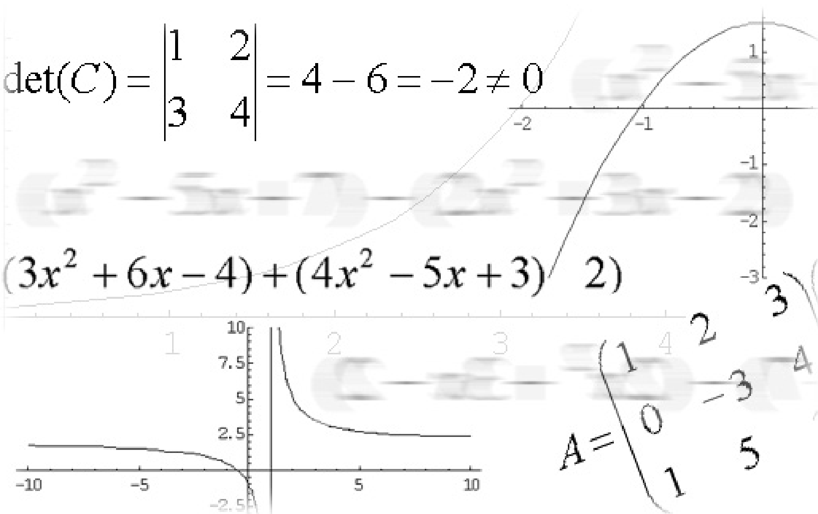
المملكـة العربيــة السـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

اتصالات وحاسب

١٨١ ريض



مقدمه

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية " لمتدربي قسم" إتصالات وحاسب " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله مولى النعم، الحمد له على ما خصنا من نعمه وعمّ، والصلاة والسلام على خير العرب والعجم. أما بعد فإن مقرر رياضيات تخصصية ١ يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدرب الإتصالات والحاسب لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للمتدرب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح.

ودراسة هذا المقرر ستمكن المتدرب من:

- فهم كثيرات الحدود وكيفية حل بعض المعادلات الجبرية.
- فهم المحددات والمصفوفات واستخدامها في حل المعادلات الخطية.
- فهم كيفية حل المعادلات الخطية.
- فهم الدوال وكيفية تمثيلها بمنحنيات.
- فهم الدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية حل بعض المعادلات الأسية واللوغاريتمية.
- فهم الأعداد المركبة وكيفية استخدامها لحل بعض المعادلات الجبرية.

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى ست وحدات رئيسة:
تعنى الوحدة الأولى لتعريف المتدرب بكثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها وبالكسور الجبرية وكيفية اختصارها.وأخيرا بكيفية حل بعض المعادلات الجبرية.

و خصصت الوحدة الثانية لدراسة المحددات وكيفية حسابها والمصفوفات والعمليات عليها وأخيرا كيفية حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة المتدرب بالمعادلات الخطية وكيفية حلها سواء ذات مجهول واحد أو ذات مجهولين أو ذات ثلاثة مجاهيل وأخيرا كيفية استخدام المصفوفات لحلها.

أما الوحدة الرابعة فقد خصصت لدراسة الدوال وأنواعها والدوال العددية المشهورة كبعض الدوال الجبرية والدوال المثلثية الأساسية والدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية تمثيل منحنياتها.

و خصصت الوحدة الخامسة لدراسة الأسس المختلفة والدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية حل بعض المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

تجدر الإشارة إلى أن دراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية في الوحدة الرابعة بغرض رسم منحنياتها بينما في الوحدة الخامة بغرض حل المعادلات.

أما الوحدة السادسة والأخيرة فقد تناولت الأعداد المركبة والعمليات عليها وكيفية كتابتها بأشكالها المختلفة الديكارتي والقطبي والأسي وأخيرا كيفية استخدامها في حل بعض المعادلات الجبرية.

والله الموفق

المملكـة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

اتصالات وحاسب

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

١

الجدارة:

معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية والقدرة على حل المعادلات الجبرية.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- كثيرات الحدود والعمليات عليها.
- تحليل كثيرات الحدود.
- الكسور الجبرية واختصارها.
- حل المعادلات الجبرية ذات مجهول واحد.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪

الوقت المتوقع للتدريب: عشر ساعات.

كثيرات الحدود

١. تعريف كثيرات الحدود

تعريف ١: يكون الحد الجبري إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال ١: معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي 3.

تعريف ٢: كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهٍ من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها. الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس) تسمى الحدود المتشابهة، فمثلا $12x^2$ و $-9x^2$ حدان متشابهان ولكن الحدود $-2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة. تتم عملية الاختصار بجمع الحدود المتشابهة فمثلا يختصر $4x^2+3x-2x$ إلى $4x^2+x$. درجة الحد الثابت دائما تساوي الصفر $(2=2x^0)$.

الشكل العام لكثيرات الحدود هو كالتالي:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_2x^2+a_1x+a_0$ حيث $a_n \neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب. المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت.

مثال ٢: الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاثة كثيرات حدود:

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعاملات	المعامل الرئيسي
$9x^2-x+5$	$9x^2, -x, 5$	2	$9, -1, 5$	9
$11-2x$	$-2x, 11$	1	$-2, 11$	-2
x^3+5x-3	$x^3, 5x, -3$	3	$1, 5, -3$	1

٢. العمليات الحسابية على كثيرات الحدود

جمع وطرح كثيرات الحدود

مثال ٣: اختصر ما يلي:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)\quad 2)\ (x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)$$

الحل:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)=(3x^2+4x^2)+(6x-5x)+((-4)+1)=7x^2+x-3$$

$$2)\ (x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)=(x^2-2x^2)+[(-5x)-(+3x)]+(7-(-2))=-x^2-8x+9$$

ضرب كثيرات الحدود

تعريف ٣: تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني وهكذا.

مثال ٤: احسب واختصر ما يلي: $(2x-3)(3x^2-x+1)$

الحل:

$$(2x-3)(3x^2-x+1)=(2x)(3x^2)+(2x)(-x)+(2x)(1)+(-3)(3x^2)+(-3)(-x)+(-3)(1)$$

$$=6x^3-2x^2+2x-9x^2+3x-3=6x^3-11x^2+5x-3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

$$(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال ٥: أوجد حاصل الضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

$$1)\ (7x+10)(7x-10)\qquad 2)\ (2y^2+11z^2)^2\qquad 3)\ (2x-3y)^3$$

الحل:

$$1)\ (7x+10)(7x-10)=(7x)^2-(10)^2=49x^2-100$$

$$2)\ (2y^2+11z^2)^2=(2y^2)^2+2(2y^2)(11z^2)+(11z^2)^2=4y^4+44y^2z^2+121z^4$$

$$3)\ (2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$$

حساب قيمة كثير الحدود عند قيمة معينة للمتغير

مثال ٦ : احسب قيمة $2x^3 - 6x^2 + 7$ عندما : $2)\, x = \sqrt{2}$ $\quad 1)\, x = -4$

الحل:

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بالقيم المعطاة كالتالي:

$$1)\, 2x^3 - 6x^2 + 7 = 2(-4)^3 - 6(-4)^2 + 7 = 2(-64) - 6(16) + 7 = -128 - 96 + 7 = -217$$

$$2)\, 2x^3 - 6x^2 + 7 = 2(\sqrt{2})^3 - 6(\sqrt{2})^2 + 7 = 2(2\sqrt{2}) - 6(2) + 7 = 4\sqrt{2} - 12 + 7 = 4\sqrt{2} - 5$$

قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

تعريف ٤: قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المطولة المستعملة قي تقسيم الأعداد الصحيحة.

مثال ٧: لتقسيم $x^2 + 9x - 16$ على $x - 3$ نتبع الطريقة التالية:

	$x + 12$
$x - 3$	$x^2 + 9x - 16$
	$x^2 - 3x$
	$12x - 16$
	$12x - 36$
	20

إذا في هذا المثال يكون حاصل قسمة $x^2 + 9x - 16$ على $x - 3$ هو $x + 12$ وباقي القسمة هو 20

تمارين

تمرين ١: اذكر الحدود والمعاملات والدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

1) x^2+2x-7 2) $\sqrt{2}$ 3) $4x^2y^2-5x^3y^2+17xy^3$

4) $2x^4+3x^3+4x^2+5$ 5) x^3-1 6) $-9x^5y+10xy^4-11x^2y^2$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

1) $(3x^2+4x+5)+(2x^2+7x-2)$ 5) $(5x-7)(3x^2-8x-5)$

2) $(4w^2-2w+7)+(5w^3+8w^2-1)$ 6) $(3x^2-2x+5)(2x^2-5x+2)$

3) $(7s^2-4s+11)-(-2s^2+11s-9)$ 7) $(3c-2)(4c+1)(5c-2)$

4) $(u^3-3u^2-4u+8)-(u^2-2u+4)$ 8) $(4u-5)(2u-1)(3u-4)$

تمرين ٣: استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

1) $(3x+5)(3x-5)$ 7) $[(x+5)+y][(x+5)-y]$

2) $(4x^2-3y)(4x^2+3y)$ 8) $[(x-2y)+7][(x-2y)-7]$

3) $(3x^2-y)^2$ 9) $(x-1)^3$

4) $(4w+z)^2$ 10) $(2x+y)^3$

5) $[(x-2)+y]^2$ 11) $[(x-1)+2y]^3$

6) $[(x+3)-y]^2$ 12) $[4-(1-2y)]^3$

تمرين ٤: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند النقاط المعطاة:

1) $x^2+7x-1\ ;\ x=3$

2) $-x^2-5x+4\ ;\ x=-5$

3) $5x^3-x^2+5x-3\ ;\ x=-1$

4) $1-x^3-x^5\ ;\ x=2$

تمرين ٥: استعمل طريقة القسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود الأولى على الثانية:

1) $5x^3 + 6x - 17x + 20,\ x + 3$

2) $6x^4 + 3x^2 - 11x^2 - 3x + 9,\ 2x - 3$

3) $2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45,\ 2x^2 - x - 5$

4) $24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15,\ 6x^2 + 5$

٣. تحليل كثيرات الحدود

تعريف ٥: عملية كتابة كثير حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلاً عملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات. سنتطرق في هذا الباب إلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة فقط.

طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م)

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا كما هو موضح في المثال التالي.

مثال ٨: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$$1)10x^3+6x \qquad 2)12x^2y-6xy-30xy^2 \qquad 3)(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)$$

الحل:

١) نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3+6x=2x(5x^2)+2x(3)=2x(5x^2+3)$$

٢) في هذه الفقرة نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$12x^2y-6xy-30xy^2=6xy(2x)-6xy(1)-6xy(5y)=6xy(2x-1-5y)=6xy(2x-5y-1)$$

٣) هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثير الحدود $2a-b$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)=(2a-b)\left[(x-4)+(x+4)\right]=(2a-b)(x-4+x+4)$$

$$=(2a-b)(2x)=2x(2a-b)$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي.

مثال ٩: حلل كثير الحدود التالي: $6y^3-21y^2-4y+14$

الحل:

نقوم أولا بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $2y-7$ أصبح عامل مشترك بين المجموعتين فإذا يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

$$=(2y-7)(3y^2-2)$$

طريقة تحليل كثير الحدود $ax^2 + bx + c$

الحالة الأولى: $a = 1$

في هذه الحالة يجب أن نوجد كثيري حدود يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b. المثال التالي يوضح هذه الطريقة.

مثال ١٠: حلل كثير الحدود التالي: $x^2 + 7x - 18$

الحل:

في هذه الحالة $b = 7$ و $c = -18$ إذا يجب البحث عن عددين حاصل ضربيهما يساوي -18 وجمعهما الجبري يساوي 7. فالعددين حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن: $7 = 9 + (-2)$ و $-18 = 9 \times (-2)$ .. وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$$x^2 + 7x - 18 = (x-2)(x+9)$$

ويمكن التأكد من هذا الحل بفك الأقواس.

في حالة عدم استطاعة إيجاد العددين حسب الشرطين المذكورين نحاول التحليل بطرق أخرى سنذكرها في هذا الفصل.

الحالة الثانية: $a \neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

$$1)\, mn = a \;,\; 2)\; pq = c \;,\; 3)\; mq + np = b$$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع الملاحظة أن إشارة p و q تكون نفس إشارة b إذا كان $c > 0$ ومختلفتان إذا كان $c < 0$. يتم اختيار m و n على أساس الشروط (1 و (2 ثم نستخدم الشرط (3 للتأكد من صحة الأعداد m و n.

مثال ١١: حلل كثير الحدود التالي: $6x^2+11x+3$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m,n,p,q حيث: $mn=6,\ pq=4,\ mq+np=-11$

مع العلم أن إشارة p و q موجبة لأن $c>0$ و $b>0$ وبطريقة التجربة والخطأ نجد في الأخير أن: $m=2, n=3, p=3, q=1$ إذا يكون التحليل كما يلي:

$$6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1)$$

ملاحظة: حتى يكون ax^2+bx+c قابلا للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة b^2-4ac مربعا كاملا. فمثلا $6x^2-5x-4$ قابل للتحليل لأن $b^2-4ac=(-5)^2-4(6)(-4)=121=11^2$.

إذا كان $p=q$ و $m=n$ فنقول إن ax^2+bx+c هو مربع كامل وتحليله يساوي $(mn+p)^2$

طريقة تحليل فرق مربعين

في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرنها في بداية هذا الباب وهي:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

مثال ١٢: حلل $49x^2-144$

الحل:

يمكن كتابة $49x^2-144$ على شكل $49x^2-144=(7x)^2-(12)^2$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون المذكور أعلاه ويصبح التحليل كالتالي: $49x^2-144=(7x)^2-(12)^2=(7x+12)(7x-12)$

طريقة تحليل فرق وجمع مكعبين

هنا كذلك نستخدم قانونين لم نذكرها من قبل وهما قانون فرق وجمع مكعبين:

$$i)\ x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \qquad ii)\ x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

مثال ١٣: حلل كلا من: $1)\ 8a^3+b^3 \quad 2)\ a^3-64$

الحل:

١) يمكن كتابة $8a^3+b^3$ على شكل $8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون $ii)$ ويصبح التحليل كما يلي:

$$8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3=(2a+b)[(2a)^2-(2a)(b)+(b)^2]$$

$$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$$

٢) يمكن كتابة a^3-64 على شكل $a^3-64=(a)^3-(4)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون $i)$

ويصبح التحليل كالتالي:

$$a^3-64=(a)^3-(4)^3=(a-4)[(a)^2+(a)(4)+(4)^2]=(a-4)(a^2+4a+16)$$

طريقة التحليل بتجميع الحدود

تستوجب هذه الطريقة شيئا من الخبرة لمعرفة الحدود التي يجب تجميعها.

مثال ١٤: حلل كلا مما يلي بطريقة التجميع: 1) $2m^2+6mn-15m-5n$ 2) $p^2+p-q-q^2$

الحل:

يتم التجميع والتحليل كما يلي:

$$1)\ 2m^2+6mn-15n-5m=(2m^2+6mn)+(-15n-5m)$$
$$=2m(m+3n)-5(3n+m)$$
$$=(m+3n)(2m-5)$$

$$2)\ p^2+p-q-q^2=p^2-q^2+p-q=(p^2-q^2)+(p-q)$$
$$=(p+q)(p-q)+(p-q)$$
$$=(p-q)(p+q+1)$$

تمارين

حلل كلا مما يلي باستخدام الطريقة المناسبة:

$1)\ -15x^2-12x$	$13)\ x^4+11x^2+18$	$27)\ 1+y^{12}$
$2)\ 6a^3b^2-12a^2b+72ab^3$	$14)\ 9x^4+10x^2+1$	$28)\ 8-x^6$
$3)\ (x-4)(m+2n)+n(x-4)$	$15)\ 6x^4+23x^2+15$	$29)\ (x-2)^3-1$
$4)\ x(y-3)-5(3-y)$	$18)\ x^2-9$	$31)\ (a+b)^3+(a-b)^3$
$5)\ 3x^3+x^2+6x+2$	$19)\ 81b^2-16c^2$	$33)\ 27-(x+1)^6$
$6)\ 2x^2-2xy+x-y$	$20)\ x^4-9$	$34)\ 5xy+20y-15x-60$
$7)\ 10z^3-15z^2-4z+6$	$21)\ 16y^4-196$	$35)\ 4x^2+2x-y-y^2$
$8)\ 6m^3+4m^2-15m-10$	$22)\ 1-121n^2$	$36)\ x^2+6x+9-y^2$
$9)\ x^2+9x+20$	$23)\ x^2-(y+z)^2$	$37)\ 4x^2-9y^2+4x+1$
$10)\ b^2+12b-28$	$24)\ x^3-8$	$38)\ 27x^3-6x^2+2x-1$
$11)\ 8a^2-26a+15$	$25)\ p^3+64$	$39)\ 8x^3+12x^2+6x+1$
$12)\ 6x^2-23x+20$	$26)\ 64u^3-27w^3$	$40)\ a^2+a+b-b^2$

٤. الكسور الجبرية (العبارات النسبية)

تعريف ٦ : كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيري حدود.

