn}{d\omega} > 1$ اما اذا كانت $\frac{dn}{d\omega} < 1$ ينعكس ترتيب الالوان الموشورية (prismatic colours) ويسمى التفريق غير الطبيعي (anomalous) ونرى من الشكل (11-2) ان التفريق غير الطبيعي يحدث بين الترددين ω_1 , ω_2 في الحيز الذي فيه $\frac{dn}{d\omega} < 1$ ويكون طبيعياً عدا ذلك في كافة المواقع الاخرى. اذا كان $Im \epsilon > 0$ فسيكون هناك التفريق في الطاقة من الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط. لذلك، في المناطق التي تكون فيها $Im \epsilon$ كبيرة تسمى مناطق الامتصاص الرنيني (resonant absorption) اما اذا كان $Im \epsilon < 0$ فان الموجة ستكسب طاقة من الوسط مؤدياً الى تضخم (amplification) الموجة كما في حالي الميزر (masers) والليزر (Lasers).

41-1 التفريق في المواد السائلة والصلبة (Dispersion in Liquids and Solids):

اذا لم يكن الوسط مخففاً لايتساوى المجال الموقمي والمجال الخارجي. ويجب ابدال متجه المجال الكهربائي E في (11-29) بالمتجه :

$$E_{eff} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

وهكذا لدينا :

$$P = \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \sum_{\alpha} \frac{Nf_{\alpha} \left(\frac{e^2}{m} \right)}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - il_{\alpha}\omega} \quad (11.33)$$

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon E,$$

$$\frac{P}{E + \frac{P}{3\epsilon_0}} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} 3\epsilon_0$$

$$\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} = \sum_{\alpha} \frac{Nf_{\alpha} \left(\frac{e^2}{m} \right)}{3\epsilon_0 \{ (\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - il_{\alpha}\omega \}} \quad (11.34)$$

$$\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum \frac{Nf_{\alpha} \left(\frac{e^2}{m} \right)}{3\epsilon_0 \{ (\omega_{\alpha}^2 - \omega^2) - il_{\alpha}\omega \}} \quad \text{أو:} \quad (11.35)$$

لاحظ ان جميع الحدود في الطرف الايمن لاتعتمد على الكثافة عند N التي تمثل عدد الالكترونات لوحدة الحجم حيث تتناسب مع عدد الذرات لوحدة الحجم اي تتناسب مع الكثافة. لذا ولتردد معلوم، لدينا :

$$\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = A \quad (\text{ثابت}). \quad (11.36)$$

وهذه مشابهة لمعادلة كلاسيوس - موسوتي (2-72) اذا ما كتبت بصيغة n^2 أي :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} = A \quad (11.37)$$

وتسمى صيغة لورنتس - لورنس (Lorentz Lorenz formula) وتسمى الكمية A الانكسارية الذرية او الانكسار النوعي الذري (atomic refractivity) للوسط اذا كانت المادة جزيئية، ووزنها الجزيئي W، يمكن كتابة الصيغة على النحو الآتي :

(حيث N_0 هو عدد أفوكادرو $N = \frac{\rho N_0}{W}$ ، وتسمى الكمية A_m بالانكسارية الجزيئية او الانكسار النوعي الجزيئي (molecular refractivity) -

إذا احتوى الوسط على الكترونات حرة ، فستكون حركتها عشوائية ولايسري فيها تيار. وعند تسليط المجال تكتسب الالكترونات مركبة سرعة اضافية وينتج تياراً. تتصادم الالكترونات مع ذرات المادة وتستطار مسببة الخمود. والذي يعتمد بوضوح على سرعة الالكترونات يمكن كتابة معادلة حركة الالكترون بالشكل الآتي :

$$m\dot{v}_x + ml_x v_x = eE_0 \exp(-i\omega t) \quad (11.38)$$

حيث افترضنا ان المجال يتغير توافقياً مع الزمن. ويمكنك التحقق من ان حل هذه المعادلة هو :

$$v_x = \frac{eE_0 \exp(-i\omega t)}{m(l_x - i\omega)} \quad (11.39)$$

لذلك فان كثافة التيار J تساوي :

$$j = \sum_{\alpha} e v_{\alpha} = Nev = \frac{Ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m(l - i\omega)} \quad (11.40)$$

حيث افترضنا وجود N من الالكترونات لوحدة الحجم تتحرك بالسرعة العامة v .

$$j = \sigma E$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(l - i\omega)} \quad (11.41)$$

لنجد الآن ثابت الخمود l (damping constant) للنحاس باستخدام هذه الصيغة. للنحاس $N \simeq 8 \times 10^{28} \text{ atom/m}^3$ وفي درجات الحرارة الطبيعية توصيلية الترددات الواطئة σ تساوي تقريباً $\sigma \simeq 6 \times 10^7 \text{ mho m}^{-1}$ ، لذلك :

$$l = \frac{Ne^2}{m\sigma} = \frac{8 \times 10^{28} \times 1.6 \times 1.6 \times 10^{-88}}{9 \times 10^{-31} \times 6 \times 10^7} \\ = 3 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

لذلك عند الترددات 10^{11} أو اقل تكون موصلية المعادن حقيقية ولا تعتمد على التردد، وعند الترددات تحت الحمراء وما فوق تكون الموصلية حقيقية وتتباين مع التردد طبقاً للصيغة (11.41).

«تمارين الفصل الحادي عشر»

11-1 جد المقطع العرضي التفاضلي لاستطارة موجة مستقطبة على شكل قطع ناقص.

11-2 ضع تعبيراً للمقطع العرضي التفاضلي لاستطارة موجة مستقطبة على شكل قطع ناقص ترددها ω بمتذبذب كتلته m وشحنته e وتردد طبيعي (natural) ω_0 .
(frequency).

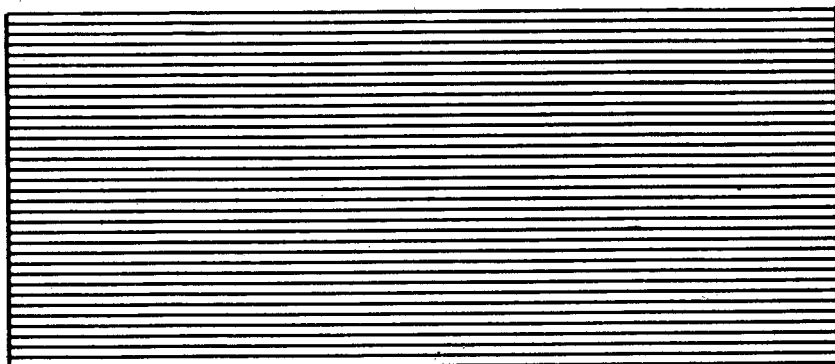
11-3 عندما تسقط موجة كهرومغناطيسية مستوية خطية الاستقطاب على ذرة ما. يتعرض الالكتران المرتبط توافقياً بالذرة الى خمود يتناسب خطياً مع سرعته. احسب المقطع العرضي التفاضلي والمجموع الكلي للمقاطع العرضية. كيف يختلف التوزيع الزاوي للشعاع المستطار عن استطارة تومسن؟

11-4 ثنائي قطب عزمه P يتذبذب بتردد ω موضوع في نقطة أصل منظومة احداثيات. وضع جسيم استقطايته B في النقطة الموصوفة بالتجه الشعاعي $|r\rangle$ ($r \perp P$) حيث $|r\rangle$ اصغر بكثير من طول موجة الاشعاع λ . جد اشعاع موجة المنظومة الكهرومغناطيسية؟

- الفصل الثاني عشر -

«فيزياء البلازما»

Plasma physics



- الفصل الثاني عشر -

«فيزياء البلازما»

Plasma physics

إذا رفعنا حرارة غاز ما فوق حد معين ازدادت الطاقة الحركية للذرات الى الحد الذي يؤدي تصادمها بعضها مع بعض الى انفلاتها الى الكترونات وايونات موجبة الشحنة، وبصورة عامة يمكن افتراض ان البلازما هي خليط من ثلاث مكونات : الكترونات حرة وايونات موجبة وذرات متعادلة (او جزيئات)، تتبع مفاعلة هذه الجسيمات فيما بينها، الميكانيك البسيط او لنقل قوى كولومب الكهربائية المستقرة لذلك فان طبيعة المنظمة مثل هذه المنظومة يختلف كلياً عن ذلك الموجود في الحالتين السائلة والصلبة المنظمتين بفعل القوى بين البلورات (intercrystalline forces) او قوى التماسك (cohesive forces) قصيرة المدى.

البلازما او الحالة الرابعة هي الحالة الاكثر شيوعاً للمادة في الكون فالايونوسفير (ionosphere) هو غلاف من البلازما يحيط بالجو الارضي، وما يسمى بالحزام الاشعاعي خارج الايونوسفير عبارة عن مكون البلازما. ويمكن اعتبار الشمس والنجوم كصاييح من البلازما الحارة. لذلك تعتبر دراسة البلازما ذات أهمية كبيرة وعلى الفيزيائيين فهم آلية العمليات المختلفة التي تحدث من البلازما.

12-18 شبه - تعادلية البلازما (Qusai- neutrality of a plasma)

إحدى خصائص البلازما المعروفة هي شبه تعادليتها (طبقاً لشوتكي Schottky) والذي يحقق شبه التعادل هذا هو القوى الكهربائية التي تربط القوى المتعاكسة اي ميلها الى موازنة الشحنات الفضائية الموجبة أو السالبة في عنصر حجمي بنيوي، فأى فصل للشحنات نتيجة زحزحة الالكترونات

بالنسبة الى الايونات يزيد من المجال الكهربائي الذي يقوم عادة حالة التعادل مع ذلك قد ينكسر شبه التعادل في حجم صغير من البلازما عندما يكون المجال الكهربائي المتولد من زيادة في الجسيمات ذات نفس الشحنة ضعيفاً وغير قادر على تحريك الجسيمات ، لكن كثافات الشحنة فضائية تنظم نفسها بحيث يكون الجزء الرئيس من البلازما محمياً من المجال . يوصف شبه التعادل في درجة حرارة وتركيز معينين ببارا ميتر خصائصي خطي (Characteristic linear parameter) هو δ . ففي حجم ذي قياس خطي هو x ، اذا كانت $\delta \gg x$ فعنى هذا أن تركيز الشحنات المتعاكسة متساوٍ في هذا الحجم وحالة التعادل تكون قائمة اما اذا كانت $x \ll \delta$ ، معنى هذا ان فصل الشحنات ليس له تأثير على حركة الجسيمات وتكون حالة التعادل معزولة . ويظهر المجال الكهربائي على مسافة δ .

يمكن تخمين الطول الخصائصي (characteristic length) بالطريقة الآتية افرض ان الشحنات مفصولة إتماماً في عنصر حجمي ذي القياس الطولي δ فتكون الطاقة الكامنة للجسيم المشحون في هذا الحجم من درجة طاقة الحركة الحرارية للجسيمات اي KT حيث T تمثل درجة حرارة البلازما. المجال الكهربائي في الحجم يحقق معادلة بواسون (Poisson equation).

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.1)$$

حيث ρ تمثل كثافة الشحنة، اذا كانت الابعاد الخطية للحجم من درجة δ وتركيز الجسيمات المشحونة هو N_0 ، يصبح لدينا :

$$\begin{aligned} \text{div } E &\simeq \frac{E}{\delta} \simeq \frac{N_0 e}{\epsilon_0} \\ E &\simeq \frac{N_0 e \delta}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (12.2)$$

لذا يكون جهد البلازما في حجم الشحنات المفصولة هو :

$$V = E\delta \simeq \frac{N_0 e \delta^2}{\epsilon_0} \quad (12.3)$$

الطاقة الكامنة للجسيم هي :

$$U = eV \simeq \frac{N_0 e^2 \delta^2}{\epsilon_0} \simeq kT. \quad (12.4)$$

وهذه تعطينا :

$$\delta \simeq \left(\frac{\epsilon_0 kT}{N_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (12.5)$$

ويمكن اشتقاق البارامتر δ من تحليل المجال الكهربائي الذي يظهر في البلازما. افرض ان شحنة اختبارية q ادخلناها الى البلازما. ستحاول الالكترونات الاقتراب من هذه الشحنة وستحاول الايونات الموجبة الابتعاد عنها. وفي حالة التوازن الاحصائي (statistical equilibrium) يمكن حساب التوزيع الفضائي للالكترونات والايونات الموجبة المجاورة للشحنة من صيغة بولتزمان (Boltzmann formula) $N \propto \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$ حيث U هي الطاقة الكامنة وهكذا تكون كثافة الالكترون هي :

$$N_e = N_0 \exp\left(e \frac{U - U_0}{kT}\right) \quad (12.6)$$

وكثافة الايون الموجب هي :

$$N_i = N_0 \exp\left(-e \frac{U - U_0}{kT}\right) \quad (12.7)$$

حيث U هو الجهد الموضعي (local potential)، و U_0 تمثل جهد البلازما و N_0 تمثل الكثافة الالكترونية وكذلك كثافة الايون الموجب عندما $U = U_0$. ويجب ان يحقق الجهد U معادلة بواسون.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) &= - \frac{N_i e - N_e e}{\epsilon_0} \\ &= \frac{2N_0 e}{\epsilon_0} \sinh\left(e \frac{U - U_0}{kT}\right) \end{aligned} \quad (12.8)$$

وهذه معادلة لاخطية (non-linear equation) ومع ذلك اذا كانت $kT \gg eU$

فيمكن ايجاد حل تقريبي بوضع :

$$\sinh\left(\frac{eU}{kT}\right) \simeq \frac{eU}{kT}$$

المعادلة (12.8) تتقلص الى :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 k T} (U - U_0) \quad (12.9)$$

وحلها هو :

$$U = U_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right) \quad (12.10)$$

وتمثل r البعد عن الشحنة q و :

$$\delta = \left(\frac{\epsilon_0 k T}{2N_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (12.11)$$

كان ديبياي (Debye) أول من ادخل فكرة الطول الخصائفي في دراسته للاليكتروليات القوية (Strong electrolyte) ثم ادخل بعد ذلك في فيزياء البلازما ويعرف البارامتر δ باسم طول ديبياي (Debye length) ويشير الى اقصر مسافة تتحرك فيها الالكترونات عشوائياً في البلازما عارضاً مجال كولومب للجسيم الرفيع.

عرف لانكمور (Langmuir) الذي كان رائد علم البلازما على انها غاز متأين يكون فيه طول ديبياي صغيراً مقارنة بقياس الحجم الذي يشغله الغاز.

