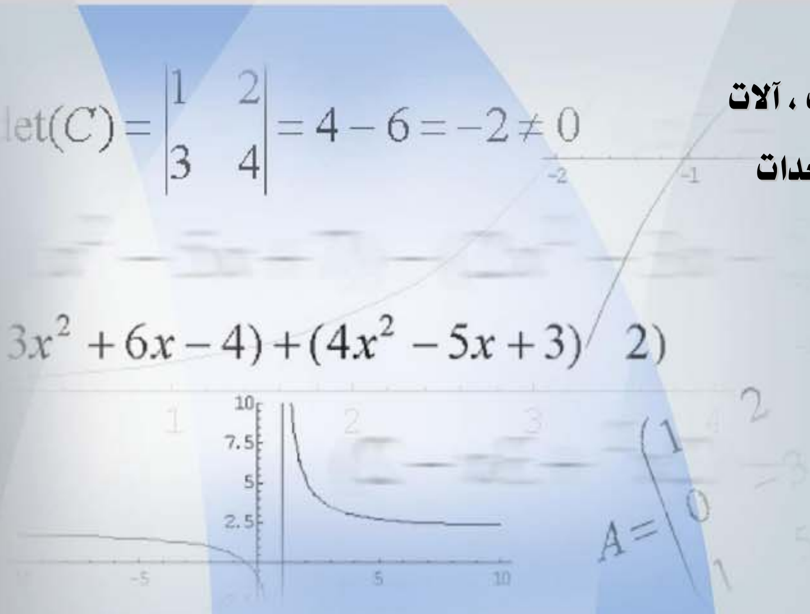
المـمـلـكـة الـعـربـيـة الـسـعـوديـة

المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج



تقنية مدنية ، معمارية ، محركات ومركبات ، آلات زراعية أنظمة نيوماتية وهيدروليكية ،معدات ثقيلة ،كهرباء سيارات

رياضيات تخصصية

١١٦ ريض

طبعة ١٤٣٠هـ

مقدمة

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية " لمتدربي قسم" تقنية مدنية " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول، ورحمة الله المهداة إليها ، لتخرج به من الظلمات إلى النور ، وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، أما بعد.

فإن مقرر رياضيات تخصصية يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة قسم التقنية المدنية والمعمارية وبعض التخصصات لقسم الميكانيكا للكليات التقنية لتعليم الطالب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها الطالب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للطالب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها الطالب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول الأمثلة بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد الطالب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة لرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن الطالب من:

- استيعاب مفهوم التفاضل والقوانين الأساسية لاشتقاق الدوال المشهورة
- الإلمام بمبادئ الهندسة المستوية والفراغية
- التعامل مع نظام المحور وإيجاد الإحداثيات
- إيجاد العلاقة بين الزوايا وكيفية حساب المثلثات
- كيفية حساب الإحتملات والاحتمال الشرطي وكيفية ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى خمس وحدات رئيسة:

تعنى الوحدة الأولى بدراسة مفهوم التفاضل والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود ، والدوال المثلثية ، والدوال الأسية و اللوغارثمية)

الوحدة الثانية فتهدف إلى تعريف الطالب نظام البيان للمعادلة الخطية وكيفية حساب المسافة بين نقطتين وحساب ميل المستقيم وكتابة معادلة الخط المستقيم.

أما الوحدة الثالثة فنتطرق إلى كيفية حساب الزوايا وتحويل الزاوية من وحدة إلى أخرى كما نتطرق إلى كيفية التعامل مع الدوال المثلثية واستنتاج العلاقة بينهماالتفاضل والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود ، والدوال المثلثية ، والدوال الأسية و اللوغارثمية)

الوحدة الرابعة خصصت لمبادئي الهندسة المستوية والفراغية، فنتطرق في هذه الوحدة إلى التعريف والخصائص لبعض الأشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية،المثلث والدائرة)، وقوانين حساب المحيط والمساحة لهذه الأشكال. كما نتطرق لتعريف الأشكال الهندسية الفراغية (متوازي الأضلاع- الاسطوانة- المخروط- الكرة)، وقوانين حساب المساحة الجانبية وحجم هذه الأشكال الهندسية.
في الوحدة الخامسة والأخيرة نتطرق لحساب الإحتملات والاحتمال الشرطي وكيفية ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية و حساب المتوسط والتباين والانحراف المعياري والوسيط والمنوال لعينة ما.

.

والله الموفق

رياضيات تخصصية

التفاضل

اسم الوحدة: التفاضل

الجدارة: معرفة مفهوم التفاضل وكيفية تفاضل الدوال المشهورة

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- المفهوم الرياضى للتفاضل.
- التفسير الهندسي للمشتقة.
- تفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود ، والدوال المثلثية ، والأسية واللوغارتمية).
- إيجاد القيم الصغرى والعظمى للدالة.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: إثنا عشر ساعة.