مثال ١٥: تعتبر $\dfrac{3x+1}{2x-5}$ و $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسور جبرية.

مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر لأن القسمة في هذه الحالة تكون غير معرفة.

مثال ١٦: مجال $\dfrac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$ و $x=0$ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي الصفر.

نظرية ١: خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{S} \Leftrightarrow PS=QR \quad , \quad \frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR} \qquad R\neq 0 \quad , \quad -\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}$$

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q} \quad , \quad \frac{P}{Q}-\frac{R}{Q}=\frac{P-R}{Q} \quad , \quad \frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \quad , \quad \frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{PS}{QR} \qquad R\neq 0$$

اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذا عملية الاختصار تتطلب منا الإدراك الجيد بعمليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال 17 : اختصر ما يلي: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

الحل:

أولا نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقا كالتالي:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \quad , \quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

إذن يختصر الكسر كالتالي:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+2} \, , \qquad x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$$

ملاحظة: $\dfrac{x+6}{2}\neq x+3$ وإنما $\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{6}{2}=\dfrac{x}{2}+3$

مثال ١٨: اختصر كل مما يلي: $1)\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x-1}{x-2} \qquad 2)\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\dfrac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}$

الحل:

$$1)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2} \, , \ x\neq 1 \ x\neq 2$$

$$2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\div\frac{(x+4)(x+3)}{x(x^2-3x+9)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\cdot\frac{x(x^2-3x+9)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)x(x^2-3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)(x+4)(x+3)}=\frac{x}{x+4} \, , \ x\neq 0 \ \ x\neq -3$$

مثال ١٩: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n} \qquad 2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1} \qquad 3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}$$

الحل:

في مثل هذه المسائل بعد تحليل المقام (إذا كان ذلك ممكنا) يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}=\frac{(2mn+m)-(mn+m)}{m+n}=\frac{2mn+m-mn-m}{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

$$2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+3(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2-x+3x+3}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(2x-1)}$$

$$3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x-1}{(x-5)(x+2)}=\frac{x(x-5)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-5x)-(2x^2-4x-x+2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{x^2-5x-2x^2+4x+x-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{-x^2-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}=-\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

هناك حالات يكون فيها بسط ومقام الكسر الجبري عبارة عن كسور جبرية. لاختصار مثل هذا الكسر يجب أولا اختصار كل من البسط والمقام ثم نواصل عملية الاختصار بنفس الطريقة المذكورة سابقا.

مثال ٢٠: اختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}} \qquad 2)\frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}$$

الحل:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+1(x-2)}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{3x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{3x-2}{x(x-2)}\cdot\frac{x-5}{3x-2}$$

$$=\frac{(3x-2)(x-5)}{x(x-2)(3x-2)}=\frac{x-5}{x(x-2)}$$

$$2)\ \frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}=\frac{x-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-y}=\frac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{1-xy}{x}}=\frac{xy-1}{y}\cdot\frac{x}{1-xy}=\frac{(xy-1)(x)}{(y)(1-xy)}=$$

$$=\frac{(-1)(1-xy)(x)}{(y)(1-xy)}=\frac{(-1)(x)}{(y)}=-\frac{x}{y}$$

ملاحظة: من الخطأ اختصار $\frac{2x^2+y}{3x^2}$ و $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}$ كما يلي:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2+y}{3x^2}=\frac{2+y}{3}$$

تمارين

تمرين ١: اختصر الكسور الجبرية التالية:

1) $\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+3)}$ 2) $\dfrac{x^2-x-20}{3x-15}$ 3) $\dfrac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x}$ 4) $\dfrac{a^3+8}{a^2-8}$

5) $\dfrac{x^2+3x-40}{-x^2+3x+10}$ 6) $\dfrac{10x^2-3x-1}{2x^2+5x-3}$ 7) $\dfrac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2}$ 8) $\dfrac{x^3-x^2+x}{x^3+1}$

تمرين ٢: احسب واختصر كلا مما يلي:

1) $\dfrac{x^2+x}{2x+3}\cdot\dfrac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4}$ 2) $\dfrac{x^2-16}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-4x}$

3) $\dfrac{12m^2+28m+15}{6m^2+35m+25}\cdot\dfrac{2m^2-m-3}{3m^2+11m-20}$ 4) $\dfrac{6u^2-5u+1}{3u^2+11u-4}\div\dfrac{2u^2+3u-2}{u^2+3u-4}$

5) $\dfrac{z^2-81}{z^2-16}\div\dfrac{z^2-z-20}{z^2+5z-36}$ 6) $\dfrac{2a^2-5a+3}{a^2+a-2}\div\dfrac{3a^2-8a-3}{a^2-a-6}$

تمرين ٣: احسب واختصر كلا مما يلي:

1) $\dfrac{9x+1}{2x-1}-\dfrac{3x+4}{2x-1}$ 2) $\dfrac{x+1}{2x+3}+\dfrac{2x-1}{2x-3}$ 3) $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}$

4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x-1}\cdot\dfrac{3x^2+11x-4}{x-5}$ 5) $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{2x}{x-3}\div\dfrac{x+5}{x-3}$ 6) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$

تمرين ٤: احسب واختصر كلا مما يلي:

1) $\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{3}{3x+1}+\dfrac{4}{4x+1}$ 2) $\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{x^2-16}$

3) $\dfrac{2}{x^2-3x+2}+\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{5}{x^2+3x-10}$ 4) $\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{2x-1}{x^2-4}$

تمرين ٥: احسب واختصر كلا مما يلي:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{3}{x+3}}$ 2) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{2x^2-x-1}+\dfrac{1}{x-1}}$ 3) $\dfrac{\dfrac{z^2+3z-10}{z^2+z-6}}{\dfrac{z^2-z-30}{2z^2-15z+18}}$ 4) $\dfrac{\dfrac{2y^2+11y+15}{y^2-4y-21}}{\dfrac{6y^2+11y-10}{3y^2-23y+14}}$

تمرين ٦ : احسب واختصر كلا مما يلي:

1) $\dfrac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h}$ 2) $\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$ 3) $\dfrac{a^{-1}}{a^{-1} + a^{-2}}$

4) $\dfrac{a^{-1}b - ab^{-1}}{a^2 + b^2}$ 5) $\dfrac{1 + \dfrac{1}{p-2}}{1 - \dfrac{1}{p+3}}$ 6) $\dfrac{4 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$

٥. المعادلات

تعريف ٧: المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيري حدود). وتكون هذه المعادلة إما صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثال ٢١: المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأية قيمة أخرى ل x. إذن نقول إن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

مثال ٢٢: $x=3$ و $x=2$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$.

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل: $x=$ ثابت.

لإيجاد هذه المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل التبديلية، التجميعية والتوزيعية: $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متكافئتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة: $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتان متكافئتان.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفراً:
  $\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معادلتان متكافئتان

حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:

تعريف ٨: معادلة خطية (غير شاذة) ذات مجهول واحد x هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$

مثال ٢٣: حل المعادلات التالية: $1)\ 2x+5=9 \quad 2)\ \frac{3}{4}x-6=0 \quad 3)\ (x+2)(5x+1)=5x(x+1)$

الحل:

١) يتم حل هذه المعادلة بطرح ٥ من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على ٢:

$$2x+5-5=9-5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=4$$

٢) هنا نضيف ٦ إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}x-6=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x-6+6=0+6 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=6 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6) \Leftrightarrow x=8$$

٣) نقوم أولا بفك الأقواس ثم نطرح على التوالي $5x^2 , 5x , 2$ من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على ٦:

$$(x+2)(5x+1) = 5x(x+1) \Leftrightarrow 5x^2 + 11x + 2 = 5x^2 + 5x \Leftrightarrow 11x + 2 = 5x$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 6x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام. وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال ٢٤: حل المعادلات التالية: $1)\ \frac{x}{x-3} = \frac{24-5x}{x-3} \qquad 2)\ 1 + \frac{x}{x-5} = \frac{5}{x-5}$

الحل:

١) أولا يجب أن ندرك أن $x \neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-3)\frac{x}{x-3} = (x-3)\frac{24-5x}{x-3} \Leftrightarrow x = 24 - 5x \Leftrightarrow x + 5x = 24 - 5x + 5x$$

$$\Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{24}{6} \Leftrightarrow x = 4$$

وهذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

٢) هنا كذلك يجب أن ندرك أن $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-5)\left(1 + \frac{x}{x-5}\right) = (x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) \Leftrightarrow (x-5)1 + (x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right) = (x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - 5 + x = 5 \Leftrightarrow 2x - 5 = 5 \Leftrightarrow 2x - 5 + 5 = 5 + 5 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفراً فإذن الحل $x = 5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول أن المعادلة الأصلية ليس لها حلا.

تمارين

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

1) $2x+10=40$

2) $-3y+20=2$

3) $4x-11=7x+20$

4) $4(2x-17)+5(3x-8)=0$

5) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

6) $\frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2}$

7) $5(x+3)(x-3)=5x(x-1)$

8) $\frac{40-3x}{5x}=\frac{6x+7}{8}$

9) $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7}$

10) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2}$

11) $\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4}$

12) $2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3}$

13) $\frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2}$

14) $\frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2$

14) $\frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4}$

15) $\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3}$

17) $5[x-(4x-5)]=3-2x$

18) $6[3y-2(y-1)]-2+7y=0$

19) $4[2+(y+1)^2]=(y+2)^2$

19) $(y+3)^2=(y+4)^2+1$

21) $(z-7)^2=(z-2)^2+9$

حل المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف ٨: معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

طريقة التحليل

إذا كان من الممكن تحليل كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ باستخدام أعداد صحيحة فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ أو $B = 0$

مثال ٢٥: حل المعادلات التالية: $1)\, x^2 + 10x + 25 = 0 \qquad 2)\, 2x^2 + x - 6 = 0$

الحل:

١) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في هذا الفصل نجد أن $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$ وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \{x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ أو } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5\}$$

إذن حلول المعادلة $x^2 + 8x + 15 = 0$ هي $x = -3$ و $x = -5$. ووجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

٢) يكون التحليل هنا بطريقة m, n, p, q لأن $a \neq 1$ ويكن الحل كالتالي:

$$2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $2x^2 + x - 6 = 0$ هي $x = -2$ و $x = \dfrac{3}{2}$

طريقة الجذر التربيعي

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2 = B$ و $B > 0$ إذن $A = \pm B$.

مثال ٢٦: حل المعادلات التالية: $1)\, x^2 - 5 = 0 \qquad 2)\, (x+1)^2 = 49$

الحل:

١) بعد إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2 - 5 + 5 = 0 + 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

إذن الحلول هي: $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$

٢) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2 = 49 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x+1 = \pm 7 \Leftrightarrow x = \pm 7 - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 7-1 = 6 \text{ أو } x = -7-1 = -8$$

إذن الحلول هي: $x = 6$ و $x = -8$.

طريقة إكمال المربع:

أولا نقوم بفصل الحد الثابت في المعادلة عن المتغير ثم نقسم طرفي المعادلة على a إذا كان $a \neq 1$ ثم نضيف القيمة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة. عند هذه المرحلة يصبح الجانب الأيسر من المعادلة مربعا كاملا ويكون تحليله على شكل $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$. ثم نتبع نفس خطوات الحل بطريقة الجذر التربيعي لبقية الحل.

مثال 27: حل المعادلات التالية: $2)\, 2x^2 + 8x - 15 = 0$ $\quad 1)\, x^2 - 2x + 6 = 0$

الحل:

١) بعد فصل الثابت عن المتغير مع الملاحظة أن في هذه الحالة $a = 1$ ثم إضافة القيمة $1 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2$ تصبح المعادلة كالتالي:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$$

عند هذه المرحلة تكون باقي الخطوات مماثلة لطريقة الجذر التربيعي كما يلي:

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3$$
$$\Leftrightarrow \{\, x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \text{ أو } x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \}$$

٢) هنا الفرق عن الفقرة الأولى هو أن $a = 2$ أي أن $a \neq 1$ فإذا يجب القسمة على ٢ بعد مرحلة فصل الحد الثابت ثم نتبع نفس الخطوات المتبعة في الفقرة الأولى ويكون الحل كالتالي:

$$2x^2 + 8x - 15 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x^2 + 8x) = \frac{1}{2}(15) \Leftrightarrow x^2 + 4x = \frac{15}{2}$$

إذن القيمة التي نضيفها إلى طرفي المعادلة هي $4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ويكون باقي الحل كالتالي:

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{15}{2} + 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{23}{2} \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{\frac{23}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{23}{2}} - 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{46} - 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{46} - 4}{2} \text{ أو } x = \frac{-\sqrt{46} - 4}{2}$$

طريقة المميز:

من طريقة إكمال المربع نصل إلى قانون مشهور وهو قانون المميز أو طريقة المميز:

حلول المعادلة: $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ هي $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ولأن القيمة $b^2 - 4ac$ موجودة تحت الجذر فهناك ثلاثة حالات هي كالتالي:

- إذا كانت القيمة $b^2 - 4ac$ موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- إذا كانت القيمة $b^2 - 4ac$ تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان: $x = \dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت القيمة $b^2 - 4ac$ سالبة فليست هناك حلول حقيقية.

مثال ٢٨: حل المعادلات التالية: $3)\, 3x^2 + 6x + 7 = 0$ $\quad 2)\, x^2 + 6x + 9 = 0$ $\quad 1)\, 2x^2 - 5x + 2 = 0$

الحل:

١) في هذه الحالة $a = 2 \;\; b = -5 \;\; c = 2$ إذن:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0$$

إذا فهناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ أو } x = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

٢) في هذه الحالة $a = 1 \;\; b = 6 \;\; c = 9$ إذن:

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

إذن فهناك حلان حقيقيان متشابهان وهما: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(6)}{2(1)} = -3$

٣) في هذه الحالة $a = 3 \;\; b = 6 \;\; c = 7$ إذن:

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(3)(7) = 36 - 84 = -48 < 0$$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل

$1)\ x^2-2x-15=0$ $\quad 2)\ 8y^2+189y-72=0$ $\quad 3)\ 3x^2-7x=0$

$4)\ 8+14t-15t^2=0$ $\quad 5)\ (x-5)^2-9=0$ $\quad 6)\ (2x-5)^2-(4x-11)^2=0$

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي

$1)\ x^2=81$ $\quad 2)\ 2x^2-48=0$ $\quad 3)\ (x-5)^2=36$

$4)\ (x-8)^2=(x+1)^2$ $\quad 5)\ x^2=(x+1)^2$ $\quad 6)\ 4x^2=(2x+3)^2$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع

$1)\ x^2+8x-10=0$ $\quad 2)\ x^2-6x=0$ $\quad 3)\ x^2+7x-2=0$

$4)\ 2x^2+10x-3=0$ $\quad 5)\ 4x^2-4x+15=0$ $\quad 6)\ 2+10x-5x^2=0$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز

$1)\ x^2-2x-15=0$ $\quad 2)\ x^2+x-1=0$ $\quad 3)\ 2x^2+4x+1=0$

$4)\ 3x^2-5x+3=0$ $\quad 5)\ \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$ $\quad 6)\ \frac{2}{3}x^2-5x+\frac{1}{2}=0$

$7)\ -x^2=7x-1$ $\quad 8)\ \sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}=0$ $\quad 9)\ 2x^2+\sqrt{5}x-3=0$

تمرين ٥: أوجد قيمة k حيث أن المعادلات التالية يكون لها حلان متشابهان

$1)\ 16x^2+kx+9=0$ $\quad 2)\ x^2+kx+81=0$ $\quad 3)\ y^2-3y+k=0$ $\quad 4)\ x^2+15x+k=0$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

المحددات والمصفوفات

المحددات والمصفوفات

٢

الجدارة:

معرفة الحددات والمصفوفات والقدرة على حساب المحددات وأداء العمليات على المصفوفات..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- المحددات.
- حساب المحددات.
- المصفوفات؛
- أداء العمليات على المصفوفات.
- حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

الوقت المتوقع للتدريب: اثنتا عشرة ساعة.

المحددات والمصفوفات

يبدو أن أول استخدام للمصفوفات كان في الكتاب الصيني "تسعة كتب في الحساب" قبيل بداية التاريخ الميلادي، بينما أول المحددات استخدمت من طرف الياباني *Seki Kōwa* سنة ١٦٨٣م..

وتعد المحددات والمصفوفات موضوعا رئيسيا في أحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر الخطي.

و من تطبيقاتها: حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

١. تعريف المحددات:

تعريف ١: المحدد من الرتبة $n \times n$ هو عدد حقيقي نتحصل عليه من قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصره، ومرتّبة على شكل صفوف وأعمدة بحيث عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ويساوي n ، وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة.

يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات 1×1 تساوي عنصرها..