2-12 سلوك البلازما في المجال المغناطيسي

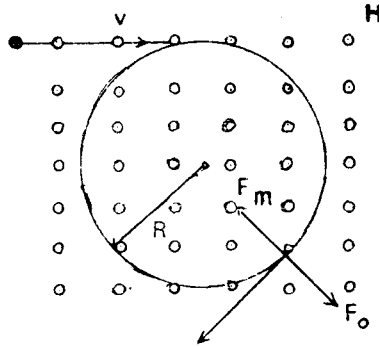
(Plasma Behaviour in Magnetic Field)

بما ان الجسيمات المشحونة موجودة دائماً في البلازما والبلازما متعرضة غالباً لتأثيرات المجالين الكهربائي والمغناطيسي فسيكون من المفيد اولاً تفحص مفاعلة هذه الجسيمات مع هذين المجالين . ان تسليط مجال كهربائي ثابت ليس له اي جدوى لانه يكون طبقة او غطاءً رقيقاً يغلف كما بينا الجزء الرئيس من البلازما. مع ذلك او لأن المجال المغناطيسي الثابت يظهر بعض التأثيرات المهمة التي سندرسها في هذا الجزء. لنناقش الحالات الآتية :

(1) الحالة الاولى : الجسيمات المشحونة في مجال مغناطيسي متجانس ($E=0$). افرض ان خطوط قوى المجال المغناطيسي تتجه عمودياً خارج الورقة. وينطلق جسيم كتلته m وشحنته q بسرعة v داخل المجال المغناطيسي وعمودياً

على خطوط القوة كما هو موضح في الشكل (12-1) ان قوة لورنتس F التي تساوي $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ المسلطة على الجسم عمودية دائماً على \mathbf{v} وعلى \mathbf{B} ايضاً ، لذلك نجعل الجسم يسير في مسار دائري في مستوي الورقة ، ويجب ان تكون القوة F في اي لحظة بتوازن مع القوة المركزية (Centrifugal force) لذلك :

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad (12.12)$$



شكل رقم (12.1)

حيث R تمثل نصف قطر المدار وتسمى نصف قطر لارمر للمدار (Larmor radius) ، ومن هذا نجد التردد الزاوي (angular frequency)

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \quad (12.13)$$

ويسمى تردد سيكلترون (cyclotron frequency) ، وهو لا يعتمد على السرعة v ، ويوفر الآلية الفيزيائية لتصميم السيكلترونات واطئة الطاقة. اذا اطلقنا الجسم داخل المجال المغناطيسي بزواوية اخرى لاعمودياً بالنسبة لخطوط قوة المجال ، سنحلل السرعة v الى مركبتين ، الاولى موازية للمجال \mathbf{v}_{\parallel} والثانية عمودية عليه v_{\perp} في مستوي عمودي على \mathbf{B} بما أن \mathbf{v}_{\parallel} لاتتأثر بالمجال ، فيمكن كتابة المعادلة (12-12) بالشكل الآتي :

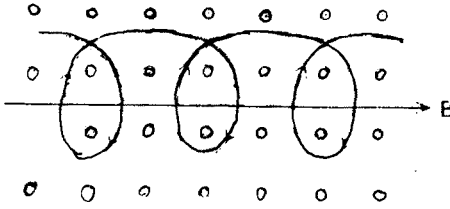
$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}$$

أي :

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

(12.14)

وسيكون المنحني الناتج حلزونياً (spiral) كما هو موضح في الشكل (12-2) لان المسار الدائري الذي نصف قطره R سيتحرك على خط القوة وبسرعة منتظمة v_{\parallel} . لذلك يتحرك الجسم حلزونياً (gyrating) حول خط القوة كأنما الجسم مقفول (locked) عليه خط المجال.



شكل رقم (12.2)

2- الحالة الثانية : الجسيمات المشحونة في المجالين المتقاطعين الكهربائي والمغناطيسي:-

افرض ان مجال كهربائي متجانس وضع على المجال المغناطيسي المتجانس B (E ⊥ B). يوضح الشكل (12-3) المسار (trajectory) . تعمل الان ثلاث قوى على كل نقطة في المسار. القوة المغناطيسية $F_m = qvB$ والقوة المركزية $F_c = \frac{mv^2}{R}$ ، والقوة الكهربائية $F_e = qE$ ففي نقطة A مثلا تعمل القوتان الكهربائية والمغناطيسية بنفس الهدف او الاتجاه لذلك يكون انحناء المسار اكثر حدة. وفي النقطة تتوازن القوتان نوعا ما ويصبح نصف قطر الانحناء اكبر. والمدار الناتج هو كما لو كانت الجسيمات تسدور بانتظام حول مركز يسير بسرعة انحراف (drift velocity) v_D ، التي يمكن ايجاد تعبير لها لو كتبنا :

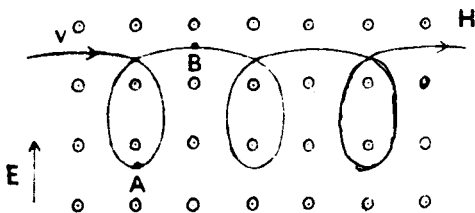
$$v = v_D + v'$$

(12.15)

$$F = q(E + v \times B)$$

$$= q(E + v_D \times B + v' \times B).$$

(12.16)



شكل رقم (12.3)

إذا اخترنا :

$$v_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (12.17)$$

فان الحديد الاولين من الطرف الايمن للمعادلة (12-16) يلغي بعضها بعضاً ، ويمكن حساب القوة من :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$$

وهي التي درسناها في الحالة الاولى :

3- الحالة الثالثة : الجسيمات المشحونة في مجال مغناطيسي غير متجانس :-

يعبر عن المجال المغناطيسي غير المنتظم بكثافة خطوط القوة (الشكل 12-4) ، فايما يكون المجال اكبر تكون خطوط القوى اكثر تكثفاً فضائياً ويكون انحناء المسار اكثر وضوحاً والعكس بالعكس. ونتيجة تباين انصاف اقطار الانحناء آت خلال حركة الجسيم تحت على انحراف الجسيم. الحركة الحلزونية للجسيمات المشحونة لها خاصية مهمة ومفيدة جداً وهي العزم المغناطيسي μ الذي يعرف بأنه :

التيار الناتج من حركة الجسيم الحلزونية \times المساحة التي يحتويها التيار $= \mu$

$$\begin{aligned} &= \frac{qv_{\perp}}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{qv_{\perp}R}{2} \\ &= \pi R^2 B \left(\frac{q^2}{2\pi m} \right) = \left(\frac{q^2}{2\pi m} \right) \Phi \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$(\because B = \frac{mv_{\perp}}{qR} \text{ and flux } \Phi = \pi R^2 B).$$

وهكذا فان العزم المغناطيسي يتناسب مع الفيض Φ . ويمكننا اثبات ان μ اذا ماتغيرت B . ببطء ان كان التغير فضائيا او زمنياً .
حسب قانون فاراداي (Faraday's Law) ، تحسب القوة الدافعة الكهربائية المحتملة حول مسار مغلق من :

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} . \quad (12.19)$$

عندما تكون الشحنة صغيرة في المجال، فان الشغل المنجز على جسيم شحنته q في مدار واحد هو $q\mathcal{E}$ وهذا يجب ان يساوي $-\frac{dW}{dt}$. مضروباً في الزمن الذي يستغرقه الجسيم في السير حول مدار واحد. و W هو الشغل المنجز ، وهذا يعني ان :

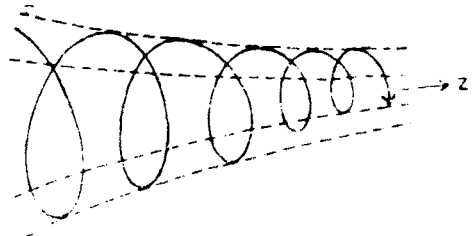
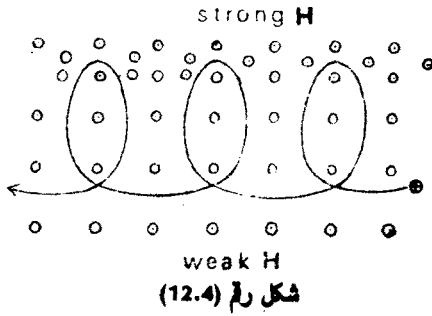
$$q\mathcal{E} = \frac{2\pi R}{v} \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi R}{v} \frac{dW}{dB} \frac{dB}{dt} = q\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (12.20) \text{ انظر (12.19)}$$

$$\therefore \frac{dW}{dB} = \frac{qRv}{2} = \mu \quad (12.21)$$

$$\text{Now } W = \frac{1}{2} mv^2 = \mu B \quad (12.18) \text{ الان من}$$

$$\therefore \frac{dW}{dB} = B \frac{d\mu}{dB} + \mu \quad (12.23)$$

اذا قارنا هذه بالمعادلة (12-21) فنجد ان $0 = \frac{d\mu}{dB} - \mu$ أي ان μ لا تعتمد على B . لذلك يمكن معالجة تأثيرات تباين هذا المجال بملاحظة الامور المترتبة على متطلبات ثبات μ ولكي تثبت μ يجب ان يبقى الدفع داخل مدار الجسيم ثابتاً، وهكذا في المجال المغناطيسي الذي يتغير ببطء مع الموقع، فكلما اقتربت خطوط المجال ينضغط مدار الجسيم بالشكل الذي بقيت فيه Φ ثابتة ، لذلك يبدو كأنما الجسيم يتحرك بمحاذاة سطح انبوب الدفع (الشكل 5-12)



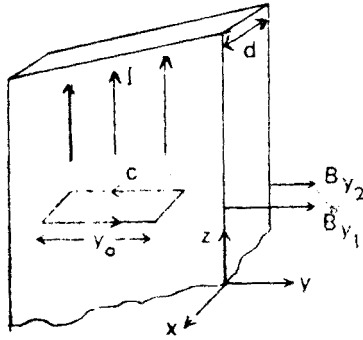
12-3 البلازما كإتاع موصل - المغناطيسية الهيدروديناميكية :

: (Plasma as a Conducting Fluid Magnetohydrodynamics)

يمكن ميدئياً معرفة خواص البلازما بدراسة التأثيرات الفردية لجميع الجسيمات والمفاعلات التي تحدث فيما بينها، لكن هذه العملية صعبة من الناحية العملية ونحتاج الى المزيد للوصول الى تقريبات عيني لسلك البلازما.

تعتبر البلازما في المعجالة البنيوية على انها مقسمة الى حجوم صغيرة كل منها كبير مقارنة بمتوسط الفضاء ان للجسيمات الفردية التي تحتوي عليه وهي صغيرة ايضاً مقارنة بأي مسافة يمكن ان تتغير فيها الخواص البنيوية تغيراً محسوساً. ويجمع مع هذا الحجم متوسط قيم السرعة، المجال المغناطيسي، الكثافة ودرجة الحرارة، والضغط، والموصلية ... الخ التي تتناسب مع هذا الحجم، ويستنتج سلوك البلازما بصيفة تفاعلات هذه الحجوم.

وتستخدم هذه التقنية بصورة رئيسية في دراسة الكهرومغناطيسية وظاهرة حركية السوائل (الهيدروداينك) ، وسنعالج في هذا الجزء والاجزاء اللاحقة مائع موصل (البلازما بالتحديد) باخضاعها لقوانين الكهرومغناطيسية والهيدروداينك في آن واحد وتسمى هذه المعالجة، المغناطيسية الهيدروداينك في آن واحد وتسمى هذه المعالجة، المغناطيسية الهيدروداينمكية من منظور إيجاد المعادلات الهيدروداينمكية التي تخضع لها البلازما باعتبارها مائعاً (تقليدياً) ، ستحسب أولاً الشروط التي على المجال المغناطيسي B تحقيقها في صفيحة تيارية لانهائية الطول ذات سمك صغير جداً 'd' ويوضح الشكل (12-6) صفيحة تحمل تياراً مقداره I باتجاه المحور Z . ويمكن بسهولة ملاحظة ان المجال المغناطيسي B المجتمع معه باتجاه المحور Y . تصور ان الدائرة C المستطيلة الشكل طول ضلعها y_0 ويقع على وجه اللوح والضع الثاني يقع على الوجه الآخر. حسب قانون أمبير :



شكل رقم (12.6)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{y_2} y_0 - B_{y_1} y_0 = \mu_0 I = \mu_0 j y_0 d \quad (12.24)$$

(لأن عرض الدائرة صغير جداً)

حيث j amp m^{-2} تمثل كثافة التيار و B_{y_2} , B_{y_1} تمثلان قيمتي B على وجهي اللوح. لذا

$$B_{y_1} - B_{y_2} = \mu_0 j d = \mu_0 j_s \quad (12.25)$$

حيث $jd = jz$ كثافة التيار السطحية.

في الفصل الاول اثبتنا ان المجال الكهربائي المستقر E يتغير عبر طبقة الشحنة بالمقدار:

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (12.26)$$

يمكن معرفة القوة لوحدة المساحة في النوح التياراتي بايجاد التكامل :

$$F = \int_{-d/2}^{d/2} j \times B dx = -\hat{e}_x \int_{-d/2}^{d/2} j B_y dx$$

(لأن z باتجاه المحور Z)

$$= -\hat{e}_x j \left[\int_{-d/2}^0 B_{y_2} dx + \int_0^{d/2} B_{y_1} dx \right]$$

$$= -\hat{e}_x j \frac{d}{2} (B_{y_1} + B_{y_2})$$

$$= -\hat{e}_x (B_{y_1} + B_{y_2}) \frac{(B_{y_1} - B_{y_2})}{2\mu_0} \quad (\text{من } 12-25)$$

$$= \frac{\hat{e}_x}{2\mu_0} (B_{y_2}^2 - B_{y_1}^2) \quad (12.27)$$

اذا كان مصدر التيار هو اللوح نفسه فقط ون $B_{y_1} = B_{y_2}$ تعطينا $F = 0$

نأخذ الآن وضعية اخرى توجد فيها مصادر اخرى للتيار، و $B_{y_1} > B_{y_2}$ فان القوة الآن تعمل باتجاه المحور X. وكما في سكونية السوائل (hydrostatics) يمكن اعتبار الجهد التي فيها المجال المغناطيسي اعلى بأنها منطقة الضغط الاعلى وكتابة التعبير الآتي للقوة :

$$F = (\mathcal{P}_2^M - \mathcal{P}_1^M) \hat{e}_x \quad (12.28)$$

حيث \mathcal{P}^M تمثل الضغط المغناطيسي ويحسب من :

$$\mathcal{P}^M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (12.29)$$

كان فاراداي أول من ادخل مصطلح الضغط المغناطيسي هذا. تصور انابيب القوة على انها خويطات مطاطية (elastic filaments) متعرض لشد باتجاه المجال ومضغوط بالاتجاه المعاكس. ثم ترجم ماكسويل هذه الفكرة رياضياً بعد ذلك بصيغة ممتدة الاجهاد (Stress tensor) ويشكل هذا الاسلوب في معاملة المجالات المغناطيسية مجتمعاً مع هيدروديناميكية الموائع الموصلية (غازية او سائلة) اساس الهيدروداينيك المغناطيسي (magnetohydrodynamics).