التفاضل

١. تعريف المشتقة

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$ و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

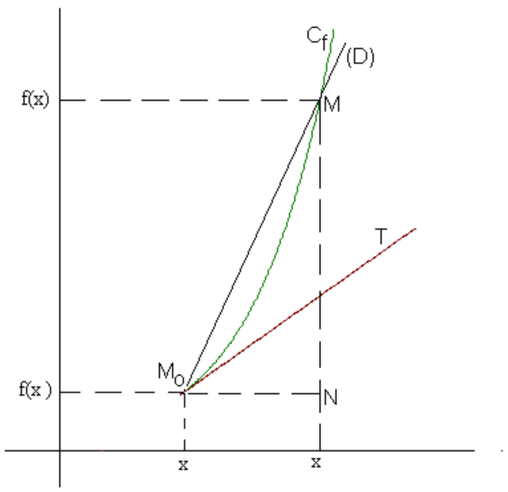
ملاحظة١ : f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢ : $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

٢. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$



$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥ : مشتقة جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_2'(x) f_1(x)$

مثال ١٣ : لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن

$$F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$$
$$= 12x + 3 + 12x - 8 = 24x - 5$$

القانون ٦ : مشتقة قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x) \neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن

$$F'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_2'(x) f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤ : أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \frac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 7 \times 8x^{7-1} = 56x^6$ و $f_2(x) = 2x - 1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$

إذاً

$$F'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_2'(x) f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 2 \times 8x^7}{(2x-1)^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{112x^7 - 56x^6 - 16x^7}{(2x-1)^2} = \frac{96x^7 - 56x^6}{(2x-1)^2} = \frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧ : مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x) = (f(x))^n$

إذا كانت $F(x) = (f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

مثال ١٥ : أوجد مشتقة الدالة $y = F(x) = 4(2x^2 + 3x - 2)^2$

الحل:

لدينا $f(x) = (2x^2 + 3x - 2) \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$

إذا $y' = F'(x) = 2 \times 4(2x^2 + 3x - 2)^{2-1}(4x+3) = 8(2x^2 + 3x - 2)(4x+3)$

تمارين

أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

1) $y=(2x^3-7)(3x^2)$	6) $y=\dfrac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$	11) $y=\left(\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$	16) $y=\dfrac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
2) $y=\dfrac{2x^2-5}{3x}$	7) $y=\dfrac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$	12) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$	17) $y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$
3) $y=\dfrac{2}{3x^2-7x+4}$	8) $y=(2x^4-1.9)^3$	13) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1.8}}$	18) $y=2x^{-3}+7x^{-5}$
4) $y=\dfrac{5}{4x^3-3x^2}$	9) $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$ $\square$	14) $y=x^2\sqrt{x-1}$	19) $y=(4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
5) $y=\dfrac{1}{x+2}-x$	10) $y=(2x^3-4x+7)^{-2}$	15) $y=\dfrac{1.9}{(2x+4)^3}$	20) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+5}}$

٤. قواعد إشتقاق الدوال المثلثية:

١) لتكن الدالة $y=\sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$$

٢) لتكن الدالة $y=\cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٦: لتكن الدالة $y=\sin(2x^3-3)$

فإن $$y'=3\times 2x^2\cos(2x^3-3)=6x^2\cos(2x^3-3)$$

مثال١٧: أوجد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $$u=2\theta^3-3\theta^{-2}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=6\theta^2+6\theta^{-3}$$

إذاً $$y'=-(6\theta^2+6\theta^{-3})\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$$

٣) لتكن الدالة $y=\tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: إذا كانت $y=\tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $$u=x^{-2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x^{-3}$$

إذاً $$y'=\frac{d(\tan u)}{dx}=\frac{du}{dx}\sec^2 u=-2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$$

٤) لتكن الدالة $y=\cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٩: احسب مشتقة الدالة $y = \cot 3x$

الحل:

لدينا $u = 3x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3$

ومنه فإن $y' = \dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\dfrac{du}{dx}\csc^2 u = -3\csc^2 3x$

٥) لتكن الدالة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \sec u$$

مثال ٢٠: احسب مشتقة الدالة $y = \sec\theta^2$

الحل:

لدينا $u = \theta^2 \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $y' = \dfrac{d(\sec u)}{d\theta} = \dfrac{du}{d\theta}\tan u \sec u = 2\theta \tan\theta^2 \sec\theta^2$

٦) لتكن الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u$$

مثال ٢١: احسب مشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل:

لدينا $u = x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2$

ومنه $y' = \dfrac{d(\csc u)}{dx} = -\dfrac{du}{dx}\cot u \csc u = -3x^2 \cot x^3 \csc x^3$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل:

لدينا $u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 10x^4$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -10x^4 \cot(2x^5 - 3)\csc(2x^5 - 3)$$