مثال ١:.المحددات التالية من الرتبة 2×2 ، 3×3 ، و 4×4 على الترتيب:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

حساب المحددات 2×2 :

تعريف ٢: المحدد 2×2 هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد)، أي أنّ:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال ٢: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 6 - 4 = 2$$

$$2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (1 \times 0) - (5 \times -1) = 0 - (-5) = 5$$

حساب المحددات 3×3 :

تعريف ٢: المحدد 3×3 هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)، و نتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب، أي أنّ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال ٣: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 8 & 7 \end{matrix}$$

$$= (1\times 6\times 4) + (3\times 3\times 8) + (9\times 2\times 7) - (8\times 6\times 9) - (7\times 3\times 1) - (4\times 2\times 3)$$

$$= 24 + 72 + 126 - 432 - 21 - 24 = -255$$

$$2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-1\times 1\times 4) + (0\times -3\times 0) + (2\times 5\times -2) - (0\times 1\times 2) - (-2\times -3\times -1) - (4\times 5\times 0)$$

$$= -4 + 0 - 20 - 0 - (-6) - 0 = -18$$

٢. بعض خواص المحددات:

قاعدة النقل: لا تتغير قيمة المحدد إذا حولنا الصفوف إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف.

مثال ٤: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٢:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٣:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

قاعدة الضرب في عدد: إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف واحد فقط أو عمود واحد فقط للمحدد بعدد حقيقي فإننا نضرب قيمة المحدد (الأصلي) بهذا العدد.

مثال ٥: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٢:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5\times 2 & 0.5\times 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times 2 = 1$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٣:

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3\times 3 & 9 \\ 2 & -3\times 6 & 3 \\ 8 & -3\times 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times -255 = 765$$

قاعدة التبادل: إذا تبادل صفان بينهما أو عمودان بينهما فإن إشارة المحدد تتغير فقط.

مثال ٦ : احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٥ بعد تبادل العمود الأول والثاني:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٥ بعد تبادل الصف الثاني والثالث:

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = -765$$

قاعدة التماثل: إذا تماثل صفان أو عمودان فإن قيمة المحدد هي صفر.

مثال ٧ : احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) بما أنّ الصف الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

٢) بما أنّ العمود الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

٣. تعريف المصفوفات:

تعريف ٤: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m\times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصرها، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة، بحيث عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n .

يمكن الإشارة إلى أنّ المصفوفات 1×1 هي أعداد حقيقية.

مثال ٨: المصفوفات التالية من الرتبة 2×3 ، 3×2 ، 4×1 ، 1×5 ، و 3×3 على الترتيب:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 10\\ 3 & 5 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 7 & 5\\ 10 & 12\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0.5\\ 2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-0.6 & 2 & 17 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 0.7\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تعريف ٥: تكون مصفوفتان من الرتبة نفسها متساويتين إذا تساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب..

مثال ٩: نعتبر مصفوفات المثال ٨ والمصفوفتين التاليتين:

$$F=\begin{pmatrix}3+2 & 2 & -1\text{x}3\\ 1 & 0 & 0.7\\ 2 & 2-6 & 0\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 0.7\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

A

$A\neq B$ لأنهما من رتبتين مختلفتين، وكذلك $E\neq G$ لأنه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني)، بينما $E=F$.

٤. عمليات على المصفوفات:

الجمع والطرح:

تعريف ٦: حاصل جمع (أو طرح) مصفوفتين من الرتبة نفسها هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو مجموع (أو طرح) العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثال ١٠: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ A+B \qquad 2)\ B-A$$

الحل:

$$1)\ A+B=\begin{pmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B-A=\begin{pmatrix} -2-2 & 0-4 & 1-7 \\ 3-(-6) & 4-3 & 7-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

نظرية ١: جمع المصفوفات تبديلي وتجميعي.

مثال ١١: نعتبر مصفوفات المثال ١٠. احسب ما يلي:

$$1)\ B+A \qquad 2)\ B+(A+B) \qquad 3)\ B+B+A$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٩ وبأن الجمع تبديلي:

$$B+A=A+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من هذا المثال وبأن الجمع تجميعي:

$$B+(A+B)=(B+A)+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

٣) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من هذا المثال وبأن الجمع تبديلي وتجميعي:

$$B+B+A=B+A+B=B+(A+B)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

تعريف ٧: ضرب (أو قسمة) مصفوفة في (أو على) عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها ، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب (أو قسمة) العنصر الموافق له من المصفوفة (الأصلية) في (أو على) العدد الحقيقي.

مثال ١٢: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ 3A \qquad 2)\ -A+2B \qquad 3)\ \frac{B}{-2}$$

الحل:

$$1)\ 3A=3\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3 & 3\times0\\ 3\times1 & 3\times2\\ 3\times6 & 3\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

$$2)\ -A+2B=-1\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\\ -6 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ 6 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -6\\ 0 & -4.2\end{pmatrix}$$

$$3)\ \frac{B}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{0.5}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2}\\ \frac{3}{-2} & \frac{0.4}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.25 & -0.5\\ 0 & 1\\ -1.5 & -0.2\end{pmatrix}$$

نظرية ٢: ضرب مصفوفة في عدد حقيقي تبديلي وتجميعي (أي بالنسبة للضرب في عدد آخر).

مثال ١٣: نعتبر مصفوفات المثال ١٢. احسب ما يلي:

$$1)\ A\times3 \qquad 2)\ 1.5(2A)$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ١٢ وبأنّ العملية تبديلية:

$$A \times 3 = 3A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ١٢ وبأنّ العملية تجميعية:

$$1.5(2A) = (1.5 \times 2)A = 3A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

ضرب صف في عمود:

تعريف ٨: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديليا.

مثال ١٤: احسب ما يلي:

$$1)\ a=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix} \qquad 2)\ b=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ a=(1\text{x}-3)+(-2\text{x}1)+(0\text{x}4)+(0.3\text{x}10)=-3-2+0+3=-2$$

٢) لا يمكن حساب b لأنّ عدد عناصر الصف لا يساوي عدد عناصر العمود.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن حساب ضرب العمود في الصف بعد التعريف اللاحق فقط.

ضرب مصفوفتين:

تعريف ٩: حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m\times k$ في مصفوفة من الرتبة $k\times n$ (أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

مثال ١٥: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}30 & -40 & 90\\-25 & -80 & 100\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}10 & 15\\70 & 90\\120 & 110\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 30\\15 & 0 & -12\\23 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ AB \qquad 2)\ BA \qquad 3)\ BC$$

الحل:

$$1)\ AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & -40 & 90\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\70\\120\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}30 & -40 & 90\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\90\\110\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-25 & -80 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\70\\120\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-25 & -80 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\90\\110\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8300 & 6750\\6150 & 3425\end{pmatrix}$$

$$2)\ BA=\begin{pmatrix} (10\quad 15)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (10\quad 15)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (10\quad 15)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix} \\ (70\quad 90)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (70\quad 90)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (70\quad 90)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix} \\ (120\quad 110)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (120\quad 110)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (120\quad 110)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-75 & -1600 & 2400\\ -150 & -10000 & 15300\\ 850 & -13600 & 21800\end{pmatrix}$$

٣) لا يمكن حساب الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى هو ٢ بينما عدد صفوف الثانية هو ٣.

نظرية ٣: ضرب المصفوفات تجميعي ولكنه ليس تبديليا.

مثال ١٦: باستخدام نتائج الفقرتين ١ و ٢ من المثال ١٥ يمكن استنتاج أنّ:

$$AB \neq BA$$

مثال ١٧: احسب ما يلي وقارن مع الفقرة ١ من المثال ١٤:

$$A=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}-3\times 1 & -3\times -2 & -3\times 0 & -3\times 0.3\\ 1\times 1 & 1\times -2 & 1\times 0 & 1\times 0.3\\ 4\times 1 & 4\times -2 & 4\times 0 & 4\times 0.3\\ 10\times 1 & 10\times -2 & 10\times 0 & 10\times 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -0.9\\ 1 & -2 & 0 & 0.3\\ 4 & -8 & 0 & 1.2\\ 10 & -20 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)$$

مثال ١٨: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\qquad B=(3\quad 0\quad 0.5)\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ (AB)C \qquad 2)\ A(BC)$$

الحل:

$$1)\ (AB)C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -0.5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 12 & 10\end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من هذا المثال وبأن العملية تجميعية:

$$A(BC)=(AB)C=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 12 & 10\end{pmatrix}$$

نظرية ٤: جمع المصفوفات توزيعي بالنسبة لضربهما، أي أنّ:

$$(A+B)C=AC+BC$$
$$A(B+C)=AB+AC$$

وهذا بالنسبة لثلاث مصفوفات A و B و C من الرتب المواتية لهذه العمليات.

منقول المصفوفة:

تعريف ١٠: منقول مصفوفة A من الرتبة $m\times n$ هو المصفوفة A^t من الرتبة $n\times m$ ، بحيث صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى .

مثال ١٩: احسب منقول كلا من مصفوفات المثال ١٨.

الحل:

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0.5\end{pmatrix} \qquad C^t=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

٥. مصفوفات خاصة:

المصفوفة المربعة:

تعريف ١١: تكون المصفوفة A مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها. في هذه الحالة، يمكن أن نتكلم عن محدد المصفوفة ونرمز له بالرمز $\det(A)$..

مثال ٢٠: احسب محدد كلا من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-(-1)=1$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ -2 & 0\end{matrix}=-2+0+0-(-12)-0-0=10$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{matrix}\right|\begin{matrix}0 & 1\\ -5 & 3\\ 6 & 1\end{matrix}=0+0-20-72-0-15=-107$$

بينما لا يمكن حساب $\det(E)$ لأن E ليست مصفوفة مربعة.

نظرية ٥: محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

مثال ٢١: نعتبر مصفوفات المثال ٢٠. احسب المحددات التالية:

$$1)\ \det(AB)\qquad 2)\ \det(BA)\qquad 3)\ \det(CD)\qquad 4)\ \det(DC)$$

الحل:

لا نحتاج إلى حساب ضرب المصفوفات لأن المطلوب هو حساب المحددات فقط. نستخدم نتائج المثال ٢٠:

$$1)\ \det(AB)=\det(A)\times\det(B)=1\times -5=-5$$
$$2)\ \det(BA)=\det(B)\times\det(A)=-5\times 1=-5$$
$$3)\ \det(CD)=\det(C)\times\det(D)=10\times -107=-1070$$
$$4)\ \det(DC)=\det(D)\times\det(C)=-107\times 10=-1070$$

المصفوفة الشاذة:

تعريف ١٢: تكون المصفوفة المربعة شاذة إذا كان محددها يساوي صفرا.

مثال ٢٢: كل المصفوفات المربعة في المثال ٢٠ غير شاذة لأن محدداتها لا تساوي الصفر. بينما المصفوفة التالية شاذة لأن محددها يساوي الصفر:

$$F=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$$

المصفوفة القطرية:

تعريف ١٣: تكون المصفوفة المربعة قطرية إذا كانت كل عناصرها تساوي الصفر ما عدا عناصر القطر الرئيسي (النازل) التي قد تساوي الصفر أو لا.

مثال ٢٣: المصفوفات التالية قطرية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

بينما المصفوفات التالية غير قطرية:

$$E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

نظرية ٦: محدد مصفوفة قطرية هو حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي (النازل).

مثال ٢٤: احسب محددات المصفوفات القطرية الموجودة في المثال ٢٣.

الحل:

$$\det(A)=1\times 0=0$$
$$\det(B)=-2\times 1=-2$$
$$\det(C)=1\times -2\times 1=-2$$
$$\det(C)=0\times 3\times -3=0$$

مصفوفة الوحدة:

تعريف ١٤: مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، وكل عناصر قطرها الرئيسي تساوي ١.

يرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n \times n$ ، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

مثال ٢٤:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نظرية ٧: مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال ٢٥: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = A$$

مصفوفة المعاملات المرفقة:

تعريف ١٥: المعامل المرفق بالعنصر a من مصفوفة مربعة A هو محدد المصفوفة التي نتحصل عليها بحذف الصف والعمود الموافقين للعنصر a من المصفوفة A ، مضروبا في الإشارة المناسبة لموقع a (في المصفوفة A) كما هو موضح أدناه بالنسبة للمصفوفات 2×2 و 3×3 و 4×4 (وقس على ذلك):

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

في هذه الحالة، يمكن تشكيل مصفوفة المعاملات المرفقة بالترتيب الموافق لعناصرها في المصفوفة الأصلية. يرمز لها بالرمز $cofA$ ..

مثال ٢٦: احسب مصفوفة المعاملات المرفقة لكل مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ cofA=\begin{pmatrix}+0 & -2\\ -(-1) & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$2)\ cofB=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 2 & -11\\ 12 & -6 & 3\\ -2 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

المصفوفة القرينة:

تعريف ١٦: المصفوفة القرينة لمصفوفة مربعة A هي منقول مصفوفة المعاملات المرفقة.

يرمز لها بالرمز $adjA$.

مثال ٢٧: احسب المصفوفة القرينة لكل من مصفوفات المثال ٢٦.

الحل:

$$1)\ adjA=(cofA)^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$2)\ adjB=(cofB)^t=\begin{pmatrix}-14 & 12 & -2\\ 2 & -6 & -4\\ -11 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

٦. مقلوب المصفوفة :

تعريف ١٧: مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} - إن وجدت – بحيث حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أنّ:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

نظرية ٨: إذا كان محدد مصفوفة مربعة A لا يساوي صفرا فإنّها تقبل مقلوبا وحيدا هو حاصل قسمة مصفوفتها القرينة على محددها، أي أنّ:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det(A)}$$

مثال ٢٨: احسب مقلوب كلا من مصفوفات المثال ٢٦.

الحل:

١) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة ١ من المثال ٢٦:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

٢) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -8 + 12 - 6 - 16 - 6 - 6 = -30 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة ٢ من المثال ٢٦:

$$B^{-1} = \frac{adjB}{\det(B)} = \frac{\begin{pmatrix} -14 & 12 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \\ -11 & 3 & 7 \end{pmatrix}}{-30} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{11}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

مثال ٢٩: احسب مقلوب المصفوفات التالية:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 10\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad 3)\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad 4)\ D=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 0 & 4\end{matrix}=5+0-24-0-(-4)-0=-15\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب المعاملات المرافقة ومصفوفتها:

$$cofA=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -8\\ 12 & 1 & -4\\ -15 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjA=(cofA)^t=\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\ 2 & 1 & -5\\ -8 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\ 2 & 1 & -5\\ -8 & -4 & 5\end{pmatrix}}{-15}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1\\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{3}\\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

٢) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1&-2&10\\0&2&5\\0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&10\\0&2&5\\0&0&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-2\\0&2\\0&0\end{matrix}=0+0+0-0-0-0=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

٣) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب المعاملات المرافقة ومصفوفتها:

$$cofC=\begin{pmatrix}+4&-3\\-2&+1\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjC=(cofC)^t=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$C^{-1}=\frac{adjC}{\det(C)}=\frac{\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$$

٤) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(D)=\begin{vmatrix}2&-6\\1&-3\end{vmatrix}=-6-(-6)=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

مقلوب مصفوفة 2×2 **:**

نظرية 9**:** إذا كانت a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية بحيث $ad-bc\neq 0$ لا يساوي الصفر فإنّ:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{ad-bc}=\frac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}$$

أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة 2×2 عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

مثال ٣٠: أعد حساب مقلوب المصفوفات 2×2 للمثال ٢٨ و ٢٩ باستخدام النظرية 9.

الحل:

١) محدد المصفوفة لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

٢) محدد المصفوفة لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

٣) محدد المصفوفة يساوي الصفر إذن لا يوجد مقلوبا.

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-6) = 0$$

تمارين

تمرين ١: احسب كلا من المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad 5)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad 6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين ٢: استخدم التمرين ١ وخواص المحددات لحساب ما يلي:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & -10 & 35 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad 4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

تمرين ٣: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0.5 & 12 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ A-2B+C \qquad 2)\ -2C+3A \qquad 3)\ B-A+3C$$

تمرين ٤: احسب حاصل ضرب المصفوفات التالية:

$$1)\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad 4)\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

تمرين ٥: احسب مقلوب كل مصفوفة مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -6\end{pmatrix}\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad 3)\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 10 & 0\\ -3 & 14 & 0\end{pmatrix}$$

$$4)\ D=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\qquad 5)\ E=\begin{pmatrix}1 & 10 & 9 & 8\\ 2 & 11 & 12 & 7\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

تمرين ٦: لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$M=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ \det(M)\qquad 2)\ M^2=MM\qquad 3)\ M^3=MMM$$

تمرين ٧: لتكن لدينا المصفوفات التلية:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ 6 & -6\end{pmatrix}$$

اوجد المصفوفات P و Q و R بحيث:

$$1)\ P=2A+B^2\qquad 2)\ AQ+BQ=I\qquad 3)\ RA=C$$

تمرين ٨: احسب محدد المصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix}k & 2k-3\\ 2 & k-1\end{pmatrix}$$

اوجد قيم k التي من أجلها تكون المصفوفة شاذة

تمرين ٩: احسب مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

.احسب المصفوفة التالية:

$$B=A^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}A$$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

المعادلات الخطية

المعادلات الخطية

٣

الجدارة:

معرفة المعادلات الخطية والقدرة على حلها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- المعادلات الخطية من غيرها.
- حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد.
- حل المعادلات الخطية ذات مجهولين.
- حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

الوقت المتوقع للتدريب: ست ساعات.