لندرس الآن سلوك المائع الموصل في مجال كهرومغناطيسي. اذا كانت z هي كثافة التيار في المائع و \mathcal{P} هو ضغط المائع فان القوة المسلطة على وحدة حجم من المائع هي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \mathcal{P} \quad (12.30)$$

وتعرف هذه المعادلة عامة بأنها معادلة اساسية في الهيدروداينيك المغناطيسي. باستخدام العلاقة $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ يمكن كتابة (12-30) على النحو الآتي :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \mathcal{P} \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \mathcal{P} \\ &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right). \end{aligned} \quad (12.31)$$

وهذه تتوافق بطريقة ما مع المقترح (12-29) اعلاه حيث اعتبرنا $-\frac{B^2}{2\mu_0}$ - الضغط المغناطيسي. لاحظ ان $\frac{B^2}{2\mu_0}$ تحسب فقط للجزء الذي يتأثر بالقوة $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ والمتبقي يأتي من الحد $\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ ، قد تتساءل لماذا لم يظهر هذا الحد في المعادلة (12-28) ، والسبب هو في مثال اللوح التياراتي، ليست \mathbf{B} اتجاهية (unidirectional) و $\text{div } \mathbf{B} = 0$ يضمن عدم تغير \mathbf{B} بمحاذاة اتجاه المجال وبما ان التغير الفضائي يحدث فقط بزواوية قائمة مع \mathbf{B} فان $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0$. وفي حالة التوازن $\mathbf{F} = 0$ لذلك اذا اضحل الحد الاول كما في حالة اللوح التياراتي.

$$\mathcal{P} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{ثابت} \quad (12.32)$$

وهو شرط التوازن الساكن (Static equilibrium).

12-4 حصر مغناطيسي تأثير الحشر (بمرور تيار كهربائي قوي)

(Magnetic Confinement - Pinch Effect)

وجدنا من (12-30) انه مادام شرط التوازن هو $\mathbf{F} = 0$. فان :

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = j \times B. \quad (12.33)$$

ويعطينا حاصل ضرب B و j العددي :

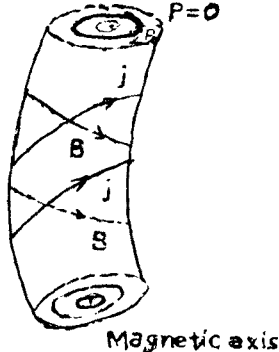
$$B \cdot \nabla \mathcal{P} = B \cdot (j \times B) = 0 \quad (12.34)$$

$$j \cdot \nabla \mathcal{P} = j \cdot (j \times B) = 0. \quad (12.35)$$

و

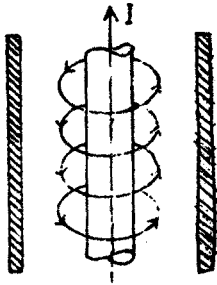
توضح هذه المعادلات ان B و j كلاهما يقعان على السطوح ثابتة الضغط. فاذا حدث وكانت هذه السطوح مغلقة ونظراً لعدم تمكن خطوط B وخطوط j المرور عبرها (طبقاً للمعادلتين (12-34) و (12-35) تبدو وكأنها مكونة من التفاف خطوط B وخطوط j كما هو موضح في الشكل (12-7) في هذه السطوح متساوية الضغط الجوي. (isobaric) يزداد الضغط من الخارج باتجاه المحور وتشير القوة $j \times B$ الى المحور كذلك. وتعرف هذه بالحصر

المغناطيسي (magnetic confinement)



شكل رقم (12.7)

وسيوضح المثال البسيط الآتي كيف يمكن ان يؤثر المجال المغناطيسي على الحالة الحركية للبلازما. افرض ان اسطوانة من البلازما يسري تيار في محورها. الشكل (12-8) سيرافق هذا العمود الخطوط السميكة للمجال B وقوة $j \times B$ متجه نحو المحور ستحاول ضغط البلازما. تتقلص البلازما تحت فعل هذه القوة الى ان تعوض القوة الكهروديناميكية الضاغطة بالضغط الحركي المتزايد $p = NKT$. تعرف هذه الظاهرة باسم ظاهرة تأثير الحشر (pinch effect).

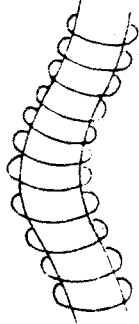


شكل رقم (12.8)

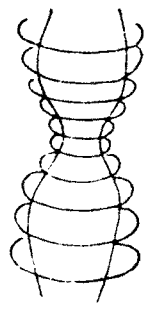
12-5 عدم الاستقرارية (Instabilities) :-

تبين التجارب انه لا يوجد حشر متوازن مستقر (Stable equilibrium pinch) اي ان اي انحراف بسيط عن حالة التوازن يحاول ان يزداد مؤدياً الى عدم تكامل (disintegration) مشكلاً البلازما. عدم استقرارية البلازما مهمة في نطاق واسع من الومضيات الفيزيائية التي تلعب البلازما دوراً فيها.

يبين الشكل (9 - 12) ما يسمى عدم الاستقرارية الملتوية (Kink instability) التي تحدث عندما ينحني الحشر الخطي (linear pinch) نتيجة بعض الاضطرابات (perturbation) حيث تتوهن خطوط القوة المغناطيسية، اي ان المجال يضعف خارج المنحني ويتكثف او يشتد المجال داخلها، والمجال الاقوى يولد ضغطاً مغناطيسياً اكبر في الانحناء الذي يزيد من الانحناء الى ان ينكسر الحشر الخطي.



شكل رقم (12.9)

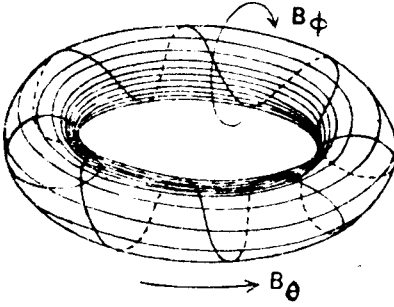


شكل رقم (12.10)

ما يسمى عدم الاستقرارية السجقية (sausage instability) موضح في الشكل (10 - 12) ويحدث هذا النوع من عدم الاستقرارية عندما ينحسر عمود البلازما بالصدفة.

بما أن المجال B يتناسب عكسياً مع r لذا يزداد الضغط $\frac{B^2}{2\mu_0}$ في المنطقة المحصورة اي في العنق والذي يزيد من شدة الحشر أي ان ينقطع عمود البلازما. هناك انواع اخرى من عدم الاستقرارية الحركية جزء منها يحدث بالصدفة او بتحريف اصطناعي لتوزيع الجسيمات عن التوزيع الماكسويلي.

لأجل التغلب على مشكلة عدم الاستقرارية عرضت عدة تصاميم لاحتواء البلازما. واحدى هذه التصاميم هي ما يسمى توكاماك (tokamak) وهي منظومة متناظرة محورياً، الشكل (11 - 12)، والذي يقوم المجال المغناطيسي للتيار الذي يسري بمحاذاة محورها بحفظ البلازما وليست مجال مغناطيسي كبير جداً بموازاة التيار يقوم بايقاف أو صنع (Suppresses) عدم الاستقرارية.



شكل رقم (12.11)

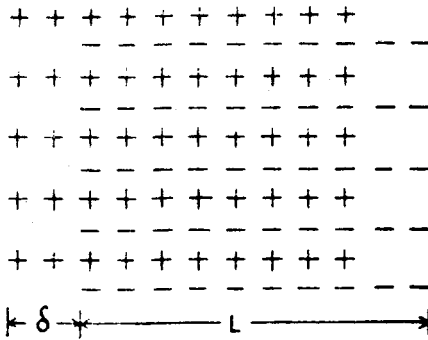
12-6 موجات البلازما (Plasma Waves) :-

يمكن ان تنشأ أو تنتشر تذبذبات وموجات عديدة وبمدى واسع جداً من الترددات في البلازما وستناول اثنين منها باختصار:

(1) تذبذبات الكترولن البلازما (Plasma - electron oscillations)

يتذبذب الكترولن بتردد عالي عندما تتزحرج الكترولونات بالنسبة للايونات. يمثل الشكل (12-12) البلازما وقد انزاحت فيها الكترولونات بمجموعة بالنسبة للايونات الموجبة بمسافة δ التي تعتبر صغيرة مقارنة بسمك البلازما الذي هو L . تثير ازاحة الكترولونات اضطراب البلازما المتعادلة. وبحسب المجال الكهربائي E المتولد في البلازما نتيجة ازاحة الشحنات من المعادلة الآتية :

$$E = \frac{Ne\delta}{\epsilon_0} \quad (12.36)$$



الشكل (12.12)

$$LmN \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{Ne^2L\delta}{\epsilon_0} = 0 \quad (12.37) \quad \text{ولهذه المعادلة حل هو :}$$

$$\delta = A \exp \left\{ i \left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \right)^{1/2} t \right\} = A \exp (i\omega_p t) \quad (12.38)$$

حيث :

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = \left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2} \quad (12.39)$$

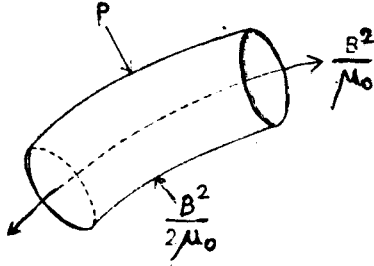
$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2} \quad (12.40)$$

وهو تردد الذبذبة المسمى عادة تردد البلازما (plasma frequency). يمكن لهذه الذبذبات الانتشار في البلازما مثل الموجات الكهربائية المستقرة الطولية (longitudinal electrostatic waves). ويمكن ان تتولد موجات ذات تردد اقل بكثير نتيجة الذبذبة الطولية للايونات وتسمى صوت الايون (ion sound) الا اننا سوف لاناقشها هنا.

2- الهيدرومغناطيسية أو موجات ألفن

- : (Hydromagnetic or Alfvén waves)

يمكن اثبات ان اجهاد المجال المغناطيسي مكافئ لضغط مغناطيسي متماثل الخواص (isotropic magnetic pressure) $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ولشد (tension) $\frac{B^2}{\mu_0}$ على طول خطوط المجال المغناطيسي كما هو موضح في الشكل (2.13) او يزداد الشد كلما سحب (stretching) الانبوب وهذه الوضعية مماثلة لوضعية الخيط المطاطي المسحوب او المتوتر. ونعرف انه عند ضرب الخيط تنشأ موجات مستعرضة تنتشر على طول الخيط. افلا يمكن اذن خلق موجات مستعرضة تنتشر على طول خطوط المجال المغناطيسي بضرب انبوب القوة؟ كان اول من ميز وجود هذا النوع من الموجات هو هانس ألفن (Hannes Alfvén) سنة 1942. واثبتت التجارب الدقيقة المجرى في البلازما فيما بعد وجود مثل هذه الموجات التي تسمى الآن موجات ألفن (Alfvén waves).



الشكل (12.13)

تعطى سرعة الموجة في حالة الخيوط بصيغة الشد T وكثافة الكتلة الخيطية للخيوط ρ وعلى النحو الآتي :

$$v = \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \quad (12.41)$$

وبمناظرتها مع موجات البلازما الهيدرومغناطيسية نستبدل T بالشد المغناطيسي $\frac{B^2}{\mu_0}$ وتصبح ρ كثافة كتلة البلازما. وهكذا تكون لدينا سرعة الطور للموجات الكهرومغناطيسية وهي :

$$v_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}} \quad (12.42)$$

وتسمى السرعة v_A عادة سرعة ألفن (Alfve'n velocity).

«تقارين الفصل الثاني عشر»

12.1 تيار يسري محورياً في انبوب اسطواني من البلازما يتلاشى ضغط البلازما عند $P = N(r)kT$ و $r = r_0$ اثبت أن :

$$2 NkT = \frac{\pi}{2\mu_0} (rB)_{r=r_0}^2$$

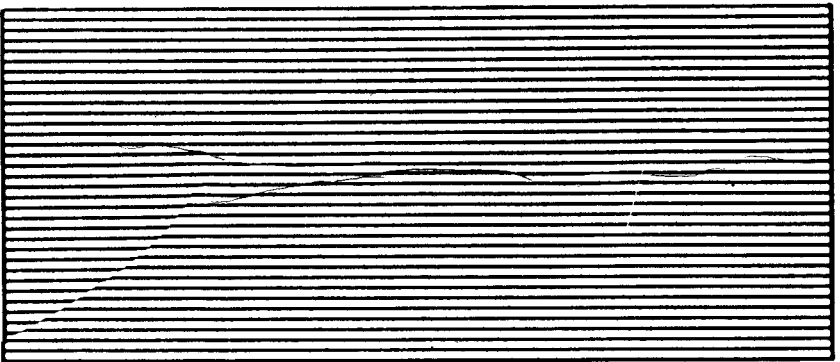
$$N = \int_0^{r_0} n(r) 2\pi r dr \quad \text{حيث :}$$

12.2 باستخدام نتيجة السؤال السابق، برهن على ان علاقة بنيت (Bennett's relation) الآتية للحشر الخطي هي :

$$I^2 = \frac{16\pi}{\mu_0} NkT.$$

12.3 تحتوي الهالة الشمسية (Solar Corona) على الهيدروجين المتأين وبكثافة 10^{12} particles/m³ تقريباً. إذا فرضنا أن المجال في الهالة B = 1000 gauss. احسب سرعة طور (phase Velocity) موجات ألفن.

الملاحق



الملحق (A)

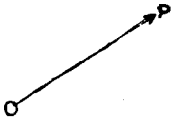
المتجهات (Vectors)

يعتبر تحليل المتجهات آلية رياضية قوية لتداول العمليات الفيزيائية الواقعية بسهولة وبصورة آنية ولها مزايا أخرى عديدة. تصبح معادلات الكهروديناميك أكثر اختصاراً إذا ما كتبت بالكميات المتجه ويصبح المحتوى الفيزيائي أكثر وضوحاً.

A-1 مفهوم المتجه (The Concept of a Vector) :-

نتناول في الفيزياء كميات متعددة الأنواع، والنوعان الأكثر أهمية هما الأول الذي يوصف أو يتحدد برقم مفرد. والمثال النموذجي لهذا النوع هو: الكتلة، ودرجة الحرارة، والكثافة، ... الخ. وهذه يمكن تحديدها باعطاء قيمتها فقط. والنوع الثاني هو الذي لا يتحدد تماماً برقم مفرد. خذ مثلاً جسم يتحرك من النقطة o إلى النقطة P التي تبعد مسافة r سم عن O . هذا النص لا يعطي الموقع المضبوط لنقطة P لأنه يمكن أن تكون النقطة P في أي نقطة من سطح كرة نصف قطرها r . ولتحديد موقع P بالضبط (أي إعطاء قيم محددة: موقعاً واحداً فقط لـ P ولا يمكن لأي موقع آخر أن يأخذ نفس القيم) يجب أن نقتفي أثر طريق الجسم وتقرير اتجاه الازاحة. مثل هذه الكميات التي تتطلب بالإضافة إلى قيمتها اتجاهها أيضاً لوصفها تسمى المتجهات (Vectors). ومن المألوف تمثيل المتجهات بالأحرف الثخينة السوداء (bold-face) بينما الكميات العددية تمثل بالأحرف المائلة (italics). ويرمز للازاحة OP بالحرف أو بالرمز r الذي يعطي قيمة واتجاه الازاحة في آن واحد.