تمارين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin^5 3x^2$	5) $y = \csc^3(-7x^4)$	9) $y = \dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$	13) $y = \sin(\cos 2x)$
2) $y = x \tan \dfrac{1}{x}$	6) $y = \sqrt{1+\cos^2 x}$	10) $y = \sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$	14) $y = \sqrt{1+\sin x}$
3) $y = \sqrt{x}\cos 2x$	7) $y = \tan^2(x^2+1)$	11) $y = \dfrac{1}{x^2 \sin^3 x}$	15) $y = x\cot(-4x)$
4) $y = \sqrt{\csc x^3}$	8) $y = (x^4 - \cot x)^3$	12) $y = (\sin x - \cos x)^2$	16) $y = x \csc x$

٥. اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

١,٥. قوانين اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$\frac{dy}{dt} = ba^u \ln a\, u'$$

مثال ٢٢: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{\left(3x^2+4x+5\right)}$

الحل:

$$y' = 8\ 2^{3x^2+4x+5} \ln 2\left(6x+4\right) = \left(48x+32\right)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي أي $e \cong 2{,}718$

إذا كانت لدينا الدالة $y = b\ e^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dt} = b e^u\, u'$$

مثال ٢٣: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = 8 \times 2\, e^{2x+1} = 16 e^{2x+1}$

مثال ٢٤: إذا كانت $y = -5\ e^{\sin x}$

فإن $y' = -5\ \cos x\, e^{\sin x}$

٢,٥. قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = b \log_a u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال٢٥: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\log\left(6x^5\right)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي : $y' = \dfrac{3\left(30x^4\right)\log e}{6x^5} = \dfrac{15x^4}{x^5}\log e = \dfrac{15}{x}\log e.$

القانون ٢ : إذا كانت لدينا الدالة $y = \ln u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$$

مثال ٢٦ : اشتق الدالة التالية: $y = e^{-x} \ln x^2$

الحل:

$$y' = -e^{-x} \ln x^2 + \frac{2x}{x^2} e^{-x} = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2 \right) e^{-x}$$

تمارين : احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \log_3 \left(3x^2 - 5\right)$	5) $y = \ln \frac{x^4}{(3x-4)^2}$	9) $y = e^{x^2}$	13) $y = e^{-x} \ln x$
2) $y = \ln(x+3)^2$	6) $f(x) = \ln \sin 3x$	10) $y = 5^{3x^2}$	14) $y = e^{-2x} \sin 3x$
3) $y = \ln^2(x+3)$	7) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	11) $y = x^2 3^x$	15) $f(x) = \ln \tan e^{x^2}$
4) $y = \ln(x^2+2)(x^2+3)$	8) $y = e^{-\frac{1}{2}x}$	12) $y = 5e^{\sin 2x} - x$	16) $f(x) = \ln \sqrt{1-2x}$

٦ . الاشتقاق الضمني

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

مثال٢٧ :

$$xy=1 \qquad (1)$$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة (1) من الشكل:

$$y=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (1) قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x,y

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

نعوض (2) في العبارة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x,y)=0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة y' بدلالة x, y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة y' بكتابة عبارتها بدلالة x, y

قاعدة

لتكن المعادلة $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـx يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx} = ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y'$$

إننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـx و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة

$$f(x,y)=0$$

مثال٢٨: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3 - 3x^2 = xy + 5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3 + 3xy^2y' - 6x = y + xy'$$
$$\Rightarrow 3xy^2y' - xy' = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y'\left[x(3y^2-1)\right] = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y' = \frac{y - y^3 + 6x}{x(3y^2-1)}$$

مثال٢٩: ليكن $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ أوجد المشتقة الأولى y'

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\Rightarrow 2x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$$
$$\Rightarrow y'(2y-2x) = 2y - 2x \Rightarrow y' = \frac{2y-2x}{2y-2x} = 1$$

مثال٣٠: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1)\ \ 5y^2+\sin y=x^2,\quad 2)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,\quad 3)\,x^2=\frac{x+y}{x-y}\quad 4)x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

الحل

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2+\sin y\right]=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\Rightarrow 10yy'+y'\cos y=2x$$

ومنه فإن $(10y+\cos y)y'=2x$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة المشتقة الأولى y' بدلالة x,y

$$y'=\frac{2x}{10y+\cos y}$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

$2)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right]=\frac{d}{dx}(1)\ \Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$ $\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^2}$
$3)\ \frac{d}{dx}\left[x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\Rightarrow 2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$ $\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$

$$(4)\ x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' - y' = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:.