المعادلات الخطية

درس المصريون والبابليون المعادلات الخطية منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م) والذي يعتبر المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر. وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية.

وتكمن أهمية المعادلات الخطية في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات خطية.أو على شكل معادلات يمكن تقريبها بمعادلات خطية.

١. تعريف المعادلات الخطية :

تعريف ١: تعبير خطي لمتغيرات ما هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثال ١: هذه تعابير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ -x+2.5y+3x$$
$$2)\ y+\sqrt{3}\,x-2y+z$$
$$3)\ 2x-y+3z$$

وهذه تعابير غير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$x+xy-z$$
$$x^2+x+1$$
$$\sqrt{x}+y+z$$

تعريف ٢: معادلة خطية لمجاهيل معينة هو معادلة تحتوي على تعابير خطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثال ٢: هذه معادلات خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$-x+2.5y+3x-6=z-2y+3$$
$$2x-y+3z=-2$$
$$x+3.5y=6$$

وهذه معادلات غير خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$x+xy-z=0$$
$$x^2+x+1=3$$
$$\sqrt{x}+y+z=-y+z+10$$

تعريف٣: جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت. لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثال٣: هذه جملة ٤ معادلات خطية للمجاهيل x و y و z :

$$\begin{aligned}
&-x+3y+2z=2\\
&3x-6y+z=-3\\
&2x+y-5z=10\\
&x \qquad +3z=0
\end{aligned}$$

تعريف٤: حل جملة معادلات خطية هو ايجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلا وحيدا، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لانهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لانهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة (أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين).

٢. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:.

قد مرت علينا هذه المعادلات في وحدة كثيرات الحدود ولكن في حلة خاصة وسندرس هنا حالتها العامة.

مثال٤: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

$$1)\ -x+3=2x-6 \qquad 2)\ 3.5x+4=7x-3-3.5x \qquad 3)\ 2(3-x)=-2x+6$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x-2x=-6-3$$

الخطوة الثانية: نبسّط الطرفين:

$$-3x=-9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة: المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x=\frac{-9}{-3}=3$$

٢) الخطوة الأولى:

$$3.5x - 7x + 3.5x = -3 - 4$$

الخطوة الثانية:

$$0 = -7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

٣) الخطوة الأولى:

$$6 - 2x = -2x + 6$$
$$-2x + 2x = 6 - 6$$

الخطوة الثانية:

$$0 = 0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عدد لا نهائي من الحلول.

٣. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

الحل بطريقة التعويض:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى.فنتحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حلاً وحيداً فإن للجملة حل وحيد نتحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحلة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٥: حل كلا من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\ -2x + y = 5 \qquad 2)\ -2x + y = 5 \qquad 3)\ -2x + y = 5$$
$$3x - 4y = -25 \qquad x - 0.5y = 2 \qquad x - 0.5y = -2.5$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x-4(5+2x)=-25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x-20-8x=-25$$
$$3x-8x=-25+20$$
$$-5x=-5$$
$$x=\frac{-5}{-5}=1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة إذن للجملة حل وحيد نتحصل عليه بالتعويض:

$$y=5+2x$$
$$y=5+(2\times 1)=7$$

خلاصة: حل الجملة هو:

$$x=1 \qquad y=7$$

٢) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x-0.5(5+2x)=2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x-2.5-x=2$$
$$x-x=2+2.5$$
$$0=4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

٣) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x-0.5(5+2x)=-2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x-2.5-x=-2.5$$
$$x-x=-2.5+2.5$$
$$0=0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

الحل بطريقة كرامير:

تعريف ٥: ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و b_1 و b_2 والثوابت c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية..

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

نظرية ١: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٦: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال ٥ بطريقة كرامير.

الحل:

١) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = -20 - (-25) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = 50 - 15 = 35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{35}{5} = 7$$

٢) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5 - 2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحدد x لا يساوي الصفر إذن الجملة مستحيلة الحل.

٣) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2.5 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5 - (-2.5) = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2.5 \end{vmatrix} = 5 - 5 = 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل تساوي الصفر إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٧: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $2x + 3y = 4$, $x - y = -3$ 2) $3x + 2y = 12$, $5x - 3y = 1$ 3) $2x + 8y = 4$, $x + 4y = 14$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4-(-9)=5$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{-5}=-1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-10=-19\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-36-2=-38$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3-60=-57$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-57}{-19}=3$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 14 & 4\end{vmatrix}=16-112=-96\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل.

٤. جمل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير وذلك لسهولتها.

تعريف ٦: ليكن لدينا جملة ٣ معادلات خطية ذات ٣ مجاهيل x و y و z على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z &= d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z &= d_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z &= d_3 \end{aligned}$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 و c_1 و c_2 و c_3 والثوابت d_1 و d_2 و d_3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

نظرية ٢: حل جملة المعادلات الخطية ذات ٣ مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٨: حل جمل المعادلات التالية:

$$1)\ \begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x+3y+z&=11\\ 3x+2y+2z&=13 \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x+3y+z&=11\\ -x-2y\quad&=4 \end{aligned} \qquad 3)\ \begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x+3y+z&=11\\ -x-2y\quad&=-5 \end{aligned}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\13&2\end{matrix}=36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&6\\2&11\\3&13\end{matrix}=22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=39+33+24-54-22-26=-6$$

إذن للجملة حل وحيد (لأن $D\neq 0$) هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\4&-2\end{matrix}=0+4-22-12-(-12)-0=-18\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل (لأن $D_x \neq 0$ $\quad D=0$).

$$3)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\-5&-2\end{matrix}=0-5-22-(-15)-(-12)-0=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&6\\2&11\\-1&-5\end{matrix}=0-6-10-(-11)-(-5)-0=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=-15-11-24-(-18)-(-22)-(-10)=0$$

إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول (لأن $D=D_x=D_y=D_z=0$).

٥. حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

يمكن أن نكتب أية جملة معادلات خطية على شكل معادلة مصفوفات، وذلك على الشكل التالي:

$$AU=C$$

بحيث A هي مصفوفة معاملات المجاهيل و U هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي المجاهيل و C هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي الثوابت

مثال٩: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية للمثال ٥ باستخدام المصفوفات.

الحل:

$$1)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -2.5\end{pmatrix}$$

مثال١٠: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية للمثال ٨ باستخدام المصفوفات.

الحل:.

$$1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ 13\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ 4\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ -5\end{pmatrix}$$

نظرية٣: نعتبر جملة معادلات خطية مكتوبة باستخدام المصفوفات على الشكل التالي:

$$AU=C$$

بحيث مصفوفة المعاملات A تكون مربعة، أي أن عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

إذا كان محدد المصفوفة A ، أي محدد الجملة، لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا هو:

$$U=A^{-1}C$$

مثال١١: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال ٩ باستخدام المصفوفات:

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}{5}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 7\end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x=1 \qquad y=7$$

٢) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

٣) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

مثال ١٢: حل جملة المعادلات الخطية للمثال ١٠ باستخدام المصفوفات.

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6+3+4-9-2-4=-2 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\left(cof\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} +4 & -1 & +(-5) \\ -0 & +(-1) & -(-1) \\ +(-2) & -(-1) & +1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x=1 \qquad y=2 \qquad z=3$$

٢) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

٣) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات الخطية التالية:

1) $x-(2x+3)=\frac{x+2}{2}$ 2) $-6+2(1-x)=3x-4$ 3) $\frac{2}{x+3}=\frac{4}{1-x}$

4) $-2x+5=\frac{x-4}{2}$ 5) $5-6x+(3x-2)=-4(2+x)$ 6) $\frac{-x+2}{3+x}=-5$

تمرين ٢: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $\begin{aligned} 2x-3y&=1 \\ -x+4y&=0 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 4x+2y&=-8 \\ -x-0.5y&=2 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} -2x+4y&=0 \\ x-2y&=5 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 4x+5y&=9 \\ -x+3y&=2 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 4x-5y&=-9 \\ -8x+10y&=18 \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} 4x-5y&=-9 \\ -2x+2.5y&=0 \end{aligned}$

تمرين ٣: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ -x+2y-z&=0 \\ 2x-3y+4z&=2 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 3x+5y-z&=10 \\ -x+2y+z&=11 \\ 5x+y-3z&=-12 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} x-z&=12 \\ -3x+2y&=-3 \\ -6x+2y+3z&=10 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x+2z&=13 \\ -y+z&=5 \\ x-y&=0 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} -x+2y-z&=-2 \\ x+15y-3z&=11 \\ -y+2z&=3 \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} y+z&=0 \\ x+y-z&=10 \\ x+2y&=-12 \end{aligned}$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

مفهوم الدالة ومنحناها

مفهوم الدالة ومنحناها

٤

الجدارة:

معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها.
- أنواع الدوال وتركيبها
- بعض الدوال الجبرية المشهورة
- الدوال المثلثية الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تمثيل منحنيات الدوال.

الوقت المتوقع للتدريب: إحدى عشرة ساعة.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.
ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

١. تعريف الدالة:

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول أن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y . .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

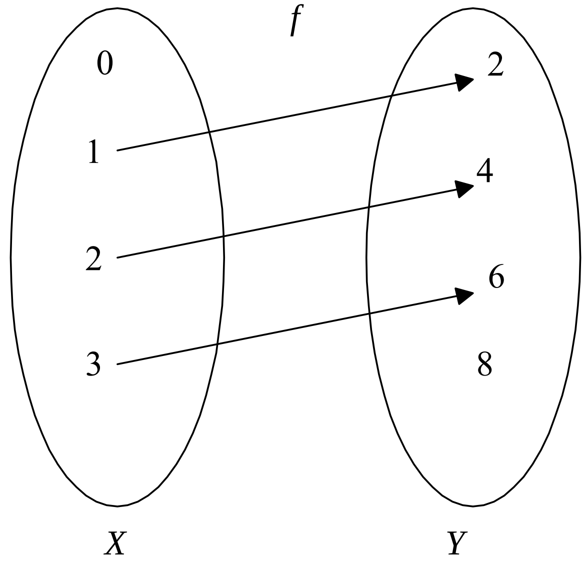
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:
$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتلي:

$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

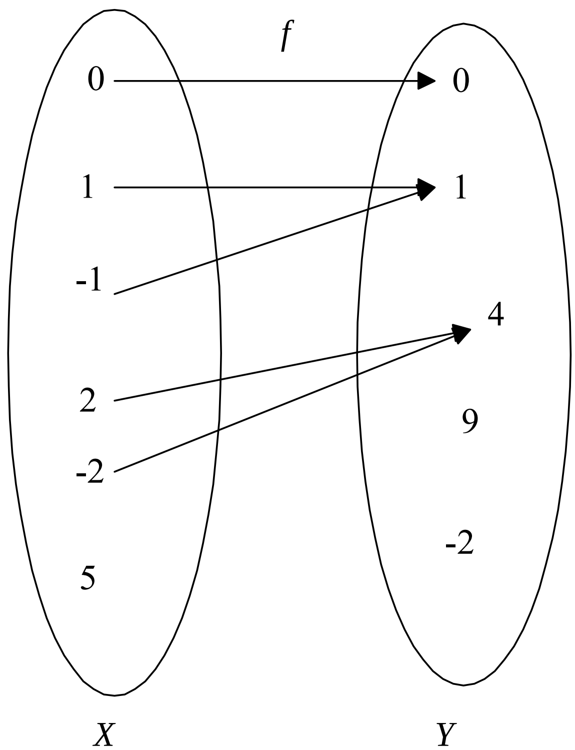
مثال٢: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X = \{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y = \{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :

العناصر 0 و 1 و -1 و 2 و -2 في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y ..

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f : X \to Y$$

حيث: $f(x) = x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ١:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال٣: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries* .:

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries* . مثلا:

$$f(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers) = Algeria$$
$$f(Cairo) = Egypt$$
$$f(London) = United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثال٤: لتكن لدينا المجموعتان السابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقة g من $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثال٥: لتكن لدينا المجموعتان السابقتان $Countries$ و والعلاقة f من $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x .

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

مثال٦: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

$$1)\ D_f = \{1,2,3\} \qquad R_f = \{2,4,6\}$$
$$2)\ D_f = \{0,1,-1,2,-2\} \qquad R_f = \{0,1,4\}$$

٣) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$
$$4)\ D_g = Cities \qquad R_g = Countries$$

مثال٧: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين أن f دالة. ٢) حدد مجال f ومداها. ٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2 \times 5 = 10$ و $f(14) = 2 \times 14 = 28$.

مثال ٨: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن g دالة. ٢) حدد مجال g ومداها. ٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأن: $y = 2 \times \frac{y}{2} = 2\left(\frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{y}{2}\right)$

مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$.

٣) $g(2.5) = 2 \times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2 \times 5 = 10$.

تعريف ٣: تكون دالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

$$1)\ D_f = D_g$$
$$2)\ x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

مثال ٩: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٣ و ٤ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين ٣ و ٤ من المثال ٦ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = Capitals \neq D_g = Cities$$

مثال ١٠: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٧ و ٨ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين ٧ و ٨ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = \mathrm{N} \neq D_g = \mathrm{R}$$

مثال ١١: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

حيث: $g(x)=x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال ٧. هل $f=g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف ٣) متحقق وهو: $D_f=\mathrm{N}=D_g$

فإن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3\in D_f=\mathrm{N}$ لكن $f(3)=2\times 3=6\neq g(3)=3^2=9$

ومنه فإن: $f\neq g$.

٢. أنواع الدوال:

تعريف ٤: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تطبيق إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، أي أن مجالها هو مجموعة المنطلق: $D_f=X$.

مثال ١٢: حدد في كل من الأمثلة ١ إلى ٤ و ٧ و ٨ و ١١، هل الدالة المعتبرة تطبيق أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا الدالة $f:\{0,1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

$D_f=\{1,2,3\}\neq\{0,1,2,3\}$ (أي أن $f(0)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٢: لدينا الدالة $f:\{0,1,-1,2,-2,5\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

$D_f=\{0,1,-1,2,-2\}\neq\{0,1,-1,2,-2,5\}$ (أي أن $f(5)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٣: لدينا الدالة $f:Cities\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x .

$D_f=Capitals\neq Cities$ (أي أن مثلا $f(Abha)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٤: لدينا الدالة $g:Cities\to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x.

$D_g=Cities$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ٧: لدينا الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

$D_f=\mathrm{N}$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ٨: لدينا الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

$D_g=\mathrm{R}$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ١١: لدينا الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

$D_g=\mathrm{N}$ إذن الدالة تطبيق.

نظرية ١: إذا كانت $f: X \to Y$ دالة فإن $f: D_f \to Y$ تطبيق.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تطبيق باستبدال مجموعة المنطلق بمجال الدالة (أي أننا نحذف من مجموعة المنطلق العناصر التي ليس لها صورة في مجموعة الوصول).

مثال ١٣: حوّل الدوال التي ليست تطبيقات في المثال ١٢ إلى تطبيقات.

الحل:

في المثال ١: الدالة $f:\{1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$ هي تطبيق..

في المثال ٢: الدالة $f:\{0,1,-1,2,-2\} \to \{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$ هي تطبيق .

في المثال ٣: الدالة $f: Capitals \to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x.هي تطبيق..

تعريف ٥: نقول عن دالة $f: X \to Y$ إنها تباين (أو تطبيق متباين) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل صورة لها أصل واحد، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة فإن: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ و $D_f = X$.

مثال ١٣: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تباينات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f:\{1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\} \to \{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$ ..

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f: Capitals \to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

هذا التطبيق متباين لأن كل بلد له عاصمة واحدة فقط: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g: Cities \to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $g(Riyadh) = Saudi\ Arabia = g(Abha)$.

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

.هذا التطبيق متباين لأن:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^{\,2}} = \sqrt{x_2^{\,2}} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \ .$$

تجدر الإشارة إلى أننا حذفنا القيمة المطلقة لأن x_1 و x_2 هما عددان طبيعيان إذن موجبان وقيمتهما المطلقة تساويهما.

تعريف ٦: نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تغامر (أو تطبيق غامر) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة الوصول له أصل واحد على الأقل، أي أن: $R_f = Y$ و $D_f = X$.

مثال ١٤: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تغامرات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f : \{1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$ حيث $f(x) = 2x$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f = \{2,4,6\} \neq \{2,4,6,8\}$..

مثلا: العنصر ٨ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه زوجيا)..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f : \{0,1,-1,2,-2\} \to \{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x) = x^2$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f = \{0,1,4\} \neq \{0,1,4,9,-2\}$..