افرض الآن ان النقطة O التي فيها الجسم تقع في البداية في نقطة اصل منظومة احداثية سيعطى موقع النقطة P في هذه المنظومة بثلاثة ارقام، الاحداثيات Z, y, X . لذلك الرقم r ليس رقماً مفرداً بل يمثل مجموعة من ثلاثة ارقام تؤخذ كلها او مجتمعة. والارقام الثلاثة هي Z, y, X وتسمى مركبات المتجه r في منظومة احداثيات اخرى لها نفس نقطة الاصل O ، فان احداثيات النقطة p ومن ثم مركبات r ستكون مختلفة، قل Z', y', X' لكن r مازالت تمثل الازاحة. بعبارة اخرى المتجه r لا يعتمد على منظومة الاحداثيات المستخدمة ماتغيرت منظومة الاحداثيات لايفرض علينا تغيير رموز معادلاتنا اذا ماكتبناها بالكليات او المصطلحات المتجه. تؤدي وجهة النظر هذه من تقليل الرموز المستخدمة والتي تعتبر هذه ميزة اخرى من مزايا استخدام تقنية المتجهات. يمكن تمثيل المتجه بالسهم في الرسم (الشكل A1) حيث يعطي طول واتجاه السهم مقدار واتجاه المتجه. والمتجه الذي قيمته وحدة واحدة يسمى وحدة المتجه (unit vector)، ويرمز لوحدة المتجه باتجاه r بالرمز \hat{e}_r .



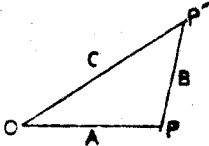
شكل رقم (A.1)

A-2 جبر المتجهات (Vector algebra) :-

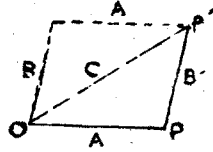
تخضع العمليات الرياضية للكليات العددية لقواعد الجبر الاعتيادية. الا انه ولكون المتجهات كليات متجهة لا يمكن جمعها او طرحها بالطرق الاعتيادية لذا علينا صياغة قواعد ملائمة لربط المتجهات بطرق مختلفة.

1) جمع وطرح المتجهات (Addition and subtraction of Vectors) :-

يمكن دمج ازاحتين لنقطة بازاحة مفردة مكافئة لها باتباع وسيلة بسيطة. افرض ان الازاحة OP الممثلة بالمتجه A تتبعها ازاحة ثانية PP' ممثلة بالمتجه B (الشكل A-2A)، يمكن الحصول على الموقع النهائي للنقطة اذا ما ازاحت اتجاهياً على طول OP' . سنثل هذه الازاحة بالمتجه C والتي نسميها مجموع A و B اي $C = A + B$.



(a)



(b)

شكل رقم (A.2)

يمكن تمثيل المتجه الناتج بأسلوب كفوء تماماً باستخدام متوازي الاضلاع، ضلعاها هما A و B (الشكل A-2) ان قطر متوازي الاضلاع يعطينا المتجه C. ان اضافة المتجهات

$$A + B = B + A. \quad (A1)$$

ابدالية ، أي ان :

لذلك فان قانون اضافة المتجهات هو قانون متوازي الاضلاع للاضافة والذي ينص على ان مجموع المتجهين A و B يساوي في المقدار والاتجاه قطر متوازي الاضلاع الشكل بالاضلاع التي تمثل المتجهين A و B.

يمكننا الآن تعريف المتجه تعريفاً ادق، المتجه كمية فيزيائية لها مقدار واتجاه وتخضع لقانون متوازي الاضلاع في الاضافة.

ويمكن الحصول على مجموع متجهين لها نفس الاتجاه بجمع قيمتها ويبقى الاتجاه نفسه. المتجه mA (حيث m عبارة عن رقم مجرد) له نفس اتجاه المتجه A ولكنه اكبر منه ب m من المرات. هذه تقودنا الى طريقة مهمة في تمثيل المتجهات ، فاذا كانت A قيمة المتجه A و \hat{e}_1 تمثل وحدة المتجه باتجاه A. عندها يمكن كتابة :

$$A = A \hat{e}_1 \quad (A2)$$

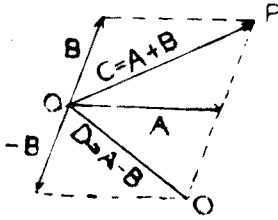
واكثر من ذلك ، اذا كانت A_x, A_y, A_z هي مركبات المتجه A على طول الاحداثيات و $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ هما وحدات المتجه باتجاه المحاور عندها يمكن تمثيل المتجه A بالشكل الآتي :

$$A = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z \quad (A3)$$

يمكن الحصول على الفرق بين المتجهين A و B باضافة المتجه -B الى A أي :

$$A - B = A + (-B) \quad (A4)$$

حيث -B هو المتجه الذي له نفس قيمة المتجه D الا انه معاكس له في الاتجاه. لذا وللحصول على الفرق بالرسم اعكس اتجاه B واعمل متوازي الاضلاع ، كما في السابق ، في الشكل (A-3) يعطينا OP مجموع المتجهين $C=A+B$ و OQ الفرق بينهما $D=A-B$.



شكل رقم (A.3)

2) جداء المتجهات (Product of vectors) :-

تمر علينا في الفيزياء عادة مجموعات اتجاهية لها خواص الضرب وقد يكون حاصل جداء متجهين كمية عددية او متجهة حسب تعريف الجداء.

(A) الجداء العددي او الجداء النقطي لمتجهين (A.B) :

(B) الجداء العددي او الجداء النقطي لمتجهين (A.B) :

يعرف حاصل الجداء العددي او النقطي لمتجهين بأنه الرقم الذي يساوي حاصل جداء قيمتهما مضروباً في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما ، وهكذا.

$$A \cdot B = AB \cos \theta. \quad (A5)$$

واضح ان الجداء العددي هو حاصل جداء قيمة احد المتجهين ومسقط (projection) الآخر عليه.

ويمكن التحقق بسهولة من ان الجداء العددي له خواص الارقام الاعتيادية الآتية :

$$(i) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (A6)$$

$$(ii) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \dots) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \dots \quad (A7)$$

يمكن ملاحظة ان حاصل الجداء العددي يتلأش حتى اذا لم يكن اي واحد من العوامل صفراً، اذا كانت الزاوية المحصورة بينها هي 90° ، وهكذا

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_x = 0 \quad (A8)$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1. \quad (A9)$$

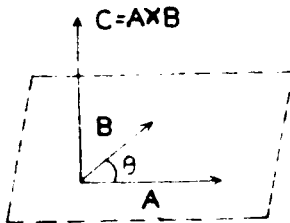
ويمكن التحقق ايضاً اذا كان $\mathbf{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$ و $\mathbf{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z$ فان :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad (A10)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (A11)$$

(B) الجداء الاتجاهي (Vector product cross - product $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$) :-

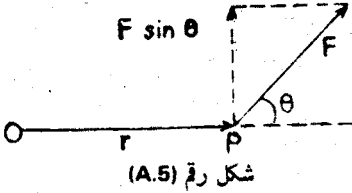
يعرف الجداء الاتجاهي C للمتجهين A و B بأن المتجه الذي تساوي قيمته حاصل جداء قيمتي المتجهين A و B مضروباً في جيب الزاوية المحصورة بينهما واتجاهها عمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين بحيث تشكل المتجهات A, B, C منظومة اليد اليمنى (right - handed system) ، الشكل (4 - A).



شكل رقم (A.4)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \hat{e}_z. \quad (A12)$$

يمكن بناءً على اعتبارات الشكل الهندسي اثبات ان قيمة الجداء الاتجاهي لتجهين تساوي مساحة متوازي الاضلاع الذي يشكل المتجهات ضلعا. من هذا نرى انه بالامكان تمثيل المساحة بالمتجهات. المساحة تمثل بمتجه عمودي على المساحة والتي قيمتها تساوي المساحة. ويرتبط معناه بالمعنى الذي يصف الشكل الهندسي للمساحة.



سنأخذ مثلاً للجداء الاتجاهي العزم الناتج من القوة F العاملة في نقطة حول النقطة O لتكن الزاوية المحصورة بين متجه الموقع $OP = r$ والقوة F هي الزاوية θ (الشكل A-5). لذا تكون قيمة العزم هي $N = r F \sin \theta$ يولد هذا العزم دوراناً، لذا يعتبر كمية اتجاهية، ويمكن إيجاد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = rF \sin \theta \hat{e}_n \quad (\text{A13})$$

يمكن التحقق بسهولة من خواص الجداء الاتجاهي الآتية :

$$(a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{A14})$$

$$(b) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \quad (\text{A15})$$

$$(c) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A16})$$

$$(d) \quad \hat{e}_x \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \times \hat{e}_y = \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0 \quad (\text{A17})$$

$$(e) \quad \hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z; \quad \hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x; \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \quad (\text{A18})$$

$$(f) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - B_y A_z) \hat{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{e}_z$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{A19})$$

(C) الجداء المتعدد (Multiple products) :-

بمساعدة الجداء النقطي (الجداء العددي) والجداء الاتجاهي لتجهين يمكن بناء جداء متعدد يشمل متجهات عديدة. وستتناول هنا نوعين من الجداء الثلاثي (triple products) ذي الأهمية الخاصة.

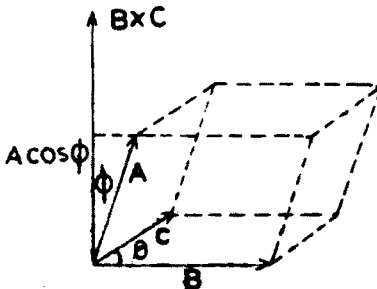
(1) الجداء الثلاثي العددي (Scalar triple product) (A, BXC) :-

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z) \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

خذ متوازي اضلاع مرسوماً بحيث تشكل المتجهات C, B, A اطرافه (الشكل 6-A). وجدنا ان حاصل ضرب BXC عمودي على القاعدة. وقبته تساوي مساحة القاعدة، لذلك فان :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\text{مسقط } A \text{ على } \mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$(A-21) \quad (\text{قاعدة متوازي السطوح}) \times (\text{ارتفاع متوازي السطوح}) = \text{حجم متوازي السطوح}$$



شكل رقم (A.6)

وبأخذ اوجه المتوازي المتعددة بالتناوب نجد أن :

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \\ &= \text{Volume of the parallelepiped (حجم متوازي السطوح)} \end{aligned} \quad (A-22)$$

وهذا يثبت اذا ماحدث تغير دوري (Cyclic change) في سلسلة (C,B,A sequence) فان الجداء الثلاثي العددي يبقى نفسه. لهذا فان القوس في هذا الضرب زائد على الحاجة او قديم المعنى، لأن الجداء A.BXC يعني دائماً جداء A مع BXC لأن $(A.B) \times C$ عديم المعنى والعلاقة :

$$A \cdot B \times C = A \times B \cdot C \quad (A23)$$

ثبتت انه بالامكان ابدال اشارة الجداء (Cross) والنقطة (dot) حسب الرغبة بشرط ايفاء الترتيب الدوري (cyclic order) للمتجهات كما هو. لذلك يمكن للسهولة اسقاط اشارة الضرب والنقطة وتمثيل الضرب بالرمز (ABC). واذا كان $(ABC) = 0$ وليس احد المتجهات صفراً نستنتج ان المتجهات جميعها متحدة المستوى (Coplanar).

(2) الجداء الثلاثي الاتجاهي (Vector triple product) $(A \times (B \times C))$

في هذا الجداء يكون المتجه BXC عمودياً على المستوي الحاوي على المتجهين B و C ولنفس السبب نجد ان المتجه $A \times (B \times C)$ عمودي على المستوي الذي يحوي المتجهين BXC و A ، أي ان المتجه $A \times (B \times C)$ سيقع في المستوي الحاوي على المتجهين B و C ويكون بالاضافة الى ذلك عمودياً على A. والعلاقة الآتية الاكثر استخداماً يمكن اثباتها هندسياً (geometrically) او تحليلياً (analytically).

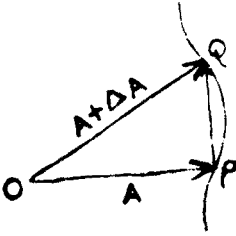
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (A24)$$

A-3 تفاضل وتكامل المتجهات (Vector calculus) :-

سندرس الآن عمليتي تفاضل وتكامل المتجهات ، لأن هذين المفهومين ضروريان جداً في تعريف العوامل المفيدة في تحليل المتجهات.

(1) تفاضل متجه بالنسبة لكمية عددية

-(Differentiation of a vector with respect to a scalar)



شكل رقم (A.7)

افرض ان المتجه A هو دالة مستمرة (Continuous function) لمتغير عددي مستمر u، اي ان $A=A(u)$ اذا ماتغير U يتغير A ايضاً ويتولد منحنى في اثر محطات A المتغيرة باستمرار (الشكل 7-A). واذا تغير U الى $U + \Delta U$ ، فان المتجه A سيتغير بمقدار $\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u)$ ولتثل OP و OQ المتجهين A و $A + \Delta A$ على التوالي. حسب قانون اضافة المتجهات، تمثل PQ مقدار الزيادة ΔA في المتجه A وكما في الدوال العددية فاننا نعرف المشتقة $\frac{dA}{du}$ على انها :

$$\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta u} = \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u} \quad (A25)$$

المشتقة $\frac{dA}{du}$ هي متجه اتجاهه هو الاتجاه المحدد (limiting direction) او غاية ΔA عندما $\Delta u \rightarrow 0$ اي ان اتجاه المشتقة يقع على طول مماس المنحنى في نقطة A عندما $\Delta u \rightarrow 0$.

ان قواعد تفاضل الضرب تناظر كذلك تلك الخاصة بالدوال العددية الاعتيادية عدا ان ترتيب المتجهات يجب ان لا يتغير في الحالات التي تحتوي على ضرب اتجاهي وهكذا :

$$\frac{d(A \cdot B)}{du} = \frac{dA}{du} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{du} \quad (A26)$$

$$\frac{d(A \times B)}{du} = \frac{dA}{du} \times B + A \times \frac{dB}{du} \quad (A27)$$

إذا كانت $A = B$ ، تعطينا المعادلة (A-26) مايلي :

$$\frac{d(A \cdot A)}{du} = \frac{d}{du} (A^2), \text{ i.e. } 2A \cdot \frac{dA}{du} = 2A \frac{dA}{du}$$

$$A \cdot \frac{dA}{du} = A \frac{dA}{du} \quad (\text{A28})$$

إذا كانت قيمة المتجه A ثابتة فان $\frac{dA}{du} = 0$ ومن ثم $A \cdot \frac{dA}{du} = 0$ وبما ان A لا ولا $\frac{dA}{du}$ يزولان فهذا يعني ان مشتقة متجه ذا طول ثابت عمودية على المتجه.