مثال ٣١: أوجد y' إذا كان $y = x^x$

الحل:

لدينا $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

نعوض قيمة $y = x^x$ إذن يصبح لدينا $y = x^x(\ln x + 1)$

تمارين

تمرين ١ : احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

1) $xy + e^{xy} - y^3\sin x = y^3 + 9x$

2) $3x^2y^2 + 4xy - 2y = 0$

3) $x^3y^2 - 5x^2y + x = 13$

4) $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

5) $(x^2 + 3y^2)^3 = x$

7) $x^2 = \frac{\cot y}{1 + \csc y}$

8) $\tan^3(xy^2 + y) = x$

9) $3x^2 - 4y^2 = 7$

10) $y^3\sin x - x^2 = y^3e^{2x}$

11) $y + \sin y = x$

$6)\ xy^{2/3} + yx^{2/3} = x^2$ $\qquad$ $12)\ x\cos y = y$

تمرين ٢ : احسب ميل المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

$2)\ x^{2/3} - y^{2/3} - y = 1;\ \ (1,-1)$	$1)\ x^2 y - 5xy^2 + 6 = 0;\ \ (3,1)$
$4)\ \dfrac{1-y}{1+y} = x;\ \ (0,1)$	$3)\ y^2 - x + 1 = 0;\ \ (10,3)$

٧. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات

فمثلا المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

لتكن $y=f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n من المرات على المجال $I\subset\Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}=f'(x)$$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(f'(x)\right)}{dx}=f''(x)$$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(f''(x)\right)}{dx}=f'''(x)$$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$$y^{(4)}=\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d\left(f'''(x)\right)}{dx}=f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـ y بالنسبة لـ x)

. . . .

. . . .

. . . .

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx}=f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال٣٢ : أوجد المشتقة الثانية للدالة $y=\sin x$

الحل:

$$y'=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

$$y''=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

مثال ٣٣ : أوجد $\frac{d^3y}{dx^3}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y=6x^5$

الحل:

$$y'=\frac{d}{dx}\left(6x^5\right)=5\times6x^4=30x^4$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(30x^4\right)=4\times30x^3=120x^3$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(120x^3\right) = 3\times 120x^2 = 360x^2$$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٤: أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

مثال ٣٥: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال٣٦: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

الحل: لدينا $y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن $y'' = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$

مثال ٣٧: إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$\begin{aligned} y'' &= 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) - 2y' \\ &= -9e^{-2x}\sin 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2\left(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x\right) \\ &= -e^{-2x}\left(12\cos 3x + 5\sin 3x\right) \end{aligned}$$

تمرين: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالقدم feet عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة $s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

الحل

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = \left(3t^2 - 2\right)\big|_{t=4} = 3\left(4^2\right) - 2 = 46\ ft/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4} = 6t\Big|_{t=4} = 6 \times 4 = 24\ ft/\sec^2$$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}\sec$$

تمارين :

تمرين ١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^3; \quad y''$

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \; ; y''$

3) $y = 7 + 6x^2 - 4x^4; \; y'''$

4) $y = 8x^3 - 2x^4; \; y'''$

5) $y = x(x-1)^3; y''$

6) $y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x); \; y''$

7) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x \; ; \frac{d^6 y}{dx^6}$

8) $y = \frac{x}{x-4} \; ; \frac{d^2 y}{dx^2}$

9) $y = \frac{2x}{x^2+1} \; ; y''$

10) $y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4}; \frac{d^3 y}{dx^3}$

11) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}} \; ; y''$

12) $y = (1+x^2)\ln x \; ; y''$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

1) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1 \; ; x = 1$

2) $f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4} \; ; \; x = 1$

3) $f(x) = \frac{4x^2}{3x-7} \; ; \; x = 2$

4) $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4+3} \; ; \; x = -1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

1) $s = (2t^2 - 3)^4 \; ; t = 2h$

2) $s = \sqrt{3.4 - t^4} \; ; t = 1h$

3) $s = t^2\sqrt{1+t^2} \; ; t = 1h$

4) $s = \frac{t}{2t^2-3} \; ; \; t = 4h$

5) $s = (2t+7)\sqrt{t^3-1} \; ; \; t = 2h$

6) $s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1 \; ; t = 3h$

رياضيات تخصصية

الهندسة التحليلية

الهندسة التحليلية

٢

إسم الوحدة: الهندسة التحليلية

الجدارة: الالمام بمبادئ الهندسيةاالتحليلية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- نظام البيان للمعادلة الخطية
- حساب المسافة بين نقطتين
- حساب ميل ومعادلة الخط المستقيم
- كيفية حساب إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