مثلا: العنصر ٩ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه مربعا تاما).

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f : Capitals \to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له عاصمة : $R_f = Countries$..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g : Cities \to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

.هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له مدينة واحدة على الأقل : $R_g = Countries$..

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $f(x) = 2x$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\} \neq \mathrm{N}$..

مثلا: العنصر ١ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس زوجيا..

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $g(x) = 2x$.

.هذا التطبيق غامر لأن: $R_f = \mathrm{R}$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $g(x) = x^2$.

.هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f = \{1,4,9,16,25,\cdots\} \neq \mathrm{N}$.

مثلا العنصر ٢ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس مربعا تاما..

نظرية ٢: إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فإن $f:D_f\to R_f$ تغامر.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تغامر بحذف العناصر التي ليس لها صورة من مجموعة المنطلق والعناصر التي ليس لها أصل من مجموعة الوصول.

مثال ١٥: حول الدوال التي ليست تغامرات في المثال ١٤ إلى تغامرات.

الحل:

في المثال ١: التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر.

في المثال ٢: التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4\}$ حيث $f(x)=x^2$ هو غامر.

في المثال ٧: التطبيق $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر. .

في المثال ١١: التطبيق $g:\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$ هو غامر.

.**تعريف ٧:** نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تقابل (أو تطبيق متقابل) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط ولكل عنصر من مجموعة الوصول أصل واحد فقط، أي أن الدالة تباين وتغامر في آن واحد.

مثال ١٦: باستخدام نتائج الأمثلة ١٣ و ١٤ و ١٥، اذكر التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة..

الحل:

التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة هي:

١) $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$.

٣) $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

٧) $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$.

٨) $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

١١) $g:\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$.

والعلة في ذلك أنها كلها تباينات وتغامرات.

مثال ١٧: لتكن لدينا الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث: $f(x)=x^2$. هل هذه الدالة تقابل؟

الحل:

هذه الدالة ليست تقابل لأنها ليست تباين: مثلا $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$.

خلاصة: تكون علاقة f من X إلى Y :

١) دالة إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٢) تطبيقا إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $D_f = X$

٣) تباينا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $D_f = X$

و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٤) تغامرا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $D_f = X$

و $R_f = Y$

٥) تقابلا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $D_f = X$

و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $R_f = Y$

٣. تركيب الدوال:

تعريف ٨: لتكن لدينا الدالتان $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$

تركيب هاتين الدالتين $g \circ f$ هو دالة من X إلى Z بحيث: $g \circ f(x) = g[f(x)]$

مثال ١٨: احسب في كل مما يلي $g \circ f$ و $f \circ g$:

1) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x + 1 \qquad g : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ g(x) = x^2$

2) $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = x + 1 \qquad g : \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ g(x) = x^2$

3) $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = \sqrt{x} \qquad g : \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ g(x) = x^2$

4) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sqrt{x} \qquad g : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ g(x) = x^2$

الحل:

١) $g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x+1] = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = x^2 + 1$

٢) $g \circ f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x+1] = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f \circ g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = x^2 + 1$

٣) $g \circ f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 = x$

$f \circ g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \sqrt{x^2} = |x| = x$ لأن x عدد طبيعي وقيمته المطلقة تساويه.

٤) $g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 = x$

$f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \sqrt{x^2} = |x|$ لأن x عدد حقيقي وقيمته المطلقة قد لا تساويه.

نظرية ٣: تركيب الدوال تجميعي ولكن ليس تبديليا.

مثال ١٩: نعتبر الدوال المعرفة في المثال ١٨.

١) $f \circ g \neq g \circ f$ لأن: $g \circ f(x) = x^2 + 2x + 1 \neq f \circ g(x) = x^2 + 1$ من أجل $x = 1$ مثلا.

٢) $f \circ g \neq g \circ f$ لأن: $g \circ f(x) = x^2 + 2x + 1 \neq f \circ g(x) = x^2 + 1$ من أجل $x = 1$ مثلا.

٣) $f \circ g = g \circ f$ لأن: $g \circ f(x) = x = f \circ g(x)$.

٤) $f \circ g \neq g \circ f$ لأن: $g \circ f(x) = x \neq f \circ g(x) = |x|$ من أجل $x = -1$ مثلا.

٤. الدوال العددية:

تعريف ٩: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ٢٠: كل الدوال المعرفة في المثال ١٨ هي دوال عددية.

منحنى الدالة:

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x, y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة...

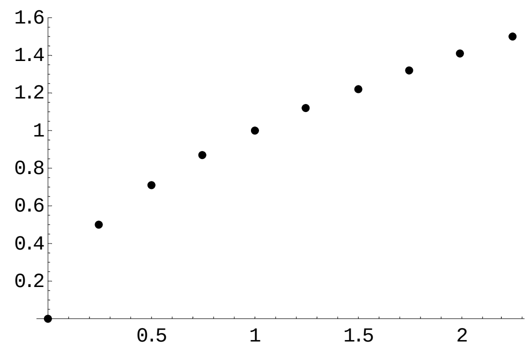
مثال ٢١: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل:

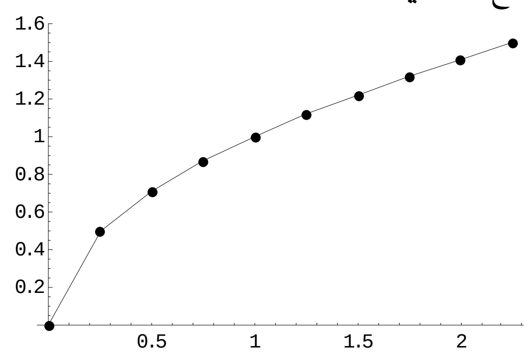
الخطوة الأولى: انشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيما كلما كان التمثيل أدق..
وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

تعريف ١٠: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

مثال ٢٢: هل الدوال المعرفة في المثال ١٨ فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

١) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$

$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x)-g(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

٢) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$ ..

الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.

٣) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$ ..

٤) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأن مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

الدوال الجبرية:

تعريف ١١: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.(المطولة)

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

الدالة الثابتة: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

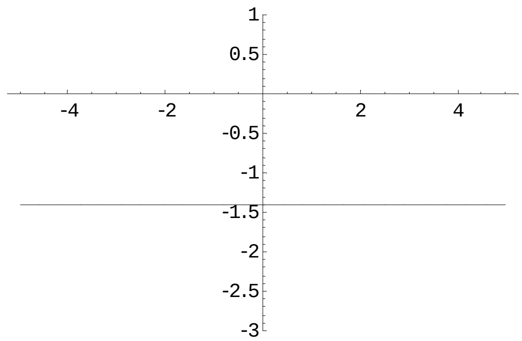
٢) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

٣) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ٢٣: مثّل الدالة التالية: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}$.

الحل:



الدالة الخطية: وهي من الشكل: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = f(x) = a\,x$ و $a \neq 0$ عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

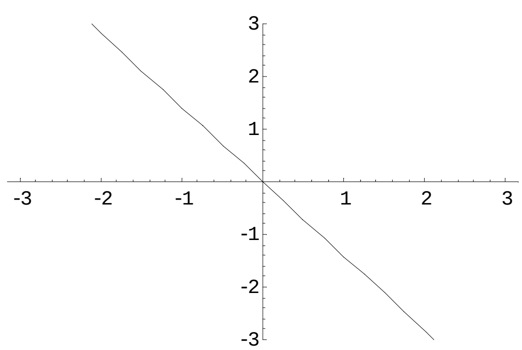
٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) $f(-x) = -f(x)$ أي أنها فردية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ..

مثال ٢٤: مثّل الدالة التالية: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}\,x$.

الحل:



الدالة التآلفية: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=ax+b$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عددان حقيقيان ثابتان أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

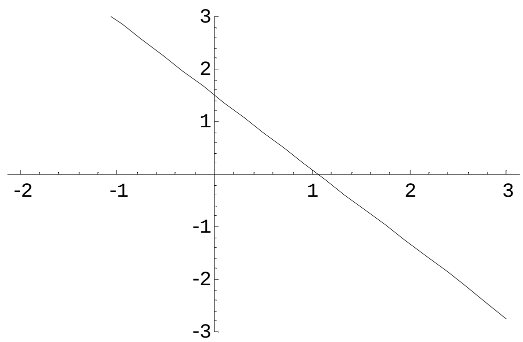
٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل لا يمر من نقطة المبدأ..

مثال ٢٥: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$.

الحل:



الدالة التربيعية: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثير حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

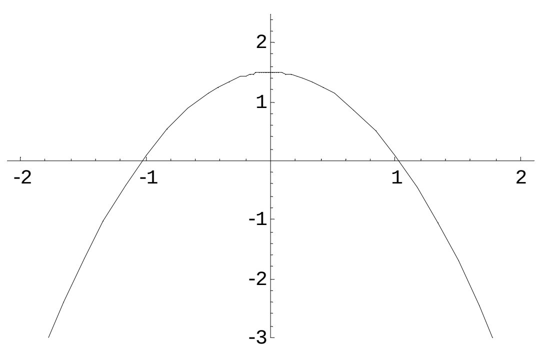
٢) $R_f\neq\mathrm{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$.

مثال ٢٦: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$.

الحل:



الدالة الكسرية: وهي عبارة عن كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود.

وسنأخذ كمثال لها الدالة: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}-\{1\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

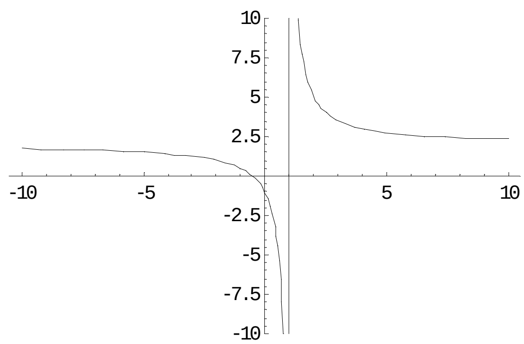
٢) $R_f=\mathrm{R}-\{2\}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي مكافئ لا يمر من نقطة المبدأ.

مثال ٢٧: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

الحل:



الدوال غير الجبرية:

أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

والدوال المثلثية هي الدوال التي تكون معرّفة على الزوايا. ونقيس الزوايا بوحدة الراديان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها °) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi=180°$

ومن الدوال المثلثية: دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع ودالة قوس الجيب ودالة قوس جيب التمام ودالة قوس الظل..

تعريف ١٢: نقول عن دالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ إنها دورية ذات دور $p>0$ إذا كان: $f(x+p)=f(p)$ من أجل أي عدد حقيقي $x\in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم.

تعريف ١٣: إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحد زاويتيه غير القائمتين فإن:

$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضاع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

دالة الجيب: ويرمز لها بالرمز: $\sin$ وهي من الشكل: $\sin : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \sin x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

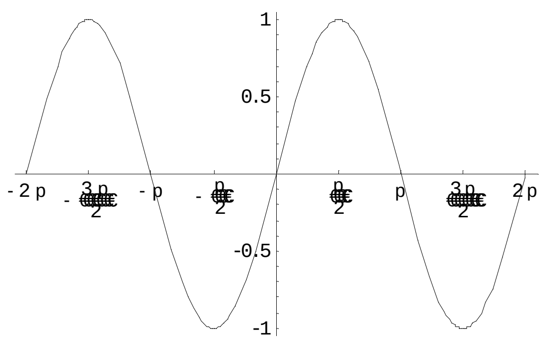
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \sin x \le 1$ ...

٣) $\sin(-x) = -\sin x$ أي أنها فردية.

٤) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ.



دالة جيب التمام: ويرمز لها بالرمز: $\cos$ وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

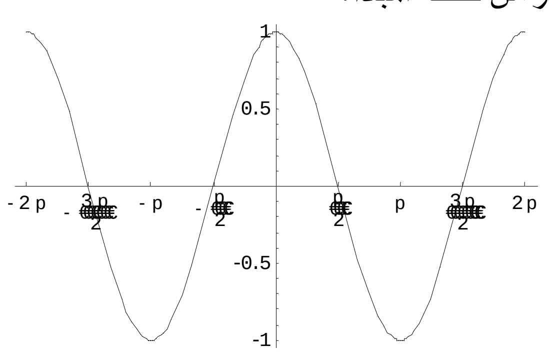
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$ ...

٣) $\cos(-x) = \cos x$ أي أنها زوجية.

٤) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ.



دالة الظل: ويرمز لها بالرمز: $\tan$ وهي من الشكل: $\tan : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. .

ومن خواصها:

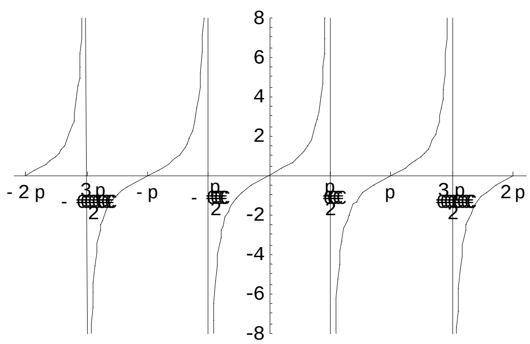
١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) $\tan(-x) = -\tan x$ أي أنها فردية.

٤) $\tan(x+\pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

٥) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ.



دالة ظل التمام: ويرمز لها بالرمز: $\cot$ وهي من الشكل: $\cot : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. .

ومن خواصها:

١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

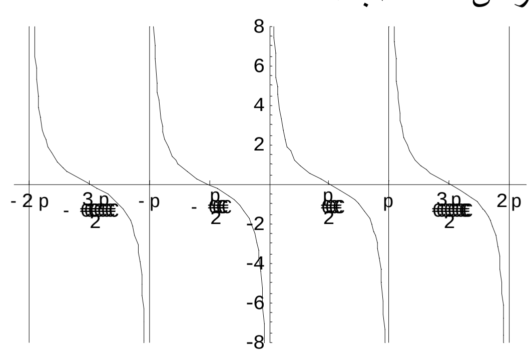
٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) $\cot(-x) = -\cot x$ أي أنها فردية.

٤) $\tan(x+\pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

٥) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

٦) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ.



دالة القاطع: ويرمز لها بالرمز: sec وهي من الشكل: $\sec : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ . .

ومن خواصها:

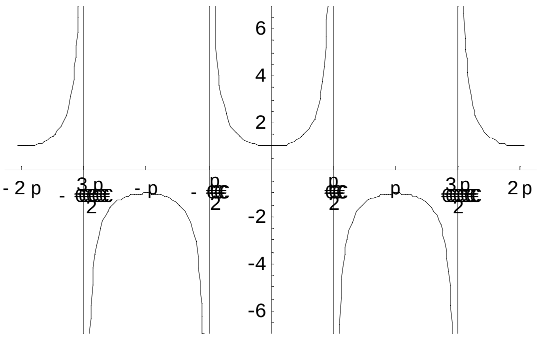
١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \mathrm{R} - (-1,1) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $\sec x \geq 1$ أو $\sec x \leq -1$.

٣) $\sec(-x) = \sec x$ أي أنها زوجية.

٤) $\sec(x+2\pi) = \sec x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها ب"موجة" لا تمر من نقطة المبدأ.



دالة قاطع التمام: ويرمز لها بالرمز: csc وهي من الشكل: $\csc : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ . .

ومن خواصها:

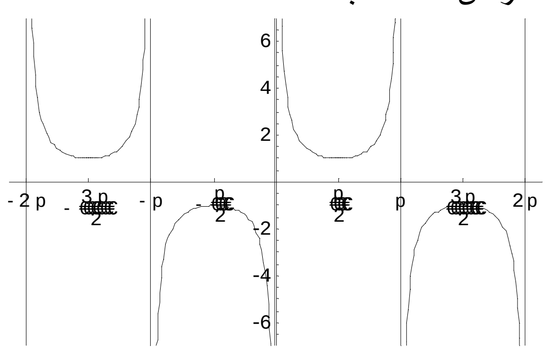
١) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \mathrm{R} - (-1,1) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $\csc x \geq 1$ أو $\csc x \leq -1$.

٣) $\csc(-x) = -\csc x$ أي أنها فردية..

٤) $\csc(x+2\pi) = \csc x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها ب"موجة" لا تمر من نقطة المبدأ.



دالة قوس الجيب: ويرمز لها بالرمز: $\arcsin$ وهي من الشكل: $\arcsin : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \arcsin x$ إذا كان $x = \sin y$. (ويرمز لها في الآلة الحاسبة بالرمز: $\sin^{-1}$ ونتحصل عليها باستخدام *shift* sin) .

ومن خواصها:

٠) $\arcsin(\sin x) = x$ و $\sin(\arcsin x) = x$ أي أنها تعطينا زاوية الجيب.