(2) تكامل المتجهات (Integration of vectors) :-

يمكن استخدام الطريقة المعتادة لتكامل الكميات العددية في تكامل المتجهات وبصورة عامة يحول التكامل الاتجاهي الي تكامل عددي ومن ثم يتم إيجاد قيمته بالطرق المعتادة.

A . التكاملات الخطية (Line integrals) :-

التكاملات الخطية التي تقابلها في الفيزياء عادة يكون من النوع الآتي :

$$\int_C \phi dr, \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \int_C \mathbf{V} \times d\mathbf{r}$$

حيث $\phi(x, y, z)$ و $\mathbf{V}(x, y, z)$ تمثل دوال تقطية عددية ومتجهة على التوالي ، وتمثل C المنحنى الذي يجري فيه التكامل.

$$d\mathbf{r} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z$$

$$\int_C \phi d\mathbf{r} = \hat{e}_x \int_C \phi dx + \hat{e}_y \int_C \phi dy + \hat{e}_z \int_C \phi dz, \quad (\text{A29})$$

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_C V_x dx + \int_C V_y dy + \int_C V_z dz \quad (\text{A30})$$

$$\int_C \mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \hat{e}_x \int_C (V_y dz - V_z dy) + \hat{e}_y \int_C (V_z dx - V_x dz) + \hat{e}_z \int_C (V_x dy - V_y dx). \quad (\text{A31})$$

يمكن إيجاد تكاملات الطرف الايمن بالطرق المألوفة
B . التكاملات السطحية (Surface integrals) :-

ان ما همنا من انواع التكاملات السطحية في الفيزياء هي الانواع الآتية :

$$\int_S \phi d\sigma, \int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma, \int_S \mathbf{V} \times d\sigma$$

حيث $d\sigma$ تمثل عنصر المساحة والذي يمكن كما بينا سابقاً تمثيله باعتباره متجهاً كما في التكاملات الخطية، تكتب هذه التكاملات بشكلها العددي ثم يجري التكامل.

C التكاملات الحجمية (Volume integrals) :-

احتساب هذا التكامل بسيط لان العنصر الحجمي $d\tau$ كمية عددية.

$$\int_V \mathbf{V} d\tau = \hat{e}_x \int_V V_x d\tau + \hat{e}_y \int_V V_y d\tau + \hat{e}_z \int_V V_z d\tau \quad (A32)$$

وهذه يمكن تكاملها بسهولة.

(3) المجالات العددية والمتجهة (Scalar and vector fields) :-

اذا كان لقيمة ما (Q) حجم معين او محدد في كل نقطة داخل حيز من الفضاء عندها يسمى هذا الحيز مجال Q ، اذا كانت Q كمية عددية يكون المجال عددياً واذا كانت Q كمية متجهة يكون المجال متجهياً ولناخذ مثلاً حيز الفضاء حول جسم مسخن فان كل نقطة من الحيز تناظرها درجة حرارة معينة، للمجال المتجه خذ الحيز الذي يحيط شحنة كهربائية مثلاً فكل نقطة من الحيز يناظرها مجال ذو قيمة واتجاه محدد.

(4) الممدار كمية عددية (Gradient of a scalar) :-

في دراسة المجال الممدي يكون من الضروري معرفة معدل تغير الدالة النقطية العددية كلما تحركنا من نقطة في المجال الى النقطة المجاورة. لتكن $\phi(r)$ دالة نقطية عددية في النقطة الموصوفة بمتجه الموقع r .

$$\phi(r) = \phi(x, y, z).$$

يعتمد تغير قيمة هذه الدالة الذي يناظر ازاحة مقدارها dr على اتجاه هذه الازاحة. ان التغير في $\phi(x,y,z)$ المناظر للحركة من نقطة (x,y,z) الى نقطة $(Z+dZ, y+dy, X+dX)$ يحسب من التفاضل الكلي $d\phi$.

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) dz \quad (A33)$$

$$dr = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z$$

يمكن التعبير عن الطرف الايمن للمعادلة (A-33) على انه حاصل ضرب عددي لمتجهين.

$$d\phi = \left(\hat{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) (\hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz).$$

يسمى المتجه في القوس الاول بميل الكمية العددية ϕ ويكتب $\text{grad } \phi$.

$$\text{grad } \phi = \hat{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (A34)$$

$$\therefore d\phi = (\text{grad } \phi) \cdot dr. \quad (A35)$$

اذا عرفنا عامل تفاضل متجه (vector differential operator) بالصيغة الآتية :

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (A36)$$

فيمكن كتابة :

$$\text{grad } \phi = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi = \nabla\phi. \quad (A37)$$

تجدر الاشارة هنا الى ان عامل تفاضل متجه ∇ (ويقرأ ديل del) ليس متجهاً بالمعنى الهندسي كما ليس له اي قيمة عددية ، بالاحرى هو عامل متجه يمكنه العمل على كلتا الدالتين التقطيتين العددية والمتجهة ، وهكذا فان ميل او انحدار مجال عددي يولد مجالاً متجهاً .

يمكن معرفة المفردى او الاهمية الفيزيائية للانحدار بالطريقة الآتية : في المجال العددي ϕ ، يمكننا ربط جميع النقاط التي لها قيمة ϕ في الحيز ، هذه النقاط ستقع على سطح ما. يوضح الشكل (A-8) سطحين يقرب بعضها من بعض متناظرين للقيم ϕ و $\phi+d\phi$ للدالة العددية ، فاذا كانت الازاحة كلها داخل السطح لاتتغير قيمة ϕ ، وهكذا اذا كانت الازاحة $d\mathbf{r}_0$ (AB) تقع على احد السطحين ، يكون لدينا :

$$d\phi = (\text{grad } \phi) \cdot dr_c = 0$$

وهذا يعني ان المتجه $\text{grad } \phi$ عمودي على السطح.

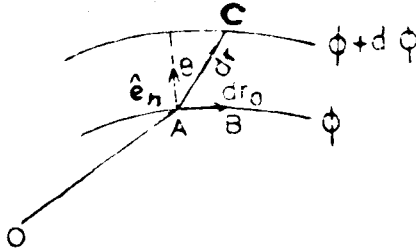
$$\therefore \text{grad } \phi = |\text{grad } \phi| \hat{e}_n$$

لنأخذ الآن الازاحة $(Ac)dr$ ، لدينا :

$$d\phi = (\text{grad } \phi) \cdot dr = |\text{grad } \phi| \hat{e}_n \cdot dr = |\text{grad } \phi| dr \cos \theta \quad (\text{A38})$$

حيث θ تمثل الزاوية بين dr و \hat{e}_n .

$$\therefore \frac{d\phi}{dr} = |\text{grad } \phi| \cos \theta. \quad (\text{A39})$$



شكل رقم (A.8)

يعطي الطرف الايسر معدل تغير ϕ مع المسافة ، اذا كانت $\theta = 0$ تأخذ $d\phi$ قيمتها العظمى، لذا فان اقصى معدل لتغير ϕ يعطى من المعادلة :

$$\frac{d\phi}{dn} = |\text{grad } \phi|. \quad (\text{A40})$$

وهكذا فان قيمة انحدار ϕ مساوية لنسبة التغير الفضائي (maximum space rate) لتغير ϕ واتجاهه بالاتجاه الذي يحدث فيه اقصى معدل فضائي للتغير ، اي عمودي على السطح.

$$\nabla \phi = \hat{e}_n \frac{\partial \phi}{\partial n}. \quad (\text{A41})$$

من الواضح ان المعدل الفضائي لتغير ϕ بمحاذاة AC وكما معطى في المعادلة (A-39) هو مركبة الانحدار بهذا الاتجاه ويسمى المشتقة الاتجاهية (directional derivative) في ذلك الاتجاه.

اتضح مما سبق انه يمكن معاملة ∇ شكلياً على انها متجه. للجد الآن الضرب العددي لهذا العامل مع المتجه A.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{e}_x A_x + \hat{e}_y A_y + \hat{e}_z A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (A42)$$

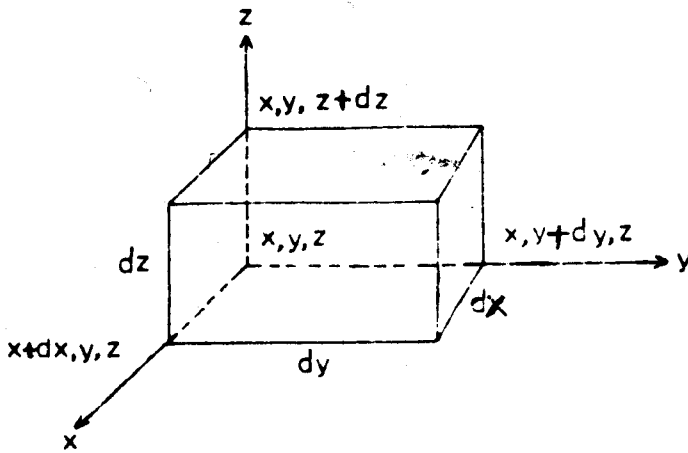
واضح ان هذه كمية عددية ، وهكذا فان الضرب العددي لـ ∇ مع المتجه A يعطي كمية عددية تسمى تباعد (divergence) A ويمثل بالرمز $\text{div } A$.

يمكن توضيح المفزى الفيزيائي للتباعد بتناول مثال نوعي ، يمثل المتجه \mathbf{V} قيمة واتجاه حجم مائع ما والذي يمر في ثانية واحدة عبر عنصر المساحة العمودي على \mathbf{V} . ان كمية المائع التي ستر عبر عنصر المساحة $d\sigma$ في ثانية واحدة هو $v_x d\sigma$ حيث v_x ميل مركبة \mathbf{V} العمودية على $d\sigma$. يمكن التعبير عن هذه الكمية على النحو $\mathbf{v} \cdot d\sigma = v_x d\sigma$ وتسمى وفق (flux) المتجه \mathbf{V} خلال المساحة $d\sigma$. افرض ان عنصر حجمي على شكل متوازي اضلاع متعامد اضلاعه dx, dy, dz (الشكل A-9) عند X تدخل الكمية $dXdydz$ في العنصر الحجمي من الوجه $dydz$ ، عند $X+dx$ ، فان الكمية $\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) dydz$ تسري خارجاً من الوجه المقابل، ومقدار السريان الصافي نحو الخارج باتجاه المحور X هو :

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx - v_x\right) dydz = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dydz$$

وبنفس الطريقة فان مقدار الزيادة الناتجة من زوجي الاسطح المتقابلة الاخرى هي :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} dx dydz \text{ and } \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dydz.$$



شكل رقم (A.9)

لذلك فإن الفيض الكلي خلال عنصر الحجم هو :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

وهكذا فإن تباعد المتجه \mathbf{v} في أي نقطة من المجال هو مقدار الفيض الصافي الخارج من لوحة الزمن لوحدة الحجم عند النقطة.

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A43})$$

يمكن التعبير عن تباعد متجه بصيغ مختلفة. افرض ان عنصر حجم صغير $d\tau$ ضمن سطح اعتباطي مغلق، ليكن $d\sigma$ عنصر من السطح واتجاهه يكون بالشكل الذي يتجه المستقيم العمودي عليه نحو الخارج. الكمية التي تسري ضمن هذا العنصر هي $\mathbf{v} \cdot d\sigma$ أو $\nabla \cdot \mathbf{v} d\tau$. والدفق عبر السطح كله هو $\int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n d\sigma$. وهذا يجب ان يساوي $\nabla \cdot \mathbf{v} d\tau$.

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n d\sigma$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n d\sigma}{d\tau} \quad (\text{A44})$$

إذا كانت $\nabla \cdot \mathbf{v}$ موجبة فهذا يعني وجود مقدار سريان صافي خارج من العنصر وهذا معناه وجود المصدر داخل العنصر. أما إذا كانت القيمة سالبة فهذا يعني وجود مستودع (Sink) في العنصر الحجمي. أما إذا كانت صفراً ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) فهذا يعني أن مقدار السريان الخارج مساوٍ أو متوازن مع الداخل، والمتجه الذي يحقق هذا الشرط يسمى متجه حلزوني (Solenoidal vector) مثل ذلك الحث المغناطيسي \mathbf{B} هو حلزوني لأن $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

(6) مبرهنة التباعد (Divergence Theorem) :-

افرض ان حجماً محدداً τ محاطاً بسطح مغلق. وليكن هذا الحجم مقسم الى عناصر حجمية $d\tau_i$. (الشكل A-10) الفيض الخارج من كل واحد من هذه العناصر هو :



شكل رقم (A.10)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} d\tau_i = \int \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (A45)$$

لنجمع كلا طرفي المعادلة اعلاه لجميع العناصر يصبح الطرف الايسر $\int \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau_i$. عند اخذ المجموع للطرف الايمن نجد أن السريان الخارج من احد العناصر عبر السطح هو السريان الداخل الى العنصر المجاور، لذا يلغى بعضها بعضاً ، ويكون مقدار السريان الخارج الكلي لجميع العناصر هو نفسه السريان الخارج عبر السطح المغلق المحيط بالحجم

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (A46)$$

وهذا يعني ان التكامل السطحي للمتجه \mathbf{v} اما مأخوذ حول السطح المغلق مساوي للتكامل الحجمي التباعد المتجه المأخوذ حول الحجم الذي يضمه السطح المغلق τ هذا هو ما يعرف بمبرهنة التباعد.

(7) لف المتجه (Curl of a vector) :-

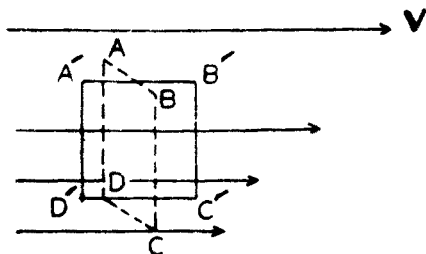
لاحظنا ان تباعد المتجه يولد مجالاً عددياً. سنتناول الآن عاملاً تفاضلياً يقود مجال متجه الى مجال متجه آخر. لنأخذ الضرب الاتجاهي لـ ∇ مع المتجه \mathbf{A} .