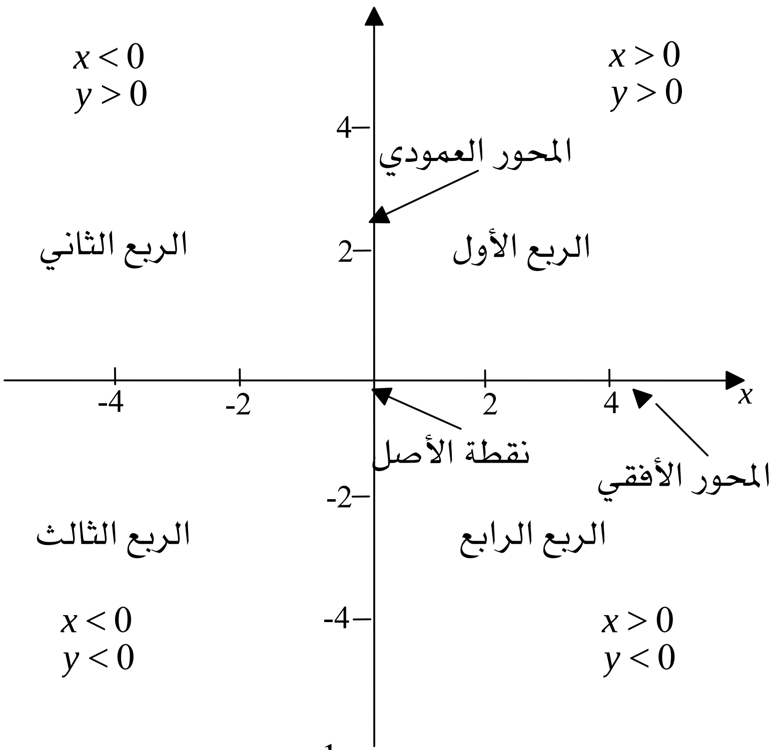
مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات

مبادئ الهندسة التحليلية

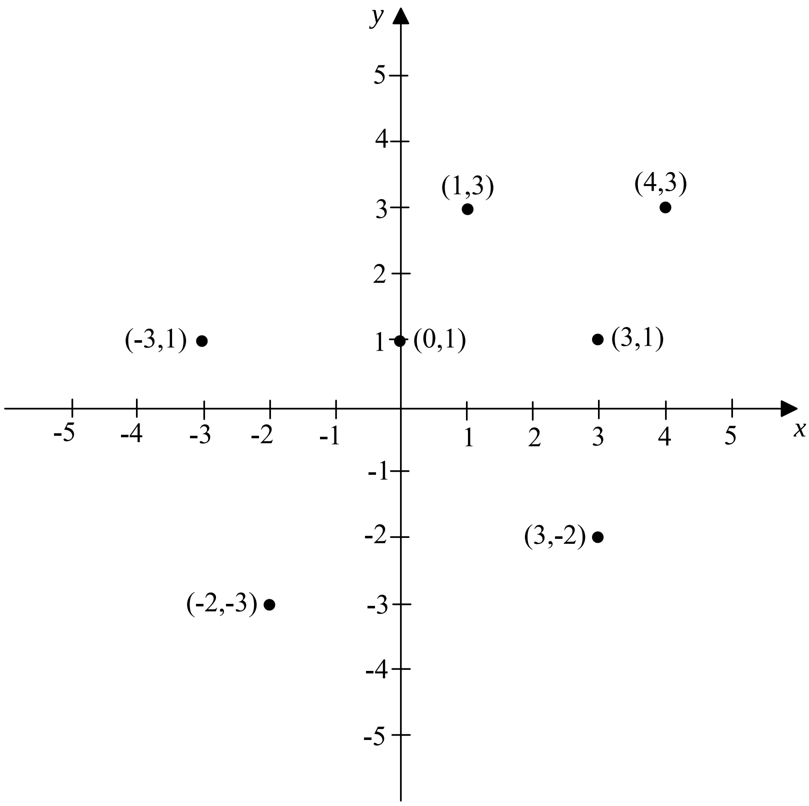
١. نظام المحاور الديكارتي

لقد سبق وعرفنا أن كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة وحيدة على خط الأعداد. فكذلك يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل نقاط على مستوى. فعلى مستوى ذو بعدان أو محوران xy كل نقطة محددة بزوج مرتب من الأعداد يطلق عليه اسم إحداثيات النقطة. يرمز لهذا الزوج المرتب بـ (a,b) حيث a عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور x و b كذلك عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور y. إحداثيات النقطة تكون معروفة بعد تحديد موقع النقطة بالنسبة للمحور الأفقي x وبالنسبة للمحور العمودي y. تتقاطع المحاور عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل. في الرسم1 تم تحديد اتجاه المحاور بحيث تظهر الأعداد الموجبة على يمين نقطة الأصل بالنسبة للمحور x وفوق نقطة الأصل بالنسبة للمحور y. الأربع مناطق التي شكلتها هذه المحاور تسمى الأرباع وهي مرقمة عكس اتجاه عقارب الساعة. يسمى هذا النظام ذو البعدين نظام المحاور الديكارتي.



الرسم1

تحديد نقطة معينة $P(a,b)$ يعني رسم النقطة في موقعها من المستوى. في الرسم 2 تم رسم النقاط $(3,1)$, $(1,3)$, $(0,1)$, $(3,-2)$, $(-2,-3)$, $(-3,1)$, $(4,3)$. ترتيب الأرقام داخل القوس مهم لأن مثلا الزوجان $(3,1)$, $(1,3)$ ويحددان نقطتين مختلفتين على المستوى.