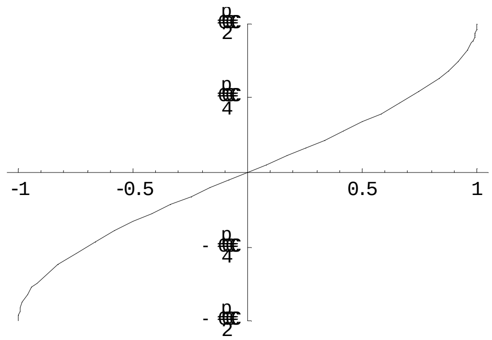
١) $D_f = [-1,1]$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ أي أنهـا لا تقبـل كـل القـيم الحقيقية ولكن: $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$.

٣) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ أي أنها فردية.

٤) ليست دورية. .

٥) يمكن تمثيلها بمنحنى يمر من نقطة المبدأ.



دالة قوس جيب التمام: ويرمـز لهـا بـالرمز: $\arccos$ وهـي مـن الشـكل: $\arccos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \arccos x$ إذا كان $x = \cos y$. (ويرمز لها في الآلة الحاسبة بالرمز: $\cos^{-1}$ ونتحصل عليها باستخدام *shift* cos) .

ومن خواصها:

٠) $\arccos(\cos x) = x$ و $\cos(\arccos x) = x$ أي أنها تعطينا زاوية جيب.التمام

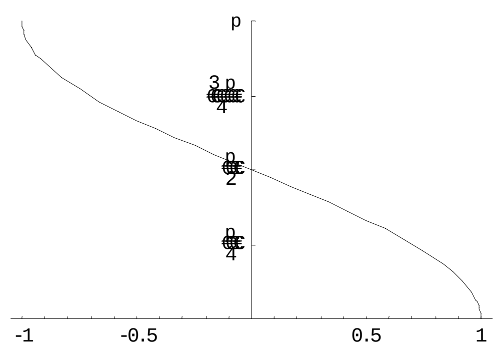
١) $D_f = [-1,1]$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [0, \pi]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $0 \le \arccos x \le \pi$.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ليست دورية. .

٥) يمكن تمثيلها بمنحنى لا يمر من نقطة المبدأ.



دالة قوس الظل: ويرمز لها بالرمز: arctan وهي من الشكل: $\arctan : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \arctan x$ إذا كان $x = \tan y$. (ويرمز لها في الآلة الحاسبة بالرمز: $\tan^{-1}$ ونتحصل عليها باستخدام $shift$ tan) .

ومن خواصها:

٠) $\arctan(\tan x) = x$ و $\tan(\arctan x) = x$ أي أنها تعطينا زاوية الظل

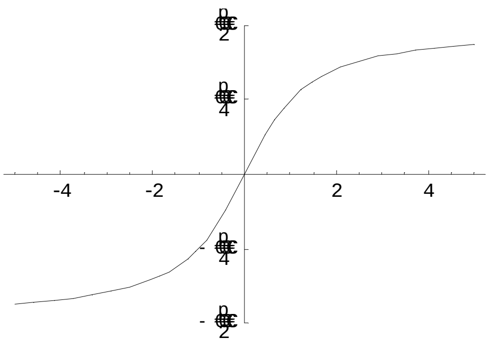
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$.

٣) $\arctan(-x) = -\arctan x$ أي أنها فردية.

٤) ليست دورية. .

٥) يمكن تمثيلها بمنحنى يمر من نقطة المبدأ.



الدوال الأسية: وهي من الشكل: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = f(x) = b^x$ و $b \neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [0, \infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x > 0$ ..

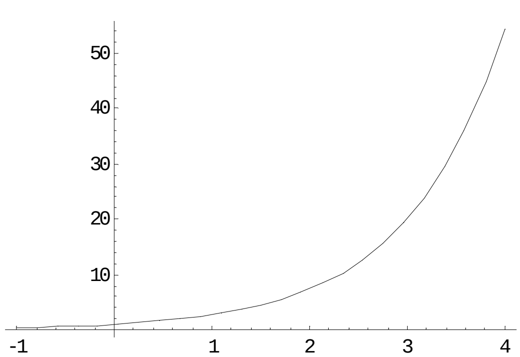
٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الإستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y = e^x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٨: مثل الدالة التالية: $y = e^x$.

الحل:



الدوال اللوغاريتمية: ويرمز لها بالرمز: $\log_b$ وهي من الشكل: $\log_b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \log_b x$ إذا كان $x = b^y$ و $b \neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

٠) $\log_b(b^x) = x$ و $b^{\log_b x} = x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

١) $D_f = (0, \infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x = \log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

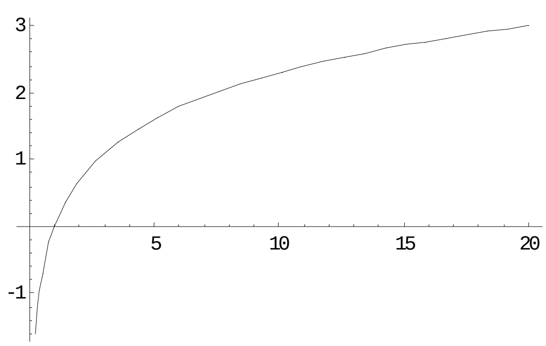
٥) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

٦) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x = e^{x \ln b}$.

٧) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٩: مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



تمارين

تمرين ١: بين أن كلا من العلاقات التالية دوال:

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها:

تمرين ٣: حدد نوع كل دالة مما يلي (تطبيق، تباين، تغامر، تقابل):

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

$$5)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{x^3+1}{x^2} \qquad 6)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+1}$$

تمرين ٤: احسب تركيب $g\circ f$ و $f\circ g$ في كل مما يلي:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin x \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x} \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^x \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1 \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

$$5)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x| \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

تمرين ٥: هل كلا مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين ٦: ما هو وجه الشبه بين الدوال الثابتة والخطية والتآلفية ووجه الفرق بينهم؟

تمرين ٧: صنف كلا من الدوال السابقة في التمارين ١ إلى ٥ (من بين الدوال العددية المشهورة):

تمرين ٨: مثل كلا من الدوال التالية:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين ٩: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \sin\frac{\pi}{2} \qquad 2)\ \cos 60^\circ \qquad 3)\ \tan\frac{\pi}{4} \qquad 4)\ \cot 56^\circ$$

$$5)\ \arcsin(-1) \qquad 6)\ \arccos\frac{1}{2} \qquad 7)\ \arctan 10 \qquad 8)\ \arcsin(-0.13)$$

تمرين ١٠: بين أن الدوال التالية دورية وحدد دورها:

$$1)\ \sin 2x \qquad 2)\ \cos\frac{1}{4}x \qquad 3)\ \sin 2x - \cos\frac{1}{4}x \qquad 4)\ \tan x + 2\cos 3x$$

تمرين ١١: ما هو وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين ١٢: ما هو وجه الشبه بين دالتي الظل وظل التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين ١٣: ما هو وجه الشبه بين دالتي قوس الجيب و قوس جيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين ١٤: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_3 10 \qquad 2)\ \log_2 16 \qquad 3)\ \log_{10} = \log 360 \qquad 4)\ \log_{\sqrt{2}} 50$$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية ١

الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية

٥

الجدارة:

معرفة الدوال الأسية واللوغاريتمية والقدرة على حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الأسس والعمليات عليها.
- الدوال الأسية.
- الدوال اللوغاريتمية.
- حل المعادلات الأسية.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.

الوقت المتوقع للتدريب: تسع ساعات.

الدوال الأسية واللوغاريتمية

يبدو أن محمد الخوارزمي هو أول من استخدم اللوغاريتمات ووضع لها جداول في بداية القرن الثالث الهجري (بداية القرن التاسع الميلادي)، رغم أن البعض يعتبرون الأسكتلندي *John Napier* هو الأول وذلك في سنة ١٦١٤م. وقد يعود أصل كلمة لوغاريتم إلى تغيير وقع في ترجمة اسم الخوارزمي إلى اللاتينية.

وتستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية في كثير من القوانين التجريبية، كما تستخدم اللوغاريتمات خاصة لتمثيل كميات كبيرة جدا.

١. الأسس:

تعريف١: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

n مرة $\quad x^n = x \times x \times \cdots \times x$

بينما: $\quad x^0 = 1$

مثال١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^2 \qquad 2)\ (-2)^4 \qquad 3)\ (-3)^3$$

الحل:

$$1)\ 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$2)\ (-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16$$
$$3)\ (-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

تعريف٢: ليكن لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال٢: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{-2} \qquad 2)\ (-2)^{-4} \qquad 3)\ (-3)^{-3}$$

الحل:

$$1)\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$2)\ (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

$$3)\ (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$$

تعريف ٣: ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد طبيعي n بحيث: $y = x^n$ فإن الجذر من الدرجة n للعدد y أو أس y $\frac{1}{n}$ هو كما يلي:

إذا كان n فرديا فإنه: $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} = x$

وإذا كان n زوجيا فإنه: $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} = |x|$

أي أن الجذر هو العملية العكسية للرفع إلى أس طبيعي.

يسمى الجذر من الدرجة ٢ بالجذر التربيعي ويرمز له بالرمز $\sqrt{\ }$ ، بينما يسمى الجذر من الدرجة ٣ بالجذر التكعيبي.

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب جذر من درجة زوجية للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال ٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}} \qquad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}} \qquad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}$$

الحل:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$2)\ (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$3)\ 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

تعريف ٤: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد كسري $\frac{p}{q}$ حيث q موجب فيكون x أس $\frac{p}{q}$ هو:

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

مثال ٤: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} \qquad 2)\ 16^{-\frac{5}{4}} \qquad 3)\ 25^{\frac{3}{2}}$$

الحل:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$2)\ 16^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$3)\ 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

نظرية ١: كل عدد حقيقي يمكن تقريبه بعدد كسري.

مثال ٥: قرّب كلا مما يلي بأعداد كسرية:

$$1)\ \sqrt{2} \qquad 2)\ \pi \qquad 3)\ \pi^2$$

الحل:

$$1)\ \sqrt{2} \cong 1.4142 = \frac{14142}{10000}$$

$$2)\ \pi \cong 3.1416 = \frac{31416}{10000}$$

$$3)\ -\pi^2 \cong -9.8696 = -\frac{98696}{10000}$$

تعريف ٥: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد حقيقي α بحيث العدد الكسري التقريبي له هو $\frac{p}{q}$ و q موجب فيكون x أس α هو:

$$x^{\alpha} \cong x^{\frac{p}{q}}$$

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب الرفع إلى أس عدد حقيقي غير كسري أو عدد كسري مقامه عدد زوجي للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال ٦: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{\sqrt{2}} \qquad 2)\ 2^{\pi}$$

الحل:

$$1)\ 3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.14142} \cong 4.728$$

$$2)\ 2^{\pi} \cong 2^{3.1416} \cong 8.825$$

نظرية ٢: ليكن لدينا أربعة أعداد حقيقية x و y و α و β فإن:

$$1)\ \left(x^{\alpha}\right)^{\beta}=x^{\alpha\beta}$$

$$2)\ (x\,y)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}$$

$$3)\ x^{\alpha}x^{\beta}=x^{\alpha+\beta}$$

$$4)\ \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}=x^{\alpha-\beta}$$

مثال ٧: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5x\,y^4}\qquad 2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right)\qquad 3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2}\qquad 4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6$$

الحل:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5x\,y^4}=\frac{10}{5}\frac{x^3}{x}\frac{y^2}{y^4}=2x^{3-1}y^{2-4}=2x^2y^{-2}=\frac{2x^2}{y^2}$$

$$2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right)=\frac{3^2x^2}{2^2y^2}\frac{5x^3}{y^4}\frac{2^2y^3}{3\times5x^4}=\frac{3^2\times5\times2^2x^5y^3}{2^2\times3\times5x^4y^6}=3x\,y^{-3}=\frac{3x}{y^3}$$

$$3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2}=x^{6-5}y^{-2-(-3)}z^{-1-2}=x\,y\,z^{-3}=\frac{x\,y}{z^3}$$

$$4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6=\left(\frac{\left(xy^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(-x^2y\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^6=\frac{\left(xy^3\right)^{\frac{6}{3}}}{\left(-x^2y\right)^{\frac{6}{4}}}=\frac{\left(xy^3\right)^2}{\left(-x^2y\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2y^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2(-y)^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=x^{2-3}(-y)^{6-\frac{3}{2}}=x^{-1}(-y)^{\frac{9}{2}}=\frac{\left(\sqrt{-y}\right)^9}{x}$$

تجدر الإشارة إلى أننا وضعنا $-y$ تحت الجذر لأنه موجب وهذا يستنتج من $\sqrt[4]{-x^2y}$ فلابد أن يكون ما تحت جذر من درجة زوجية موجبا لكن x^2 موجب إذن $-y$ موجب أيضا.

٢. الدوال الأسية:

تعريف ٦: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي x فإن الدالة الأسية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = f(x) = b^x$

مثال ٨: حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y = f(x) = 2^{-x} \qquad 2)\ y = f(x) = \pi^x \qquad 3)\ y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

١) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

٢) الأساس هو π .

٣) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية ٣: ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ b^u > 0$$
$$2)\ b^u b^v = b^{u+v}$$
$$3)\ \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v}$$
$$4)\ \left(b^u\right)^v = b^{uv}$$

مثال ٩: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} \qquad 2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} \qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$

$$= \frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x = \left((9)^{\frac{1}{x}}\,9\right)^x = 9\left(9^x\right)$$

٣. الدوال اللوغاريتمية:

تعريف ٧: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = f(x) = \log_b x$ بحيث: $x = b^y$.

أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_b b^x = x$ و $b^{\log_b x} = x$)

نظرية ٤: ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ y = \log_b u \Rightarrow u > 0$$
$$2)\ \log_b(uv) = \log_b|u| + \log_b|v|$$
$$3)\ \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|$$
$$4)\ \log_b\left(u^v\right) = v\log_b|u|$$
$$5)\ \log_b 1 = 0$$
$$6)\ \log_b b = 1$$

مثال ١٠: اكتب كلا مما يلي باستخدام لوغاريتم واحد:

$$1)\ \log_3(x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x \qquad 2)\ -\log_2 6 + \log_2(3x-2) + \log_2(3-2x)$$

الحل:

$$1)\ \log_3(x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x = \log_3(x+3) + \log_3 10^2 - \log_3 x = \log_3\left(\frac{(x+3)\times 10^2}{x}\right)$$
$$= \log_3\left(\frac{100(x+3)}{x}\right)$$
$$2)\ -\log_2 6 + \log_2(3x-2) + \log_2(3-2x) = \log_2\left(\frac{(3x-2)(3-2x)}{6}\right)$$

حالات خاصة:

تعريف ٨: اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم ذات الأساس ١٠.

يرمز له بالرمز: $\log x$

مثال ١١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log 100 + \log 0.001 - \log 1000 \qquad 2)\ -\log 0.1 - \log 0.01 + \log 1000$$

الحل:

$$1)\ \log 100 + \log 0.001 - \log 1000 = \log 10^2 + \log 10^{-3} - \log 10^3 = 2 - 3 - 3 = -4$$
$$2)\ -\log 0.1 - \log 0.01 + \log 1000 = -\log 10^{-1} - \log 10^{-2} + \log 10^3 = -(-1) - (-2) + 3 = 6$$

تعريف ٩: اللوغاريتم الطبيعي (أو النيبيري) هو اللوغاريتم ذات الأساس e حيث:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828$$

يرمز له بالرمز: $\ln x$

و كانت هناك جداول لحساب اللوغاريتمات الطبيعية ولكن يمكن استخدام الآلة الحاسبة أيضا.

مثال ١٢: باستخدام الآلة الحاسبة، قرّب كلا مما يلي:

$$1)\ \ln 10 \qquad 2)\ \ln 3.15 \qquad 3)\ \ln\sqrt{2}$$

الحل:

$$1)\ \ln 10 \cong 2.3026$$
$$2)\ \ln 3.15 \cong 1.1474$$
$$3)\ \ln\sqrt{2} \cong 0.3466$$

نظرية ٥: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن:

$$1)\ b^x = e^{x\ln b}$$

$$2)\ \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بالانتقال من أي أساس إلى الأساس الطبيعي سواء بالنسبة للدوال الأسية أو الدوال اللوغاريتمية.

مثال ١٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2 10 \qquad 2)\ \log_5\sqrt{2} \qquad 3)\ \log_{\sqrt{2}} 5$$

الحل:

$$1)\ \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong \frac{2.3026}{0.6931} = 3.322$$

$$2)\ \log_5\sqrt{2} = \frac{\ln\sqrt{2}}{\ln 5} \cong \frac{0.3466}{1.6094} = 0.215$$

$$3)\ \log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln\sqrt{2}} \cong \frac{1.6094}{0.3466} = 4.643$$

٤. المعادلات الأسية واللوغاريتمية :

نظرية ٦ : ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v فإن:

$$\ln u = \ln v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بحل المعادلات الأسية وكذا المعادلات اللوغاريتمية بعد تغيير أساس اللوغاريتمات إلى الأساس الطبيعي إن احتيج لذلك.