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\hat{e}_x A_x + \hat{e}_y A_y + \hat{e}_z A_z \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A47})$$

لأجل فهم معنى اللف (Curl) نأخذ حيزاً صغيراً في مجال متجه، افترض ان المتجه المعطى \mathbf{v} له نفس الاتجاه في جميع النقاط لكن قيمته مختلفة في النقاط المختلفة. (الشكل A-11) تخيل ممراً متعامداً ABCD في هذا الحيز، اذا كان مستوى التعامد عمودياً على اتجاه \mathbf{v} . التكامل الخطي $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ بمحاذاة عمر هو صفر لأن \mathbf{v} في كل مكان عمودي على $d\mathbf{l}$. من جهة اخرى اذا كان مستوى التعامد موازي للمجال \mathbf{v} (A'B'C'D') لن يكون التكامل الخطي صفرأ لأن الاضافة من الوجه AB' مختلفة عن الاضافة من الوجه CD' لأن قيمة المتجه \mathbf{v} مختلفة على طول هذين الضلعين، والاضافة من الضلعين الآخرين هي صفر. اما بالنسبة للاتجاهات الوسطية للتعامد فلن تكون قيمة التكامل الخطي صفرأ الا ان قيمته تعتمد على اتجاهه بالنسبة للمجال. وسياخذ اقصى قيمة في اتجاه معين بهذه المساحة، والقيمة القصوى للتكامل الخطي مقسومة على المساحة تسمى لف المتجه \mathbf{v} . واتجاه اللف يعطي \mathbf{v} العمودي الموجب على المساحة عندما تكون في موقع القيمة القصوى للتكامل الخطي.



شكل رقم (A.11)

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}}{d\sigma} \quad (\text{A48})$$

سنستخلص الآن تعبيراً للف \mathbf{v} بصيغة المركبات الديكارتية، ونبرهن على أنه نفسه المعطى في المعادلة (A-47) ويتم هذا باحساب التكامل الخطي حول مساحة متناهية في الصغر في كل مستويات الاحداثيات كل تكامل خطي سيثل مركبة للف باتجاه المحور المناظر. تصور المساحة المتعامدة $abcd$ في الشكل (A-12)، في مستوي المحورين Z, y

لدينا المستوي الذي اضلاعه هي dz, dy مركبات \mathbf{v} في a هي v_x, v_y, v_z

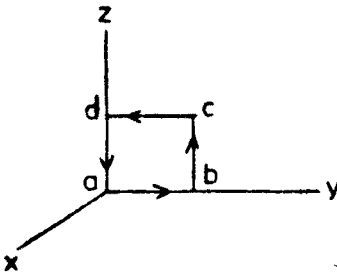
لذلك سيكون التكامل الخطي بمحاذاة ab هو $v_y dy$ ، وبمحاذاة cd هو

$$- \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) dy$$

وتلك بمحاذاة bc هي $\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy \right) dz$. لذا سيكون التكامل الخطي

حول الخطوط الخارجية (Contour) $abcd$ هو :

$$\begin{aligned} & v_y dy - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) dy - v_z dz + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy \right) dz \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy dz. \end{aligned}$$



شكل رقم (A. 12)

هذا التكامل هو أقصى ما يمكن لان المسارات da, cd, bc, ab اخذت اما موازية او مختلفة التوازي لمتجه. والتكامل الخطي على وحدة المساحة هو متجه بمحاذاة العمودي الموجب على المساحة.

$$\therefore \text{curl}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

وباسلوب مشابه يمكن ايجاد :

$$\text{curl}_y \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\text{curl}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

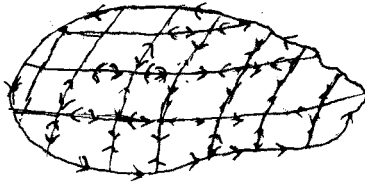
$$\begin{aligned} \therefore \text{curl } \mathbf{v} &= \hat{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

(8) مبرهنة ستوك (Stokes' Theorem) :-

تصور قطعة سطح محددة بمنحني (الشكل A-13) تخيل ان السطح مقسم الى عناصر متناهية في الصغر وحدود كل عنصر معترضة بنفس اعتراض المنحني الخارجي. لدينا الآن

عنصر :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$



شكل رقم (A.13)

وعند اخذ الجمع تلتفى الاضافات الناتجة من خطوط التقسيم الداخلية. لأن كل قطعة تعترض مرتين وباتجاهات متعاكسة. لذا يصبح الطرف الايسر عبارة عن تكامل حول المنحني المحدود فقط. وهكذا يكون لدينا :

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_V (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (A.9)$$

وهذه تعرف باسم مبرهنة ستوك (Stoke's Theorem) وتنص على ان التكامل الخطي لمتجه ما (V) المأخوذ حول منحني مغلق C يساوي التكامل السطحي للـ V مأخوذ حول اي سطح σ يأخذ من C|حدوداً له.

9) تكامل دالة عددية من الخط الى السطح

:- (Line to surface integral of scalar function)

حسب مبرهنة ستوك :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_n dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (A50)$$

لتكن $\mathbf{A} = \phi \mathbf{B}$ حيث ϕ دالة عددية تغطية و \mathbf{B} متجه ثابت في الفضاء اي $\nabla \times \mathbf{B} = 0$.

$$\therefore \int_S (\nabla \times \phi \mathbf{B}) \cdot \hat{e}_n dS = \oint_C \phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (A51)$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{B}) = \phi (\nabla \times \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \times \nabla \phi) \quad \text{الآن}$$

$$\therefore \int_S [\phi (\nabla \times \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \times \nabla \phi)] \cdot \hat{e}_n dS = \oint_C \phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint_C \phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_S (\mathbf{B} \times \nabla \phi) \cdot \hat{e}_n dS = 0 \quad \text{أي}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \phi d\mathbf{l} + \int_S \mathbf{B} \cdot \nabla \phi \times \hat{e}_n dS = 0 \quad \text{أو}$$

$$\mathbf{B} \cdot \left[\oint_C \phi d\mathbf{l} + \int_S \nabla \phi \times \hat{e}_n dS \right] = 0 \quad (A52) \quad \text{من ثم}$$

مادام \mathbf{B} يمثل أي متجه عند سطح S :

$$\oint_C \phi d\mathbf{l} = - \int_S \nabla \phi \times \hat{e}_n dS = \int \hat{e}_n \times \nabla \phi dS \quad (A53)$$

10) المجالات في منظومات احداثيات مختلفة

:- (Fields in different coordinate systems)

من الضروري عادة كتابة معادلات بصيغة احداثيات تلائم مسألة معينة بالذات. فيما يلي صيغ المجالات الناتجة من العمل مع عوامل تفاضلية في احداثيات ديكارتية قطبية كروية والقطبية الاسطوانية.

- : (Divergence of V) V تباعد (A)

(cartesian ديكارتية) $\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ (A54)

(Spherical polar القطبية الكروية) $\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} V_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$ (A55)

(Cylindrical polar القطبية الاسطوانية) $\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ (A56)

- : (The components of grad Q) ψ مركبات المحدثار (B)

ديكارتية (cartesian) :

$\text{grad}_x \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \text{grad}_y \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \text{grad}_z \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ (A57)

القطبية الكروية (Spherical polar) :

$\text{grad}_r \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \text{grad}_\theta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta};$

$\text{grad}_\phi \psi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ (A58)

القطبية الاسطوانية (Cylindrical polar) :

$\text{grad}_r \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \text{grad}_\phi \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}; \text{grad}_z \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ (A59)

- : (The components of curl V) V مركبات لف (C)

ديكارتية (Cartesian) - :

$\text{curl}_x \mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}; \text{curl}_y \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x};$

$\text{curl}_z \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ (A60)

القطبية الكروية (Spherical polar) :

$$\text{curl}_\theta \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} V_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi};$$

$$\text{curl}_\phi \mathbf{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\phi$$

$$\text{curl}_r \mathbf{V} = \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \quad (\text{A61})$$

القطبية الاسطوانية (cylindrical polar) :

$$\text{curl}_z \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$\text{curl}_r \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$\text{curl}_\phi \mathbf{V} = \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \quad (\text{A62})$$

-(D) عامل لابسيان (Laplacian Operator) :

تتضمن بعض معادلات الكهروديناميك عوامل تفاضلية من الدرجة الثانية تسمى

لابلاسيان (Laplacian) وهو عامل عددي تعريفه $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

ديكارتية (Cartesian) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A63})$$

القطبية الكروية (Spherical Polar) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (\text{A64})$$

القطبية الاسطوانية (Cylindrical polar) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A65})$$

(11) مبرهنة كرين (Green's Theorem) :-

باستخدام العلاقات الاساسية للتكامل الخطي ومبرهنة التباعد ومبرهنة ستوك، يمكن استخلاص عدد من الصيغ لتحويل التكاملات، اثنان خاصة الالهية وتسميان مبرهنة كرين.

ليكن تعريف المتجه V هو $V = \phi \nabla \psi$ حيث ψ و ϕ دوال عددية. ثم حسب مبرهنة التباعد.

$$\int (\phi \nabla \psi) \cdot d\sigma = \int \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) d\tau = \int (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) d\tau \quad (A66)$$

هذه هي الصيغة الاولى لمبرهنة كرين.

باستبدال ϕ و ψ لدينا.

$$\int (\psi \nabla \phi) \cdot d\sigma = \int (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi) d\tau \quad (A67)$$

ويطرح (A-67) من (A-66) نحصل على :

$$\int (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\sigma = \int (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\tau \quad (A68)$$

وهذه هي الصيغة الثانية لمبرهنة كرين.

A-4 بعض علاقات المتجهات المفيدة (Some useful vector relations) :-

$$(1) \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (A69)$$

$$(2) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (A70)$$

$$(3) \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \phi \quad (A71)$$

$$(4) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (472)$$

$$(5) \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (A73)$$

$$(6) \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (A74)$$

(الملحق B)

تحويلات الكميات من النظام الكاوسي الى النظام العالمي

الكمية	النظام العالمي	كاوسيان
Charge شحنة (Charge density, current density, polarization) التيار كثافة الشحنة الاستقطاب كثافة التيار	q	$\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^{1/2}} q(\rho, I, j, P)$
Potential الجهد (electric field) المجال الكهربائي	Φ	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} \Phi (E)$
Vector potential الجهد المتجه (Magnetic flux density) كثافة الفيض المغناطيسي	A	$\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right)^{1/2} A (B)$
Magnetization المغنطة	M	$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{1/2} M$
Electric displacement الازاحة الكهربائية	D	$\left(\frac{4\pi}{\epsilon_0}\right)^{1/2} D$
Magnetic field المجال المغناطيسي	H	$(4\pi\mu_0)^{1/2} H$
Dielectric constant ثابت العازل	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeability النفاذية	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Electrical conductivity الموصلية الكهربائية	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Capacitance السعة	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$

(الملاحق C)

تحويلات الوحدات الكهربائية والمغناطيسية

الرمز	الكلمة	النظام العالمي	كاوسيان
$q(e)$	Charge الشحنة	1 coulomb	3×10^9 statcoul
ρ	Charge density كثافة الشحنة	1 coul/m ³	3×10^9 statcoul/cm ³
I	Current التيار	1 amp	3×10^9 statamp
J	Current density كثافة التيار	1 amp/m ²	3×10^5 statamp/cm ²
$\Phi(v)$	Potential الجهد	1 volt	(1/300) statvolt
E	Electric field المجال الكهربائي	1 volt/m	$(1/3) \times 10^{-4}$ statvolt/cm
D	Electric displacement الازاحة الكهربائية	1 coul/m ²	$12\pi \times 10^5$ statvolt/cm
A	Vector potential الجهد المتجه	1 weber/m	$(1/3) \times 10^{-10}$ gauss cm
B	Magnetic flux density كثافة المغناطيسي	1 weber/m ² (tesla)	10^4 gauss
H	Magnetisation field المجال المغناطيسي	1 amp/m	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted
M	Magnetisation المغنطة	1 amp/m	$(1/4\pi) \times 10^4$ gauss
P	Polarization الاستقطاب	1 coul/m ²	3×10^5 statvolt/cm
ϵ	Dielectric permittivity سماحية العازل	1 farad/m	$36\pi \times 10^9$ statfarad/cm
μ	Permeability النفاذية	1 henry/m	$(1/4\pi) \times 10^7$ gauss/oersted
σ	Electrical conductivity الموصلية الكهربائية	1 mho/m	9×10^9 /sec
C	Capacity السعة	1 farad	9×10^{11} statfarad

(الملحق D)

الثوابت الفيزيائية

Electron charge	شحنة الالكترون	1.602×10^{-19} coul
Electron mass	كتلة الالكترون	9.109×10^{-31} kg
Proton mass	كتلة البروسون	1.673×10^{-27} kg
Vacuum permittivity	سماحية الفراغ	8.854×10^{-12} farad/m
Vacuum permeability	نفاذية الفراغ	1.257×10^{-6} henry/m
velocity of light	سرعة الضوء	2.998×10^8 m/sec
Classical electron radius	نصف قطر الالكترون	2.818×10^{-15} m
Electron volt,	الكلاسيكي (التقليدي) إلكترون فولت	1.602×10^{-19} joule
Boltzmann constant	ثابت بولتزمان	1.381×10^{-23} J/°K
Planck's constant	ثابت بلانك	6.626×10^{-34} J sec
Bohr's radius	نصف قطر بور	5.292×10^{-11} m
Avogadro's number	عدد افوكادرو	6.023×10^{23} /mole

$$1.2 \quad mg \cdot \frac{a}{\sqrt{2l}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\sqrt{2} + \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{l^2 - a^2/2}}{l}$$

This gives 'a'; $m = m'$.

$$1.3 \quad 3.45 \times 10^{-14} \text{ metres.}$$

$$1.4 \quad Q_m = 603 \times 10^{10} \text{ C}; \quad Q_e = 517 \times 10^{12} \text{ C.}$$

$$1.6 \quad (a) \quad 2\pi\rho_0 a^2; \quad (b) \quad \frac{8\pi}{15} \rho_0 a^2$$

$$1.7 \quad 1.1 \times 10^{-13} \text{ C}; \quad \text{Positive.}$$

$$1.10 \quad 3.23 \times 10^{15} \text{ V.}$$

$$1.11 \quad W = 750 \text{ MeV}; \quad \text{Energy released} = 280 \text{ MeV.}$$

$$1.14 \quad T = \frac{2\pi}{Q} \sqrt{2\pi\epsilon_0 m a^3}.$$

$$2.1 \quad \frac{1}{2} \left(V + \frac{qd}{\epsilon_0 A} \right)$$

$$2.2 \quad \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (V_2 - V_1)^2$$

$$2.4 \quad \text{Capacitance per unit area} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{d(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

$$2.5 \quad E_{(\text{inside})} = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$E_{(\text{outside})} = \frac{R^2 (P \cdot r) r}{\epsilon_0 r^3} - \frac{R^2 P}{3 \epsilon_0 r^3}$$

$$2.8 \quad V = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}; \quad \sigma_1 = \frac{q\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}; \quad \sigma_2 = \frac{q\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}$$

$$2.9 \quad q^2 = \frac{8\pi \epsilon_0 a^2 Mg(1 + \epsilon_r)^2}{\epsilon_r - 1}$$

$$2.10 \quad p = 4.84 \times 10^{-30} \text{ cm}; \quad r = 0.18 \text{ nm}$$

$$2.12 \quad \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln b/a} x = \pi (b^2 - a^2) h \rho g$$

$$3.4 \quad V_l = \sum_l \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} (2l+1)^{-1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_0 = \sum_l \frac{\sigma R^{l+2}}{2\epsilon_0} (2l+1)^{-1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$3.5 \quad V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(r^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \cos \theta e^{i\omega t}$$

$$3.6 \quad F = \frac{9}{4} \epsilon_0 \pi a^2 E_0^2$$

$$3.7 \quad V = -E_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$3.9 \quad V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$3.10 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4} \right)$$

where $q' = \frac{qa}{b}$

$$3.15 \quad V_{(\text{inside})} = \frac{qr^n \sin n\theta}{2\epsilon_0 n a^{n-1}}, \quad V_{(\text{outside})} = \frac{qa^{n+1} \sin n\theta}{2\epsilon_0 n r^n}$$

$$4.1 \quad Q = \frac{I_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_0})$$

$$4.2 \quad 9 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

$$4.4 \quad F = -\frac{3}{2} \frac{\pi\mu_0 a^4 I^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$4.6 \quad B = 10^{-4} \text{ volts sec/m}^2$$

$$4.7 \quad \text{(i) } B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}; \text{ (ii) } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ (iii) } B = 0$$

$$4.8 \quad I = \frac{3}{2} \pi J_0 a^2; \quad B_{(\text{inside})} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \left[1 + \frac{r^2}{2a^2} \right]$$

$$B_{(\text{outside})} = \frac{3\mu_0 J_0 a^2}{4r}$$

$$4.12 \quad H = \frac{Ic}{2\pi (a^2 - b^2)} \hat{e}_r$$

Chapter 5 الفصل الخامس

5.1 $\pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t \cos \theta$

5.3 3.532 Nm.