الرسم 2

٢. المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين على خط أفقي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات x للنقطتين. المسافة بين نقطتين على خط عمودي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات y للنقطتين. فمثلا كما يبين الرسم 3 فالمسافة d بين النقطة $(1,2)$ والنقطة $(1,-3)$ هي: $d =| 2-(-3) |= 5$. أما إذا لم تقع النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ على خط أفقي أو عمودي كما هو موضح في الرسم 4 فالمسافة تكون طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي طول أضلاعه (x_2-x_1) و (y_1,y_2):

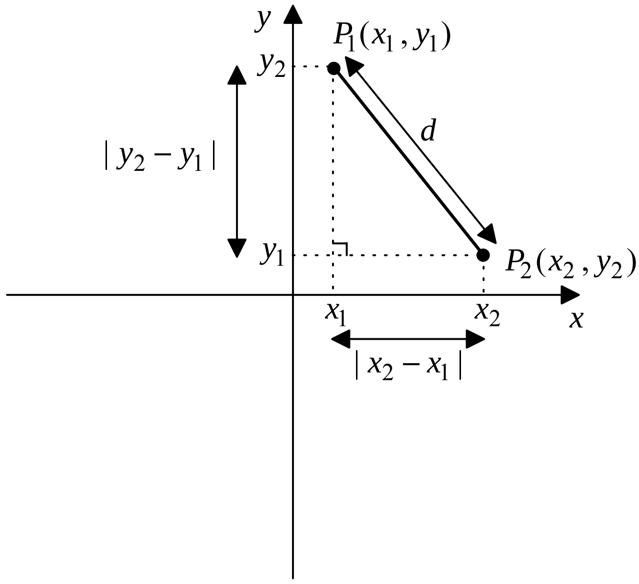
من قانون بيثاغورث:

$$d^2 =| x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2 \Rightarrow d = \sqrt{| x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2}$$

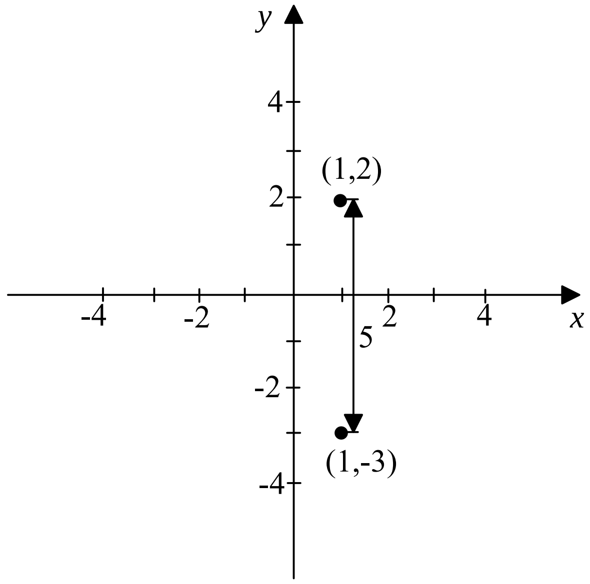
ولأن $| x_2 - x_1 |^2 = (x_2 - x_1)^2$ و $| y_2 - y_1 |^2 = (y_2 - y_1)2$

فالمسافة بين النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



الرسم 3



الرسم 4

مثال ١: أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

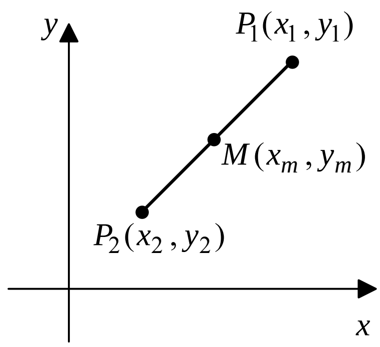
نستخدم قانون المسافة علما بأن $x_1 = -3$ ، $x_2 = 7$ ، $y_1 = 4$ و $y_2 = 2$ كالتالي:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \approx 10.2$$

٣. إحداثيات نقطة الوسط

إحداثيات نقطة الوسط (x_m, y_m) لقطعة مستقيمة (كما هو موضح في الرسم 5) هما متوسط إحداثيات x لنقطتي أطراف الخط ومتوسط إحداثيات y لنقطتي أطراف الخط. فيكون القانون كالتالي:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



الرسم 5

مثال٢: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للخط المربوط بالنقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