مثال ١٤ : حل المعادلات التالية:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \qquad 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 9^{2x-3} \qquad 3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \frac{25}{16}$$

الحل:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \Leftrightarrow \ln 5^{3x-2} = \ln 4 \Leftrightarrow (3x-2)\ln 5 = \ln 4 \Leftrightarrow 3x-2 = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\ln 4}{\ln 5} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\ln 4}{\ln 5} + 2}{3} \cong 0.954$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 9^{2x-3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = \ln 9^{2x-3} \Leftrightarrow (3x+1)\ln\frac{1}{2} = (2x-3)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} = 2x\ln 9 - 3\ln 9 \Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2} - 2x\ln 9 = -3\ln 9 - \ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(3\ln\frac{1}{2} - 2\ln 9) = -3\ln 9 - \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\ln 9 - \ln\frac{1}{2}}{(3\ln\frac{1}{2} - 2\ln 9)} \cong 0.018$$

$$3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \ln\frac{25}{16} \Leftrightarrow (x^2+2x-1)\ln\frac{4}{5} = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1 = \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1 = \frac{-2\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1+2 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

مثال ١٥: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x = 2 \qquad 2)\ \ln(3x-5) = 5 \qquad 3)\ \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 2$$

الحل:

$$1)\ \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = e^2 \cong 7.389$$

$$2)\ \ln(3x-5) = 5 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln e^5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = e^5 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = e^5 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5+5}{3} \cong 51.138$$

$$3)\ \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3) = \ln 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 - 2 = 0 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 8 = 0 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

نحل المعادلة: $x^2 + x - 8 = 0$.

نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - (4 \times 1 \times -8) = 33 > 0$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{33}}{2\times 1} \cong -3.372$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{33}}{2\times 1} \cong 2.372$$

نتحقق من شروط المعادلة (المتراجحتان):

بالنسبة للجذر الأول: $x_1 - 2 \le 0$ إذن الجذر مرفوض.

بالنسبة للجذر الثاني: $x_2 - 2 > 0$ و $x_2 + 3 > 0$ إذن الجذر مقبول..

خلاصة: الحل هو: $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \cong 2.372$

مثال ١٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_3 x = 2 \qquad 2)\ \log_6(3x-5) = 5 \qquad 3)\ \log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1$$

الحل:

$$1)\ \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

$$2)\ \log_6(3x-5) = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-5)}{\ln 6} = 5 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = 5\ln 6 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln 6^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 6^5 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-5 = 7776 \Leftrightarrow 3x = 7776+5 \Leftrightarrow x = \frac{7781}{3} = 2593.67$$

$$3)\ \log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-2)(x+3) = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x-2)(x+3)}{\ln 2} = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3) = \ln 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

وقد مرت علينا هذه المعادلة في الفقرة ٣ من المثال ١٥، والحل هو: $x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2\times 1} \cong 2.372$.

مثال ١٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ x^4 = 2 \qquad 2)\ x^{4.1} = 2 \qquad 3)\ \sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5}$$

الحل:

$$1)\ x^4 = 2 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 2 \Leftrightarrow 4\ln|x| = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{\ln 2}{4} \Leftrightarrow \ln|x| = \ln e^{\frac{\ln 2}{4}} \Leftrightarrow |x| = e^{\frac{\ln 2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{e^{\ln 2}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2} \cong \pm 1.189$$

$$2)\ x^{4.1} = 2 \Leftrightarrow \ln x^{4.1} = \ln 2 \Leftrightarrow 4.1\ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 2}{4.1} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 2}{4.1}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 2}{4.1}}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{4.1}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{4.1}} \cong 1.184$$

$$3)\ \sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{0.2}x^{3.5} = 3 \Leftrightarrow x^{3.7} = 3 \Leftrightarrow \ln x^{3.7} = \ln 3 \Leftrightarrow 3.7\ln x = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{3.7} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 3}\right)^{\frac{1}{3.7}} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{3.7}} \cong 1.346$$

تجدر الإشارة إلى أننا استخدمنا القيمة المطلقة في الفقرة ١ لأن الرفع إلى أس ٤ معرف بالنسبة للأعداد السالبة ولم نستخدمها في الفقرتين ٢ و ٣ لأن الرفع إلى أس ٤,١ و ٣,٥ غير معرف إلا للأعداد الموجبة وذلك لمّا نستخدم الأعداد الحقيقية..

تمارين

تمرين ١: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{x^2 y^6}}{\sqrt[6]{x^2 y^{18}}} \qquad 2)\ \frac{2x^{-5}}{15y^3}\times\frac{3^2x^3y}{10} \qquad 3)\ \left(\frac{-2x^6z}{x^{-2}y^3}\right)^3\left(\frac{y^6}{10x^2y^3z}\right)^2$$

$$4)\ \frac{x^{4.1}y^{3.2}}{z^2}\times\left(\frac{z^{5.3}x^{-2.7}}{y^{4.6}}\right)^{1.7} \qquad 5)\ \frac{\sqrt[4]{x^{2.4}z^{1.2}}}{\sqrt[3]{y^{5.4}x^{1.5}}}\times\frac{\sqrt{y^{4.2}z^{-5}}}{\sqrt[6]{x^{1.8}}}$$

تمرين ٢: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{2^{x+1}}{2^{x-1}} \qquad 2)\ \frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}}\times\frac{2^{x+3}}{8} \qquad 3)\ \left(e^{2x}\right)^3\left(1-2e^x\right)^2$$

تمرين ٣: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1) \qquad 2)\ \ln(x+3)-2\ln(1-x)+4\ln x$$

$$3)\ \log_5 e^{x+1}-\log_3 e^{2-x} \qquad 4)\ \log_9(x^2-1)-\log_3(x+1)$$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4 \qquad 2)\ x^{-5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}$$

تمرين ٥: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^{2.5}}=4 \qquad 2)\ x^{-0.5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^{1.6}=x^{-2}$$

تمرين ٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2^x=5^{x+1} \qquad 2)\ \sqrt[x]{3}=3^x \qquad 3)\ \frac{2^{-x+2}}{6^x}=3^{x+1} \qquad 4)\ e^{x+3}=5$$

تمرين ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x+\ln(2-x)=0 \qquad 2)\ -\ln(x+3)+\ln(-x+2)=\ln 4 \qquad 3)\ \ln(x+6)=\ln(2x-1)$$

تمرين ٨: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_2 x+\log_2(2-x)=0 \qquad 2)\ -\log_3(x+5)+\log_3(-x+1)=\log_3 2$$

$$3)\ \log(x-6)=\log(-2x+3) \qquad 4)\ \log x=3 \qquad 5)\ \log_2(x+3)+\log_5(x-2)=0$$

المملكـة العربيـة السـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

الأعداد المركبة

الأعداد المركبة

٦

الجدارة:

معرفة الأعداد المركبة والقدرة على حل المعادلات باستخدام الأعداد المركبة.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الأعداد المركبة.
- أداء العمليات عليها.
- الشكلين القطبي والأسي لها.
- ايجاد جذور عدد مركب.
- حل المعادلات الجبرية باستخدام الأعداد المركبة.

الوقت المتوقع للتدريب: اثنتا عشرة ساعة.

الأعداد المركبة

يعتبر السويسري *Leonhard Euler* هو أول من استخدم الأعداد المركبة في القرن الثامن عشر الميلادي.
و من تطبيقاتها: حل المعادلات الجبرية و التحليل المتجهي والدوائر الكهربائية.

١. تعريف الأعداد المركبة:

هناك كثير من المعادلات الجبرية التي لا يمكن حلها باستخدام الأعداد الحقيقية. مثلا المعادلة التالية:

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$

فلحلّها نحتاج إلى توسيع مفهوم الجذر التربيعي إلى الأعداد السالبة مع الحفاظ على خصائصه، . فيمكن أن نكتب حينئذ:

$$x=-\sqrt{-1} \text{ أو } x=\sqrt{-1}$$

لكن لا يمكن أن نحسب العدد $\sqrt{-1}$ فنضع مكانه رمزا خاصا.

تعريف١: العدد التخيلي j هو أحد جذري المعادلة $x^2+1=0$ ، أي أن:

$$j=\sqrt{-1}$$

والجذر التربيعي هنا هو جذر موسع إلى الأعداد السالبة ويحافظ على خصائصه ما أمكن.

مثال١: احسب ما يلي:

$$1)\ j^2 \qquad 2)\ j^3 \qquad 3)\ j^4$$

الحل:

$$1)\ j^2=(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$2)\ j^3=(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})=(-1)\,j=-j$$
$$3)\ j^4=(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=(-1)(-1)=1$$

تعريف٢: نقول عن z إنه عدد مركب إذا أمكن كتابته على الشكل التالي:

$$z=a+b\,j$$

حيث أن a و b عددان حقيقيان و $j=\sqrt{-1}$. يسمى هذا الشكل بالشكل الديكارتي ويرمز له كالتالي:

$$.\ z=(a,b)$$

يسمى العدد a بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ويسمى العدد b بالجزء التخيلي له. ونرمز لهما كما يلي:

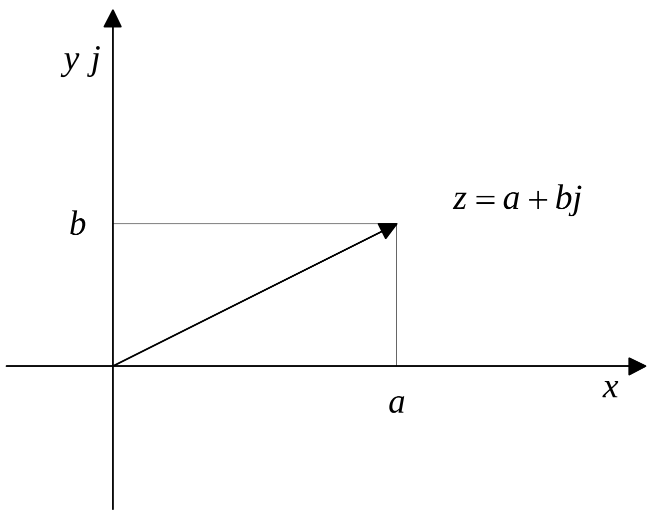
$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

كما .نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\Re$

.

تجدر الإشارة إلى أن عددين مركبين يتساويان إذا تساوت كل من الأجزاء الحقيقية و التخيلية لهما.

يمكن تمثيل الأعداد المركبة بنقاط أو متجهات فيما يسمى بمستوى أرجاند كما هو موضح في الشكل التالي:



مثال ٢: هل الأعداد التالية أعدادا مركبة؟

$$1)\ -3 \qquad 2)\ 0 \qquad 3)\ \sqrt{2}\, j \qquad 4)\ -2+0.5\, j \qquad 5)\ \sqrt{-16}$$

الحل:

نعم كلها أعداد مركبة لأن:

$$1)\ -3 = -3 + 0\, j = (-3,0)$$
$$2)\ 0 = 0 + 0\, j = (0,0)$$
$$.3)\ \sqrt{2}\, j = 0 + \sqrt{2}\, j = (0, \sqrt{2})$$
$$4)\ -2 + 0.5\, j = (-2, 0.5)$$
$$5)\ \sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4\, j = (0,4)$$

٢. عمليات على الأعداد المركبة:

جمع الأعداد المركبة وطرحها:

تعريف ٣: جمع عددين مركبين (أو طرحهما من بعض) هو عدد مركب نتحصل عليه بجمع الأجزاء الحقيقية مع بعض (أو طرحها من بعض) وبجمع الأجزاء التخيلية مع بعض (أو طرحها من بعض).

مثال ٣: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$1)\ (-2+3j)+(7-4j) \qquad 2)\ (-3+2j)-(5-j) \qquad 3)\ -(1-2j)$

$4)\ (5-j)+1-2j \qquad 5)\ -2+6j+(8-6j) \qquad 6)\ -(4-j)+(4-j)$

الحل:

$1)\ (-2+3j)+(7-4j)=-2+3j+7-4j=(-2+7)+(3-4)j=5-j$

$2)\ (-3+2j)-(5-j)=-3+2j-5+j=(-3-5)+(2+1)j=-8+3j$

$3)\ -(1-2j)=-1+2j$

$4)\ (5-j)+1-2j=5-j+1-2j=(5+1)+(-1-2)j=6-3j$

$5)\ -2+6j+(8-6j)=-2+6j+8-6j=(-2+8)+(6-6)j=6+0j=6$

$6)\ -(4-j)+(4-j)=-4+j+4-j=(-4+4)+(1-1)j=0+0j=0$

نظرية ١: جمع الأعداد المركبة تبديلي وتجميعي.

ضرب الأعداد المركبة:

تعريف ٤: ضرب عددين مركبين هو عدد مركب نتحصل عليه بضرب كل حد من حدود الأول في كل حد من حدود الثاني (مثل ضرب كثيرات الحدود).

مثال ٤: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$1)\ (-2+3j)(7-4j) \qquad 2)\ (-3+2j)(5-j) \qquad 3)\ (1-2j)(5-j)$

$4)\ (5-j)(1-2j) \qquad 5)\ (-2+6j)(8-6j) \qquad 6)\ (4-j)^2=(4-j)(4-j)$

الحل:

$$1)\ (-2+3j)(7-4j)=(-2\times 7)+(-2\times -4j)+(3j\times 7)+(3j\times -4j)$$
$$=-14+8j+21j-12j^2=-14+29j+12=-2+29j$$

$$2)\ (-3+2j)(5-j)=(-3\times 5)+(-3\times -j)+(2j\times 5)+(2j\times -j)$$
$$=-15+3j+10j-2j^2=-15+13j+2=-13+13j$$

$$3)\ (1-2j)(5-j)=(1\times 5)+(1\times -j)+(-2j\times 5)+(-2j\times -j)$$
$$=5-j-10j+2j^2=5-11j-2=3-11j$$

$$4)\ (5-j)(1-2j)=(5\times 1)+(5\times -2j)+(-j\times 1)+(-j\times -2j)$$
$$=5-10j-j+2j^2=5-11j-2=3-11j$$

$$5)\ (-2+6j)(8-6j)=(-2\times 8)+(-2\times -6j)+(6j\times 8)+(6j\times -6j)$$
$$=-16+12j+48j-36j^2=-16+60j+36=20+60j$$

$$6)\ (4-j)^2=(4-j)(4-j)=(4\times 4)+(4\times -j)+(-j\times 4)+(-j\times -j)$$
$$=16-4j-4j+j^2=16-8j-1=15-8j$$

نظرية ٢: ضرب الأعداد المركبة تبديلي وتجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع والطرح.

مثال ٥: ليكن لدينا الأعداد المركبة التالية:

$$z_1 = -2+3j \qquad z_2 = 4-j \qquad z_3 = -1-18j$$

احسب كلا مما يلي:

$$1)\ z_1z_2 + z_2z_3 \qquad 2)\ z_2z_3 - z_1z_3$$

الحل:

$$1)\ z_1z_2 + z_2z_3 = z_2(z_1+z_3) = (4-j)(-2+3j+(-1-18j)) = (4-j)(-2+3j-1-18j)$$
$$= (4-j)(-3-15j) = -12-60j+3j+15j^2 = -12-57j-15 = -27-57j$$

$$2)\ z_2z_3 - z_1z_3 = z_3(z_2-z_1) = (-1-18j)(4-j-(-2+3j)) = (-1-18j)(4-j+2-3j)$$
$$= (-1-18j)(6-4j) = -6+4j-108j+72j^2 = -6-104j-72 = -78-104j$$

قسمة عدد مركب على عدد حقيقي:

تعريف ٥: قسمة عدد مركب على عدد حقيقي لايساوي الصفر هو عدد مركب نتحصل عليه بقسمة كلا من جزئه الحقيقي والتخيلي على هذا العدد.

مثال ٦: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{-2+3j}{2} \qquad 2)\ \frac{4-2j-6+3j}{-2} \qquad 3)\ \frac{4-2j}{-2}+\frac{-6+3j}{-2}$$

الحل:

$$1)\ \frac{-2+3j}{2} = -1+1.5j$$
$$2)\ \frac{4-2j-6+3j}{-2} = -2+j+3-1.5j = 1-0.5j$$
$$3)\ \frac{4-2j}{-2}+\frac{-6+3j}{-2} = -2+j+3-1.5j = 1-0.5j$$

مرافق عدد مركب:

تعريف ٦: مرافق عدد مركب $z = a+bj$ هو العدد المركب $\bar{z} = a-bj$.

مثال ٧: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \overline{(-3+j)}+2+3j \qquad 2)\ \overline{(\pi-\sqrt{7}j)}+5-2j \qquad 3)\ (2-j)\overline{(-1-j)}$$

الحل:

$$1)\ \overline{(-3+j)}+2+3j=-3-j+2+3j=-1+2j$$

$$2)\ \overline{(\pi-\sqrt{7}j)}+5-2j=\pi+\sqrt{7}j+5-2j=(\pi+5)+(\sqrt{7}-2)j$$

$$3)\ (2-j)\overline{(-1-j)}=(2-j)(-1+j)=-2+2j+j-j^2=-2+3j+1=-1+3j$$

نظرية ٣: ضرب عدد مركب لا يساوي الصفر في مرافقه هو عدد حقيقي (موجب).