5.6 $A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$

Chapter 6 الفصل السادس

6.2 The head of the resultant electric field vector describes an ellipse, the semi-axes of which are:

$$a = \sqrt{E_{01}^2 \cos^2 \alpha + E_{02}^2 \cos^2 (\alpha - \phi)}$$

$$b = \sqrt{E_{01}^2 \sin^2 \alpha + E_{02}^2 \sin^2 (\alpha - \phi)}$$

where

$$\tan 2\alpha = \frac{E_{02}^2 \sin 2\phi}{E_{01}^2 + E_{02}^2 \cos 2\phi}$$

6.4 10^{-4} .

6.5 0.796 m.

6.6 $\epsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{m \omega^2 \epsilon_0}$

Chapter 7 الفصل السابع

7.4 6.6 V m⁻¹

7.6 2.3

Chapter 8 الفصل الثامن

8.1 $k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1)}$

8.2 For an ideal conductor $\mathbf{E}_T = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \omega}{\sigma_1}} [\mathbf{H}_T \times \hat{\mathbf{c}}_n]$

8.3 The minimum value of $a = \lambda/2$

The maximum value of $a = \lambda/\sqrt{2}$

8.5 Three

$$9.2 \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{e}}_n - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]$$

$$9.6 \quad \frac{128\pi\epsilon_0 |E|^4}{3m^2c^2e^2} \text{ where } E \text{ is the particle energy}$$

$$10.7 \quad 3.2 \times 10^9 \text{ V/m}$$

10.9 The path of the particle is given by

$$x = \frac{1}{e|\mathbf{E}|} \left[E_{01}^2 + (ce|\mathbf{E}|t)^2 \right]^{1/2} + x_0$$

$$y = \frac{p_0 c}{e|\mathbf{E}|} \ln \left[t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{E_{01}}{ce|\mathbf{E}|} \right)^2} \right] + y_0$$

where

$$E_{01} = c(m^2c^2 + p_0^2)^{1/2}$$

$$\text{For a slow particle } x = \frac{e|\mathbf{E}|}{2m} t^2 + x_0; y = \frac{p_0 t}{m}$$

$$10.10 \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}$$

For weak field

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}$$

$$11.2 \quad d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{[\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{e}}_n]^2 + [\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{e}}_n]^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2] (A^2 + B^2)} \omega^4 d\Omega$$

where $\hat{\mathbf{e}}_n$ is the unit vector in the direction of scatter and $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t$; $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$

11.4 The radiation intensity J is given by:

$$J = \frac{p^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{\beta}{4\pi r^2} \right)^2$$

تعريب المصطلحات العلمية الواردة في الكتاب وفقاً للحروف الهجائية

- A -

Attraction	تجاذب
Algebraic sum	المجموع الجبري
Atomic number	عدد ذري
Atomic Structure	تركيب ذري
Artificial dielectric	عازل اصطناعي
Avogadro number	عدد أفوكادرو
Atomic Spacing	فاصل ذري
Azimuthal Symmetry	تناظر سمتي
Associated Legendre functions	دوال ليكندر المرافقة
Azimuthal variation	تغير سمتي
Associated Legendre Polynomials	متعددة الحدود ليكندر المرافقة
Ampere's law	قانون أمبير
Ampere's circuital law	قانون أمبير الدائري
Attenuation	توهن
Astronomy	علم الفلك
Angular frequency	تردد زاوي
Azimuthal angle	زاوية سممية
Ampere's equivalence	تكافؤ أمبيري
Amonia maser	ميزر الامونيا
Absolute motion	حركة مطلقة
Anti-symmetry	ضد تناظر
Anamalous	غير طبيعي
Atomic refractivity	الانكسارية الذرية أو الانكسار النوعي الذري
Alfve'n waves	موجات ألفن

- B -

bound charges	شحنات مقيدة
boundary conditions	شروط الحدود الفاصلة
Boltzmann factor	عامل بولتزمان
Bessel's function	دالة بيسل
Back electromotive force	قوة دافعة كهربائية مضادة أو عكسية
Bounded Source distribution	توزيع المصدر المحدد
Betatron	بيتاترون
Braking radiation	اشعاع الايقاف
Bennett's relation	علاقة بنيت
Bold - face	الاحرف الثخينة السوداء

- C -

Charge density	كثافة الشحنة
Conservative force	القوة المحافظة
Curl of the vector field	لف المجال المتجه
Couple	مزدوج
Conductors	موصلات
Capacitors	متسعات
Centre of gravity	مركز ثقل
Carbon tetrachloride	رابع كلوريد الكربون
Crystal	بلورة
Converge	يتقارب
Continuous function	دالة مستمرة
Current density	كثافة التيار

Continuity	استمرارية
Circular loops	اطارات دائرية
Coil	ملف
Current loop	اطار تيار
Curl sources	مصادر ذات اللف
Conduction current density	كثافة تيار التوصيل
Continuous circuits	دوائر مستمرة
Coulomb gauge	مقياس كولوم
Complex amplitudes	سعات معقدة
Complex phase factor	عامل طور معقد
Circularly polarized	مستقطبة دائرياً
Critical angle	الزاوية الحرجة
Cut-off wavelength	طول موجة القطع
Cut-off frequency	تردد القطع
Centre driven linear antenna	هوائي خطي مركزي السحب
Concept of Simultaneity	فكرة التزامن
Covariant	متغايرة
Consistency	ثبات
Classical electron radius	نصف قطر الالكترون
Cohesive forces	قوى التماسك
Characteristic linear parameter	باراميتري خصائصي خطي
Characteristic length	الطول الخاصائي
Centrifugal force	القوة المركزية
Cyclotron frequency	تردد السيكلترون
Cyclic change	تغير دوري

Dirac delta function	دالة دلتا ديراك
Divergence theorem	مبرهنة التباعد
Dipole moment	عزم ثنائي قطب
Dipole potential	جهد ثنائي قطب
Dielectrics	عوازل
Dielectric constant	ثابت العزل
Depolarizing field	مجال ازالة الاستقطاب
Deformation polarizability	قابلية الاستقطاب التشويهية
Discharge	تفريغ
Differential operator	عامل تفاضلي
Dirichlet condition	شرط ديرخلت
Differential equation	معادلة تفاضلية
Diamagnetic substances	مواد دايامغناطيسية أو مواد قليلة الانفاذية المغناطيسية
Domain	منطقة نفوذ
Demagnetizing field	مجال مزيل للمغنت
Displacement current density	كثافة تيار اللزاحة
Decay of free charge	اضمحلال الشحنة الحرة
Dominant	متسلط او سائد

Hocus-focus	هراء في هراء
Hollow	تجويف
Helmholtz theorem	مبرهنة هيلمهولتز
Henry	هنري
High microwave fields	مجالات موجية دقيقة عالية
Henz's relations	علاقات هيتز
Half - wave antenna	هوائي نصف موجة
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Damping terms	حدود المضاءلة
Dispersion relation	علاقة التفريق
Divergence operator	عامل التباعد
Discrete resonant frequency	تردد رنيني متقطع
Dielectric wave-guides	دلائل موجة العازل
Determinant	محددة
Dragged	ينجرف
D'Almbertian operator	عامل دي المبرتيان
Differential scattering	استطارة تفاضلية
Damping constant	ثابت خمود
Debye length	طول ديبياي
Drift velocity	سرعة الانجراف
Disintegration	عدم تكامل

Energy	طاقة
Electrostatics	كهربائية مستقرة
Electrodynamics	كهربائية حركية
Electromagnetics	كهرومغناطيسية
Electric flux	الفيض المغناطيسي
Equipotential surface	سطح متساوي الجهد
Electric dipole	ثنائي قطب كهربائي
Electric double layers	الطبقات المزدوجة الكهربائية
Electric quadrupole	رباعي قطب كهربائي
Electric current	تيار كهربائي
Equipotential region	منطقة متساوية الجهد
Electric displacement	ازاحة كهربائية
Electric susceptibility	المتأثرية الكهربائية
Electret	اجسام عازلة ذات اقطاب كهربائية مختلفة دائمية
Ether	الاثير
Earnshaw's theorem	مبرهنة ايرنشو
Extremum value	قيمة قصوى
Edge effect	تأثير الحافة
Electrical conductivity	الموصلية الكهربائية
electromagnetic induction	حث كهرومغناطيسي
Electromotive force	قوة دافعة كهربائية
Electromagnetic momentum	الزخم الكهرومغناطيسي
Electromagnetic waves	موجات كهرومغناطيسية
Ellipse	بيضوي

Elliptically polarized	مستقطبة ببيضوياً
Electric Spin resonance	رنين البرم الكهربائي
Equator	خط الاستواء
Electric quadrupole radiation	شعاع رباعي القطب الكهربائي
Elementary particle	جسيم أولي
Elastic filaments	خويطات مطاطية

- F -

Force	قوة
Field	مجال
Fictitious charges	شحنات صورية او كاذبة
Field stresses	اجهادات المجال
Formal solution	حل اصولي
Frame of reference	مناطق الاسناد
Ferromagnetic substances	مواد فيرومغناطيسية أو مواد عالية الانفاذية المغناطيسية
Frequency	تردد
Field momentum	زخم المجال
Functional relationship	علاقة دالية
Fresnel's relations	علاقات فرنييل
Forward wave	موجة متقدمة
Fitz Gerald contraction	تقلص فيزجيرالد
Field tensor	ممتدة المجال
Faraday's Law	قانون فاراداي

Gaussian surface	السطح الكاوسي
Gravitational	ثقلتي
Gradient of potential	تدرج الجهد
Gaseous polar dielectrics	عوازل غازية قطبية
Green's theorem	مبرهنة كرين
Generating function	دالة مولدة
Gaussian System	نظام كاوسيان
Gauge transformations	تحويلات قياسية
Gauge function	ثوابت قياسية او لامتغيرات قياسية
Guide wave number	رقم موجة الدليل
Gas lens	عدسة الغاز
Glass fibres	الياف زجاجية
Gallium arsenide	زرنخييد الجاليوم
Galilean transformation	تحويل كاليليان
Greek suffix	الرمز او الملحق اللاتيني
Gyrating	حلزونياً

Intensity	شدة
Irrrotational field	مجال لادوراني
Insulators	عوازل
Infinite radius	نصف قطر لانهائي
Interaction	تفاعل تبادلي
Integrand	الكمية المطلوب تكاملها ، تكاملية
Indicial equation	معادلة أسية
Interchanging	تبادل
Inverse operator	عامل عكسي
Inverese points	نقاط معكوسة
Inductance	محاثة
Impedance	معاوقة او ممانعة
Intrinsic impedance	معاوقة او ممانعة ذاتية
Infra-red	تحت الحمراء
Interference	تداخل
Instantaneous rate	المعدل اللحظي
Interface	السطح البيني
Instantaneous power	القدرة اللحظية
Inertial system	منظومة قاصرة
Inertial observers	مراقبين قاصرين
Invariant	اللامتغيرة
Intercrystalline	القوى بين البلورات
Ionosphere	الايونوسفير
Ion Sound	صوت الايون
Italics	الحروف المائلة

Kinetic energy
Kink ir stability

طاقة حركية
عدم الاستقرارية المتتوية

Linear charge density
Line integral
Linear quadrupole
Lattice Structure
Local field
Linear dielectric
Linear superposition
Lenz' Law
Le chatelier's principle
Lorentz gauge condition
Left circular polarization
Laser beam
Linear antenna
Lienard - Wiechert potential
Larmor formula
Linear transformation
Linear momentum
Linear restoring force
Local potential
Linear pinch

كثافة الشحنة الخطية
تكامل خطي
رباعي قطب خطي
تركيب تشابكي
مجال موضعي
عازل خطي
تراكب خطي
قانون لنز
مبدأ لاشاتيلية
شرط لورنتس المقياسي
استقطاب دائري ايسر
شعاع الليزر
هوائي خطي
جهد لينارد - ويشرت
صيغة لارمر
تحويل خطي
زخم خطي
قوة خطية معيدة
جهد موضعي
حشر خطي

Magnetic field	مجال مغناطيسي
Mica	مايكا
Macroscopic polarization	استقطاب عيني
Microscopic dipole moment	عزم ثنائي قطب مجهري
Macroscopic size	حجم عيني
Molecular weight	وزن جزيئي
Molecular density	كثافة جزيئية
Maclaurains theorem	مبرهنة ماكلورين
Multipole expansion	تمدد متعدد الاقطاب
Maclaurin series	سلسلة ماكلورين
Monopole potential	جهد احادي القطب
Magnetostatics	المغناطيسية المستقرة
Magnetic effects	تأثيرات مغناطيسية
Magnetic flux density	كثافة الفيض المغناطيسي
Magnetic scalar potential	جهد كمية مغناطيسية غير متجه
Magnetic shell	غلاف مغناطيسي
Magnetic polarization	استقطاب مغناطيسي
Mutual coupling forces	قوى التقارن التبادلية
Magnetization	تمغنط
Magnetic field vector	متجه المجال المغناطيسي
Magnetic field intensity	شدة المجال المغناطيسي
Motional electromotive force	القوة الدافعة الكهربائية الحركية
Maxwell's equations	معادلات ماكسويل

Momentum flow	سريان الزخم
Monochromatic	أحادي اللون
Microwave	موجة دقيقة
Modes	انماط
Michelson–Morley experiment	تجربة مايكلسون - مورلي
Mössbauer effect	تأثير موسباور
Molecular refractivity	الانكسارية الجزيئية أو الانكسار النوعي الجزيئي
Magneto hydromagnetic	المغناطيسية الهيدروديناميكية
Magnetic confinement	حصار مغناطيسي
Maximum space rate	أقصى معدل فضائي

- N -

Non-polar molecule	جزيئة لا قطبية
Non-polar liquid	سائل لا قطبي
Normalized surface harmonics	توافقيات سطحية معيارية
Neumann function	دالة نيومان
Non-linear materials	مواد لا خطية
Non-permeable	غير قابل للنفاذ
Non-dispersive medium	وسط غير مفرق
Negative helicity	حلزوني سالب
Nodes	عقد
Non-trivial solution	حل معقول
Near zone	منطقة قريبة
Natural frequency	تردد طبيعي

Orientational polarizability	قابلية الاستقطاب التوجيهية
Ohm's law	قانون أوم
Ohmic	اومية
Ohmic materials	مواد لأومية
Orbital motion	حركة مدارية
Oscillatory spark discharge	تفريغ شراري متذبذب
Optoelectronics	الالكترونيات البصرية
Optical communication	اتصالات بصرية
Optical wave-guide	دليل موجة بصرية
Orthogonal transformation	التحويل المتعامد
Original frame	الاطار الاصلي
Oscillator strength	شدة المذبذب

Permittivity	سماحية
Particle	جسيم
Principle	مبدأ
Point charge	شحنة نقطية
Potential	جهد
Porcelain	بورسلين
Polarization	استقطاب
Polarized atom	ذرة مستقطبة
Polar molecule	جزيئة قطبية

Polarization density	كثافة الاستقطاب
Polarization charges	شحنات الاستقطاب
Pressure	ضغط
Pindermotive force	قوة الحركة الحرارية
Partial derivative	مشتقة جزئية
Prescribed potential	الجهد الموصوف
Pole strength	قوة القطب
Permeability	نفاذية
Poisson's equation	معادلة بواسون
Physical system	منظومة فيزيائية
Paramagnetic substances	مواد بارامغناطيسية او مواد ذات انفاذية مغناطيسية تزيد على واحد
Poynting vector	متجه بونيتنك
Poynting theorem	مبرهنة بوينتتك
Period of oscillation	فترة التذبذب
Plane wave	موجة مستوية
Phase difference	فرق في الطور
Positive helicity	حلزوني موجب
Plane of infinite extent	مستو لانهايي الامتداد
Propagation vectors	متجهات الانتشار
Polarizing angle	زاوية الاستقطاب
Polar diagram	رسم بياني قطبي
Point quadrupole	رباعي قطب نقطي
Principle of relativity	مبدأ النسبية
Principle of least action	مبدأ الفعل الادنى
Prismatic colours	الالوان الموشورية

Plasma physics

فيزياء البلازما

Pinch effect

تأثير الحشر

Perturbation

تشويش، اطلاق، اضطراب

Plasma waves

موجات البلازما

Phase velocity

سرعة الطور

- Q -

Quasi - stationary conditions

شروط شبه ثابتة

Quadratic function

دالة رباعية

- R -

Repulsion

تنافر

Relative permittivity

السماحية النسبية

Radial line

خط شعاعي

Random thermal motion

حركة حرارية عشوائية

Rodrigue's theorem

مبرهنة رودريك

Ratio test

اختبار نسبي

Resistance

مقاومة

Rest mass

كتلة مستقرة

Relativistically invariant

غير متغيرة نسبياً

Radius Vector

متجه نصف قطري

Rectangular loop

أطار مستقطب

Radial Component

مركبة نصف قطرية

Relaxation time

زمن الاسترخاء

Reflection

انعكاس

Refraction

انكسار

Refractive index	معامل الانكسار
Real quantity	كمية حقيقية
Right Circular polarization	استقطاب دائري أيمن
Reflection coefficient	معامل الانعكاس
Refractive	موجة متكسرة
Radiation field	مجال اشعاعي
Resonator	الرنان
Resonant Circuit	دائرة رنينية
Rectangular cavity	التجويف المتعامد
Radial gradient	تدرج شعاعي
Retarded Potentials	جهود معوقة
Retarded time	زمن التعويق
Radiation zone	منطقة اشعاع
Radiation resistance	مقاومة الاشعاع
Rate of energy dissipated	معدل خسارة الطاقة
Radius vector	متجه نصف قطري، البعد القطبي
Retarded position	موقع التعويق
Rest frame	الاطار الثابت
Relativistic transformations	التحويلات النسبية
Radiation pattern	نموذج الاشعاع
Reference system	نظام مرجعي
Rotational transformation	تحويل دوراني
Rest energy	طاقة السكون
Radiation damping	خمود الاشعاع
Radiation reaction	رد فعل الاشعاع
Resonant absorption	امتصاص رنيني

Scattering	استطارة
Superposition	تراكب
Scalar	غير متجه
Surface charge density	كثافة الشحنة السطحية
Single - valued function	دالة ذات قيمة واحدة
Semicircular	شبه دائري
Sulphur	كبريت
Semiconductors	أشباه الموصلات
Stable equilibrium	توازن مستقر
Statistical mechanics	الميكانيك الاحصائي
Spherical harmonic	توافق كروي
Steady current	تيار مستقر
Stoke's theorem	مبرهنة ستوك
Steady state	حالة مستقرة
Small current loops	اطارات التيار الصغيرة
Small meshes	شبيكات صغيرة
Spin	برم
Surface current	تيار سطحي
Stationary charges	شحنات ثابتة
Cyclic processes	العمليات الدورية
Scaffolding	سقالة
Stationary current distribution	توزيع التيار الثابت
Subscript	الرمز السفلي الدليلي
Solenoid	ملف لولبي

Skin effect	ظاهرة سطحية
Skin depth	عمق السطح
Snell's law	قانون سنيل
Standing wave	موجة واقفة او موجة مستقرة
Sharp frequency	التردد الحاد
Substrate	طبقة تحتية
Superstrate	طبقة فوقية
Sputtered zinc oxide	فتات أكسيد الزنك المخرصين
Spatial distribution	التوزيع الفضائي
Sharp ray	شعاع حاد
Space Coordinates	احداثيات فضائية
Space-interval measurements	قياسات الفواصل الفضائية
Summation convention	عرف المجموع
Scattering angle	زاوية الاستطارة
Self - energy	طاقة ذاتية
Stress - tensor	ممتدة الاجهاد
Stable equilibrium pinch	حشر متوازن مستقر
Sausage instability	عدم الاستقرار السجعية
Stretching	سحب

-T-

Tensor	ممتدة
Thermal agitation	تهييج حراري
Tension	شد
Total derivative	مشتقة كلية
Transient current	تيار عابر
Transmission line	خط نقل
Transverse wave	موجة مستعرضة
Time factors	عوامل الزمن
Time averaged energy	المعدل الزمني للطاقة
Time averaged energy density	المعدل الزمني لكثافة الطاقة
Transmission coefficient	معامل الانتقال
Transverse Laplacian operator	عامل لابلاسيان المستعرض
Time-average Poynting vector	المعدل الزمني لمتجه بونيتنك
Thomson Scattering	استطارة تومسون

-U-

Unit vector	وحدة المتجه
Unpolarized atom	ذرة غير مستقطبة
Uniqueness theorem	مبرهنة التوحد
Untenable	غير مستحبة

- V -

Vector	متجه
Volume charge density	كثافة الشحنة الحجمية
Vector function	دالة اتجاهية
Vector potential	جهد متجه
Vector point function	دالة نقطية متجه
Vacuum chamber	غرفة مفرغة
Velocity of propagation	سرعة الانتشار
Vector differential operator	عامل تفاضل متجه

- W -

Weber	فيبر
Wave - front	جبهة الموجة
Wave guides	دلائل الموجة

Bibliography

المراجع

- (1) Andrews, C.L., Optics of the Electromagnetic Spectrum. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1960).
- (2) Argence, E. and Kahan, T., Theory of Waveguides and Cavity Resonators, Blackie, London (1967).
- (3) Band, Introduction to Mathematical Physics, East press (1964)
- (4) Bates, L.F., Modern Magnetism, 4th Ed. Cambridge University Press, (1961).
- (5) Becker, R. and Sauter, F., Electromagnetic Fields and Interactions, Vol. Blaisdell, New York, (1964).
- (6) Bergmann, P.G., Introduction to the Theory of Relativity, Asia Publishing House, (1960).
- (7) Bleaney, B.I and Bleaney, B. Electricity and Magnetism 3 rd . Ed. Oxford University press , (1978)
- (8) Born, M. and wolf, E, principles of Optics, 4th Ed pergamon, New York, (1970)
- (9) Boyd, T.J. M. and Sanderson, J.J., Plasma Dynamics, Nelson, London and Barnes and Noble, New York (1969)
- (10) Brailsford, F., physical principles of Magnetism, Van Nostrand London (1966)
- (11) Carter, G.W., The Electromagnetic Fields in its Engineering Aspects, 2nd Ed., Longmans, Green, London (1967).
- (12) Chambers L.I. G., An Introduction to Mathematics of Electricity and Magnetism, Chapman and Hall, London (1973).

- (13) Chirgwin B.H., Plumpton, C, and Kilmister, C.W Elementary Electromagnetic Theory in 3 volumes. Pergamon Press, Oxford, (1972).
- (14) Clemmow, P.C., The plane wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, Pergamon, Oxford (1966) .
- (15) Clemmow, P.C. and Dougherty, J.P. Electrodynamics of particles and Plasmas, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1969) .
- (16) Collin, R.E., Field Theory of Guided waves, Mc Graw-Hill, New York, (1966) .
- (17) Corson, D.R., and Lorrain, P., Introduction to Electromagnetic Fields and Waves , Freeman, San Francisco, (1962) .
- (18) Coulson , C.A. and Boyd, T.J.M., Electricity, 2nd Ed., Longman Group Limited, London, (1979).
- (19) Cullwick, E.G, The Fundamentals of Electromagnetism, 3 rd Ed Cambridge University Press, (1966).
- (20) de Groot, S.R., The Maxwell Equations, North – Holland, Amsterdam (1969).
- (21) Ecker, G., Theory of Fully Ionized Plasmas, Academic, New York, (1972).
- (22) Fano , R.M., Chu, L.J. and Adler, R.B., Electromagnetic Fields, Energy and Forces. Wiley, New York, (1960).
- (23) Ferrari, R.L., An Introduction to Electromagnetic Fields, Van Nostrand, Reinhold Company (1975) .
- (24) Feynman, R.P. The Electromagnetic Field, Lectures on Physics, Vol.II, Addison-Wesley, (1964) .
- (25) French, A.P., Special Relativity Norton, New York, (1968) .

- (26) Fröhlich, H. Theory of Dielectrics, Clarendon Press (1958) .
- (27) Grant I.S and Phillips, W.R., Electromagnetism, John Wiley & Sons Ltd. (1978) .
- (28) Hallen, E., Electromagnetic Theory, Chapman – Hall, London (1962).
- (29) Harrington, R.F., Time Harmonic Electromagnetic Fields, Mc Graw – Hill, New York , (1961).
- (30) Heitler, W., Quantum Theory of Radiation, 3rd Ed. Oxford University Press, (1954) .
- (31) Hammond, P., Applied Electromagnetism, Pergamon Press (1971).
- (32) Holt, E.H. and Haskell, R.E. Foundations of Plasma Dynamics, Macmillan, New York, (1965).
- (33) Hsu F.H., Am.J. Phys. 40, 492, (1972).
- (34) Hughes, W.F. and Young F.J., The Electrodynamics of Fluids, Wiley, New York (1966) .
- (35) Jackson, J.D., Classical Electrodynamics , 2nd Ed., Wiley Eastern Limited, (1978).
- (36) Jeans, J.H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 5th Ed., Cambridge Univ. press (1948).
- (37) Jeffreys, H. and Jeffreys, B.S., Methods of Mathematical Physics 3rd. Ed, Cambridge University press (1956) .
- (38) Johnson, C.C., Field and wave Electrodynamics, Mc Graw – Hill, New York, (1965) .
- (39) Jordan E.C., and Balmain K.G., Electromagnetic Wave and Radiating Systems, 2nd Ed., Prentice – Hall, Englewood Cliffs (1968) .
- (40) Kilmister, C.W., Special Theory of Relativity, Pergamon, Oxford,(1970) .

- (41) Kittel, C., Introduction to Solid State Physics, 4th Ed. Wiley, New York (1971).
- (42) Kraus, J.D. and Carver, K.R., Electromagnetics 2nd Ed., Mc Graw-Hill, (1973).
- (43) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., The Classical Theory of Fields, 4th Ed. Pergamon Press, (1975).
- (44) Laud, B.B., Introduction to Statistical Mechanics, Macmillan, India, (1981).
- (45) Linhart, J.G., Plasma physics, North Holland Amsterdam (1960).
- (46) Marion, J.B. classical Electromagnetic Radiation , Academic press, New York, (1968).
- (47) Moller, C., The Theory of Relativity 2nd Ed. Clarendon Press, Oxford (1972).
- (48) Panofsky, W.K.H. and Phillips, M. Classical Electricity and Magnetism, 2nd Ed. Addison Wesley, Reading, Mass (1962).
- (49) Penfield, P. and Haus, H.A., Electrodynamics of Moving Media, M.I.T. Press, (1967).
- (50) Popovic B.D., Introductory Engineering Electrodynamics, Addison - Wesley, Reading, Mass. (1971).
- (51) Pugh, E.M. and Pugh E. W., Principles of Electricity and Magnetism, Addison - Wesley, Reading, Mass. (1960).
- (52) Ramo, S., Whinnery, J.R. and Van Duzer, T., Fields and waves in Communication Electronics, Wiley New York (1965).
- (53) Reitz J.R. and Milford, F.J, Foundations of Electromagnetic Theory 2nd Ed. Addison - Wesley (1967).
- (54) Robinson, F.N.H., Macroscopic Electromagnetism, Pergamon, Oxford, (1973).

- (55) Rosenfeld , L. Theory of Electrons, Dover (1966) .
- (56) Sastry, G.P., Am. J. Phys.,38, 267, (1970) .
- (57) Schwartz, W.M., intermediate Electromagnetic Theory, Wiley, New, York, (1964).
- (58) Smythe, W.R., Static and Dynamic Electricity, Mc Graw-Hill, New York (1969) .
- (59) Stone , J.M., Radiation and Optics, Mc Graw – Hill New York (1963) .
- (60) Whittaker, E.T., A History of the Theories of ether and Electricity 2 Volumes Nelson, London, Reprinted by Harper, New York (1960).