مثال ٨: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \overline{(-3+j)}(-3+j) \qquad 2)\ (\sqrt{2}-2j)\overline{(\sqrt{2}-2j)}$$

الحل:

$$1)\ \overline{(-3+j)}(-3+j)=(-3-j)(-3+j)=9-3j+3j-j^2=9+1=10$$

$$2)\ (\sqrt{2}-2j)\overline{(\sqrt{2}-2j)}=(\sqrt{2}-2j)(\sqrt{2}+2j)=(\sqrt{2})^2-(2j)^2=2-4j^2=2+4=6$$

قسمة الأعداد المركبة:

تعريف ٧: قسمة عدد مركب على آخر لا يساوي الصفر هو عدد مركب نتحصل عليه بضرب كلا من العددين في مرافق المقسوم عليه (المقام) ثم أداء القسمة.

مثال ٩: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{1}{-3-4j} \qquad 2)\ \frac{5+j}{2-3j} \qquad 3)\ \frac{2-3j}{6-j}$$

الحل:

$$1)\ \frac{1}{-3-4j}=\frac{1}{-3-4j}\times\frac{-3+4j}{-3+4j}=\frac{-3+4j}{(-3)^2-(4j)^2}=\frac{-3+4j}{9-16j^2}=\frac{-3+4j}{9+16}=\frac{-3+4j}{25}=-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}j$$

$$2)\ \frac{5+j}{2-3j}=\frac{5+j}{2-3j}\times\frac{2+3j}{2+3j}=\frac{10+15j+2j+3j^2}{2^2-(3j)^2}=\frac{10+17j-3}{4-9j^2}=\frac{7+17j}{4+9}=\frac{7+17j}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}j$$

$$3)\ \frac{2-3j}{6-j}=\frac{2-3j}{6-j}\times\frac{6+j}{6+j}=\frac{12+2j-18j-3j^2}{6^2-j^2}=\frac{12-16j+3}{36+1}=\frac{15-16j}{37}=\frac{15}{37}-\frac{16}{37}j$$

٣. الشكل القطبي لعدد مركب:

تعريف ٨: طول عدد مركب $z = a + b\,j$ هو الجذر التربيعي لمجموع مربعي كلا من جزئه الحقيقي والتخيلي، أي هو:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال ١٠: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ |-3-4j| \qquad 2)\ |-3+4j| \qquad 3)\ |2-3j+4+5j| \qquad 4)\ |2-3j|+|4+5j|$$

الحل:

$$1)\ |-3-4j| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$2)\ |-3+4j| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$3)\ |2-3j+4+5j| = |6+2j| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$4)\ |2-3j|+|4+5j| = \sqrt{2^2+(-3)^2} + \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{13}+\sqrt{41}$$

نظرية ٤: مربع طول عدد مركب هو حاصل ضرب العدد المركب في مرافقه.

مثال ١١: اكتب ما يلي على الشكل الديكارتي: $(3-2j)(3+2j)$

الحل:

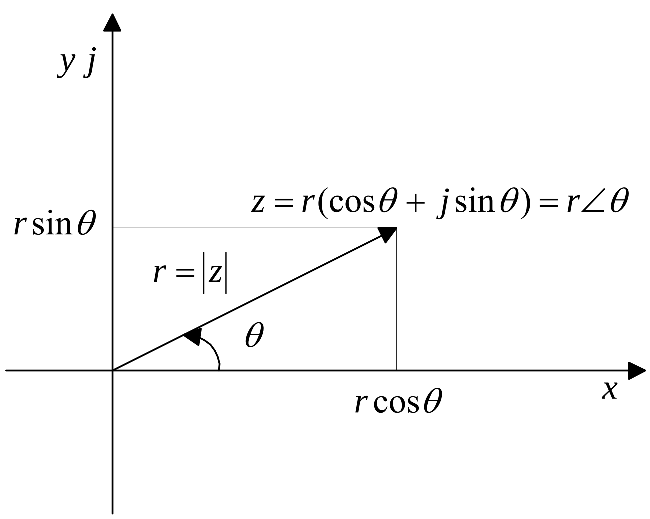
$$(3-2j)(3+2j) = (3-2j)\overline{(3-2j)} = |3-2j|^2 = 3^2+2^2 = 13$$

تعريف ٩: الشكل القطبي لعدد مركب z هو كالتالي:

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

حيث أن r هو طول z ، وهو طول المتجه الذي يمثله، و θ هي الزاوية المحصورة بين محور السينات والمتجه الذي يمثل z و تسمى زاوية z ..

يرمز للشكل القطبي السابق بالرمز: $z = r\angle\theta$



مثال ١٢: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ 0\angle 0^\circ \qquad 2)\ 2\angle 30^\circ \qquad 3)\ 3\angle 135^\circ \qquad 4)\ 0.5\angle -90^\circ$$

الحل:

$$1)\ 0\angle 0^\circ = 0(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) = 0(1+1j) = 0$$

$$2)\ 2\angle 30^\circ = 2(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} + j$$

$$3)\ 3\angle 135^\circ = 3(\cos 135^\circ + j\sin 135^\circ) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$4)\ 0.5\angle -90^\circ = 0.5(\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)) = 0.5(0-1j) = -0.5j$$

نظرية ٥: يمكن كتابة أي عدد مركب $z = a + bj$ على شكل قطبي $z = r\angle\theta$ باتباع الخطوات التالية

الخطوة الأولى: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ...

الخطوة الثانية: إذا كان $r = 0$ فإن $\theta = 0$ و $z = 0\angle 0$ (أو $z = 0\angle\theta$. حيث θ تأخذ أية قيمة)

إذا كان $r \neq 0$ و $b \geq 0$ فإن $\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$..

إذا كان $r \neq 0$ و $b < 0$ فإن $\theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$..

(أي أن الزاوية θ والجزء التخيلي b من الإشارة نفسها) حيث أن الدالة $\arccos$ هي الدالة العكسية للدالة $\cos$ على الفترة $[0,180^\circ]$ ، ويمكن الحصول عليها في الآلة الحاسبة بالضغط على *shift* ثم $\cos$ (أي $\cos^{-1}$).

مثال ١٣: اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ 5+5j \qquad 2)\ -\sqrt{3}-j$$

الحل:

$$1)\ a=5 \quad b=5$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$b=5\geq 0 \Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=\arccos\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)=45^\circ$$
$$5+5j=r\angle\theta=5\sqrt{2}\angle 45^\circ$$
$$2)\ a=-\sqrt{3} \quad b=-1$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$
$$b=-1<0 \Rightarrow \theta=-\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=-\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-150^\circ$$
$$-\sqrt{3}-j=r\angle\theta=2\angle-150^\circ$$

قانون دوموافر: إذا كان n. عددا صحيحا فإن:

$$(r\angle\theta)^n=r^n\angle n\theta$$

و من تطبيقات هذا القانون أننا إذا أردنا أن نرفع عددا مركبا إلى أس صحيح فإننا نكتبه على شكله القطبي ثم نطبق القانون.

مثال ١٤: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (1+j)^{10} \qquad 2)\ (1+j)^{-10}$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نكتب العدد $1+j$ على الشكل القطبي:

$$a=1, b=1$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\neq 0$$
$$b=1\geq 0 \Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^\circ$$

ومنه فإن:

$$1+j=r\angle\theta=\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

الخطوة الثانية: نطبق قانون دوموافر:

$$(1+j)^{10}=(\sqrt{2}\angle 45^\circ)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\angle 10\times 45^\circ=32\angle 450^\circ$$

الخطوة الثالثة: نرجع إلى الشكل الديكارتي:

$$(1+j)^{10} = 32\angle 450° = 32(\cos 450° + j\sin 450°) = 32(0+1j) = 32j$$

٢) نستخدم نتيجة الخطوة الأولى من الفقرة ١ لهذا المثال:

$$1+j = \sqrt{2}\angle 45°$$

الخطوة الثانية: نطبق قانون دوموافر:

$$(1+j)^{-10} = (\sqrt{2}\angle 45°)^{-10} = (\sqrt{2})^{-10}\angle -10\times 45° = \frac{1}{32}\angle -450°$$

الخطوة الثالثة: نرجع إلى الشكل الديكارتي:

$$(1+j)^{-10} = \frac{1}{32}\angle -450° = \frac{1}{32}(\cos(-450°) + j\sin(-450°)) = \frac{1}{32}(0-1j) = -\frac{1}{32}j$$

قانون أولير: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ، أي أن: $r\angle\theta = re^{j\theta}$.

ويسمى هذا الشكل الأخير بالشكل الأسي.

ومن فوائد هذا القانون أن أداء الحسابات على الشكل الأسي سهلة.

مثال ١٥: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (2\angle 30°)(0.5\angle 90°) \qquad 2)\ \frac{2(\cos 30° + j\sin 30°)}{0.5(\cos 90° + j\sin 90°)}$$

الحل:

$$1)\ (2\angle 30°)(0.5\angle 90°) = 2e^{j30°}\times 0.5e^{j90°} = 2\times 0.5\times e^{j30°+j90°} = 1\times e^{j120°}$$

$$= 1(\cos 120° + j\sin 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$2)\ \frac{2(\cos 30° + j\sin 30°)}{0.5(\cos 90° + j\sin 90°)} = \frac{2e^{j30°}}{0.5e^{j90°}} = \frac{2}{0.5}e^{j30°-j90°} = 4e^{-j60°}$$

$$= 4(\cos(-60°) + j\sin(-60°)) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 2 - 2\sqrt{3}j$$

٤. جذور عدد مركب:

نظرية ٦: إذا كان n. عددا صحيحا لا يساوي الصفر فإن:

$$(r\angle\theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\angle\frac{\theta}{n} + \frac{360° k}{n} \qquad k = 0,\dots,n-1$$

أي أن هناك n جذرا نتحصل عليها بالتعويض عن قيم k كل مرة.

مثال ١٦: حل المعادلات التالية في $\Re$:

$$1)\ z^3 = -j \qquad 2)\ z^6 = 1$$

الحل:

١) يمكن أن نكتب المعادلة كما يلي:

$$z = (-j)^{\frac{1}{3}}$$

إذن حل المعادلة يرجع إلى إيجاد الجذور التكعيبية للعدد $-j$.

الخطوة الأولى: نكتب العدد $-j$ على الشكل القطبي:

$$a = 0 \quad b = -1$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \neq 0$$
$$b = -1 < 0 \Rightarrow \theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) = -\arccos\left(\frac{0}{1}\right) = -90°$$
$$-j = r\angle\theta = 1\angle -90°$$

الخطوة الثانية: نطبق النظرية ٦:

$$z = (-j)^{\frac{1}{3}} = (1\angle -90°)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}}\angle -\frac{90°}{3} + \frac{360°k}{3} \qquad k = 0,1,2$$
$$z = 1\angle -30° + 120°k \qquad k = 0,1,2$$

الخطوة الثالثة: نعوض عن قيم k :

$$k = 0 : z_0 = 1\angle -30° + (120° \times 0) = 1\angle -30° = 1(\cos(-30°) + j\sin(-30°)) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$
$$k = 1 : z_1 = 1\angle -30° + (120° \times 1) = 1\angle 90° = 1(\cos 90° + j\sin 90°) = 0 + 1j = j$$
$$k = 2 : z_2 = 1\angle -30° + (120° \times 2) = 1\angle 210° = 1(\cos 210° + j\sin 210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

١) يمكن أن نكتب المعادلة كما يلي:

$$z = 1^{\frac{1}{6}}$$

إذن حل المعادلة يرجع إلى إيجاد الجذور السادسة للعدد 1.

الخطوة الأولى: نكتب العدد 1 على الشكل القطبي:

$$a=1 \quad b=0$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1\neq 0$$
$$b=0\geq 0 \Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=\arccos\left(\frac{1}{1}\right)=0°$$
$$1=r\angle\theta=1\angle 0°$$

الخطوة الثانية: نطبق النظرية ٦:

$$z=1^{\frac{1}{6}}=(1\angle 0°)^{\frac{1}{6}}=1^{\frac{1}{6}}\angle\frac{0°}{6}+\frac{360°k}{6} \qquad k=0,1,2,3,4,5$$
$$z=1\angle 60°k \qquad k=0,1,2,3,4,5$$

الخطوة الثالثة: نعوض عن قيم k :

$$k=0: z_0=1\angle 60°\times 0=1\angle 0°=1(\cos 0°+j\sin 0°)=1$$
$$k=1: z_1=1\angle 60°\times 1=1\angle 60°=1(\cos 60°+j\sin 60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=2: z_2=1\angle 60°\times 2=1\angle 120°=1(\cos 120°+j\sin 120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=3: z_3=1\angle 60°\times 3=1\angle 180°=1(\cos 180°+j\sin 180°)=-1$$
$$k=4: z_4=1\angle 60°\times 4=1\angle 240°=1(\cos 240°+j\sin 240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=5: z_5=1\angle 60°\times 5=1\angle 300°=1(\cos 300°+j\sin 300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

٥. حل المعادلات الجبرية باستخدام الأعداد المركبة:

سنكتفي بالمعادلات من الدرجة الثانية.ذات معاملات حقيقية.

نظرية ٧: لتكن لدينا المعادلة التالية ذات المجهول z و المعاملات الحقيقية $a\neq 0$ و b و c :

$$az^2+bz+c=0$$

الجذور تعطى بالقانون التالي:

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال ١٧: حل كلا من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة::

$$1)\ z^2+2z+5=0 \qquad 2)\ z^2+z+1=0 \qquad 3)\ z^2-z-6=0$$

الحل:

$1)\ a=1 \quad b=2 \quad c=5$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{2^2-(4\times1\times5)}}{2\times1}=\frac{-2-\sqrt{-16}}{2}$$

$$=\frac{-2-\sqrt{16\times-1}}{2}=\frac{-2-(\sqrt{16}\times\sqrt{-1})}{2}=\frac{-2-4j}{2}=-1-2j$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{2^2-(4\times1\times5)}}{2\times1}=\frac{-2+\sqrt{-16}}{2}$$

$$=\frac{-2+\sqrt{16\times-1}}{2}=\frac{-2+(\sqrt{16}\times\sqrt{-1})}{2}=\frac{-2+4j}{2}=-1+2j$$

$2)\ a=1 \quad b=1 \quad c=1$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{1^2-(4\times1\times1)}}{2\times1}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3\times-1}}{2}=\frac{-1-(\sqrt{3}\times\sqrt{-1})}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{1^2-(4\times1\times1)}}{2\times1}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3\times-1}}{2}=\frac{-1+(\sqrt{3}\times\sqrt{-1})}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$3)\ a=1 \quad b=-1 \quad c=-6$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-(4\times1\times-6)}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{25}}{2}$$

$$=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-(4\times1\times-6)}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}$$

$$=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

تمارين

تمرين ١: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ 2j-(-2+5j)-(-2j) \qquad 2)\ (4-4j)+6j-(0.5-3j) \qquad 3)\ \frac{1}{3}+2j-(2+\frac{1}{3}j)$$

تمرين ٢: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (2-3j)(-5+6j) \qquad 2)\ (2-j+3-5j)\overline{(2-4j)} \qquad 3)\ (-2-j)^2+(3+j)\overline{(-1-j)}$$

تمرين ٣: احسب طول كلا مما يلي ومرافقه:

$$1)\ 2-j \qquad 2)\ -3+j \qquad 3)\ (1+3j)(4-2j)$$

تمرين ٤: ليكن لدينا الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=2+j \qquad z_2=-3-j$$

اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (z_1+\overline{z_2})^2-jz_1 \qquad 2)\ -z_2+(2-j)z_1z_2$$

تمرين ٥: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{3+j}{1-j} \qquad 2)\ \frac{j}{(1-j)^2}+\frac{5+2j}{-j} \qquad 3)\ \frac{1-3j}{j}-\overline{(2+j)(5+2j)}$$

تمرين ٦: اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ -4 \qquad 2)\ 3j \qquad 3)\ 1-j \quad 4)\ \sqrt{2}-\sqrt{2}j$$

تمرين ٧: اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ 1+\sqrt{3}j \qquad 2)\ 2-2\sqrt{3}j \qquad 3)\ \sqrt{5}-2j \quad 4)\ 3-3j$$

تمرين ٨: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \left(1+\sqrt{3}j\right)^5 \qquad 2)\ (-2j)^7 \qquad 3)\ (2+j)^6$$

تمرين ٩: حل المعادلات التالية:

$$1)\ z^4=-16 \qquad 2)\ z^3=8j \qquad 3)\ z^5=1$$

تمرين ١٠: حل المعادلات التالية:

$$1)\ z^2+2z+3=0 \qquad 2)\ z^2+z+1=0 \qquad 3)\ z^2+2z+2=0$$

المراجع

١) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ -١٩٨٣م.

٢) علي عبد الله الدفاع، نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك، ١٩٨٧م.

3) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

4) Anders Hald, A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, John Wiley and Sons, New York, 1989.

5) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

6) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

7) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS

BAE SYSTEMS