نستخدم قانون نقطة الوسط علما بأن $x_1=-3$ ، $x_2=7$ ، $y_1=4$ و $y_2=2$ كالتالي:

$$(x_m\,,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(2,3)$$

تمارين

تمرين١: ارسم النقاط التالية على نظام محاور ديكارتي

$1)(2,4)$ $2)(0,-3)$ $3)(-2,1)$ $4)(-5,-3)$

$5)(-3,-5)$ $6)(-4,3)$ $7)(0,2)$ $8)(-2,0)$

تمرين٢: أوجد المسافة بين النقاط التالية

$1)(6,4),(-8,11)$ $2)(-4,-20),(-10,15)$

$3)(5,-8),(0,0)$ $4)(\sqrt{3},\sqrt{8}),(\sqrt{12},\sqrt{27})$

$5)(a,b),(-a,-b)$ $3)(a-b,b),(a,a+b)$

$7)(x,4x),(-2x,3x)\ x<0$ $8)(x,4x),(-2x,3x)\,x>0$

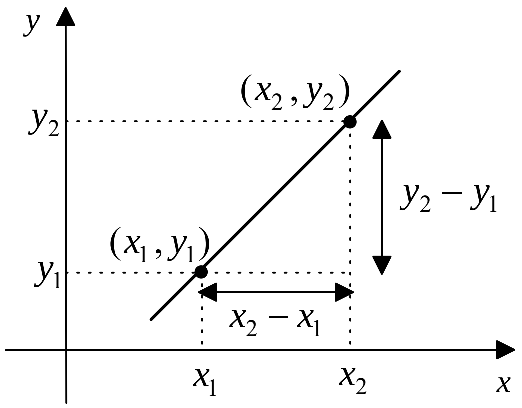
تمرين٣: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للقطع المستقيمة التالية:

$1)(1,-1),(5,5)$ $2)(4,7),(6,10)$ $3)(6,-3),(6,11)$ $4)(2a,0),(0,2b)$

٤. ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم (m) غير العمودي هو قياس عدد الوحدات التي يرتفع (أو ينزل) بها الخط عموديا لكل وحدة تغير أفقيا من اليسار إلى اليمين. عاين النقطتين (x_1,y_2) و (x_2,y_2) على الخط المستقيم في الرسم6. فكلما تحركت من اليسار إلى اليمين على الخط المستقيم سترتفع مسافة معينة تقابلها مسافة معينة في الاتجاه الأفقي، تسمى المسافتان التغير في y $(\Delta y=y_2-y_1)$ والتغير في x $(\Delta x=x_2-x_1)$.

فبهذا التعريف يصبح قانون الميل كالتالي:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الرسم6

عند استخدام القانون نلاحظ أن: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

٥. معادلة الخط المستقيم

١,٥. طريقة الميل ونقطة

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1, y_1). إذا كانت (x, y) نقطة أخرى على الخط إذن من قانون الميل:

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ ومن هذا القانون نصل إلى معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال٣: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1, -2)$

الحل:

في هذا المثال $m = 3$ و $(x_1, y_1) = (1, -2)$ إذن بالتعويض المباشر في القانون نجد:

$$y = 3(x - 1) + (-2) = 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

إذن معادلة الخط المستقيم هي: $y = 3x - 5$

مثال٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(2,5)$

الحل:

في هذه الحالة نستخدم النقطتين لإيجاد ميل الخط ثم نستخدم هذا الميل مع إحدى النقطتين المعطاة لإيجاد معادلة الخط بنفس الطريقة المذكورة في المثال ٣.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن باستخدام $m=-1$ والنقطة $(4,3)$ مثلا تكون معادلة الخط كالتالي:

$$y=-1(x-4)+3=-x+4+3=-x+7$$

٢,٥. طريقة الميل والجزء المقطوع

عادة ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تسمى طريقة الميل والجزء المقطوع. وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y=mx+b$$

حيث m هو ميل الخط و b يمثل الجزء (أو المسافة) المقطوع (ة) على المحور y عند النقطة $(0,b)$.

وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي

مثال ٥: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويمر بالنقطة $(1,3)$

الحل:

بتعويض قيمة الميل في شكل المعادلة المعطاة أعلاه يكون لدينا: $y=2x+b$

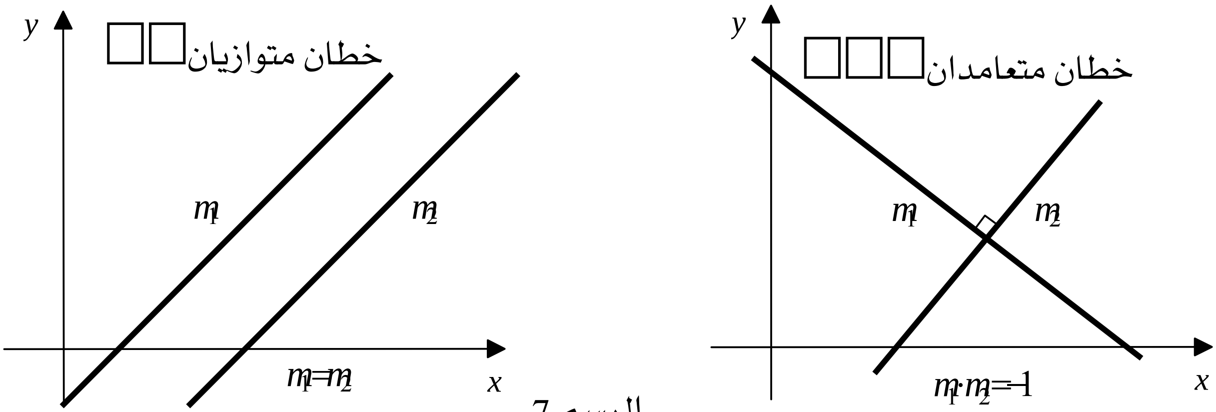
ثم نعوض قيم إحداثيات النقطة التي يمر بها الخط لإيجاد قيمة الجزء المقطوع b، فتصبح المعادلة: $3=2\times1+b$ ومنه $b=3-2=1$ وبالتالي معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي: $y=2x+1$

خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y=m(x-x_1)+y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y=mx+b$
- شكل المعادلة (الخط يمر بنقطة الأصل): $y=mx$
- الخط الأفقي(الميل يساوي صفر): $y=b$
- الخط العمودي (الميل غير معرف): $x=a$

٦. الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة هل خطان هما متوازيين أو متعامدين كما هو موضح في الرسم 8. وبالتحديد فيكون الخطان غير عموديين ومتوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$ ويكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $(m_1 = -\frac{1}{m_2})$.



الرسم 7

مثال ٦ : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة $(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) الخط موازي للخط المستقيم $2x - 3y = 5$

b) الخط متعامد على الخط المستقيم $2x - 3y = 5$

الحل:

أولا نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y = mx + b$ كالتالي:

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow -3y = -2x + 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

إذن ميل هذا الخط المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي:

a) ميل الخط المستقيم المطلوب $m = \frac{2}{3}$ لأن الخط المعطى موازي له. إذن الآن لدينا ميل ونقطة فيمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بالطريقة المذكورة سابقا كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1 = \frac{2}{3}(x-2) + (-1) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

b) في هذه الحالة الميل المطلوب يساوي معكوس الميل المعطى بتغيير الإشارة لأنه متعامد عليه أي:

$m=-\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{2}$ وباقي الحل يكون كما في الفقرة a) أي:

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+(-1)=-\frac{3}{2}x+\frac{6}{2}-1=-\frac{3}{2}x+\frac{4}{2}=-\frac{3}{2}x+2$$

٧. نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

عادة ما نحتاج إلى معرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور. تكون إحداثية y تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور x وتكون إحداثية x تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور y. أي نعوض في المعادلة بـ $x=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور y ثم بـ $y=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور x.

مثال ٧: أوجد إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y=2x+3$ مع المحاور.

الحل:

التقاطع مع المحور y : $x=0\rightarrow y=2\times 0+3=3$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0,3)$

التقاطع مع المحور x : $y=0\rightarrow 2x+3=0\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$

تمارين

تمرين١: ارسم الخطوط التي تمر بالنقطة المعطاة مع كل ميل من (a) إلى (d)

$1)(2,3):\quad (a)0\quad (b)1\quad (c)-2\quad (d)$ غير معرف

$2)(-4,1):\quad (a)3\quad (b)-3\quad (c)\frac{1}{3}\quad (d)0$

تمرين٢: أوجد ميل الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقاط التالية:

$1)(3,-4),(5,2)\qquad 2)(2,1),(2,5)\qquad 3)(1,2),(-2,4)\qquad 4)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين٣: أوجد ميل ونقطة التقاطع مع المحاور (إذا كان ذلك ممكنا) للخطوط التالية

$1)\,x+5y=20\qquad 2)\,6x-5y=15\qquad 3)\,x=4\qquad 4)\,y=-1$

تمرين٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

$1)(2,1),(0,-3)\qquad 2)(-3,-4),(1,4)\qquad 3)(0,0),(-1,3)$

$4)(-3,6),(1,2)\qquad 5)(1,-2),(3,-2)\qquad 6)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين٥: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة ولديه الميل المعطى

$1)(0,3),m=\frac{3}{4}\qquad 2)(0,0),m=\frac{2}{3}\qquad 3)(-2,4),m=-\frac{3}{5}$

$4)(0,2),m=4\qquad 5)(0,4),m=0\qquad 6)(-1,2),m$ غير معرف

تمرين٦: أوجد معادلة الخط العمودي اذي يتقاطع مع المحور x عند النقطة 3

تمرين٧: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة في الحالات التالية:

(a) يكون الخط فيها موازي للخط المعطى

(b) يكون الخط فيها متعامد على الخط المعطى

$1)(2,1)\,,\,4x-2y=3\qquad 2)(-3,2)\,,\,x+y=7\qquad 3)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\,5x+3y=0$

$4)(-6,4)\,,\,3x+4y-7=0\qquad 5)(2,5)\,,\,x=4\qquad 6)(-1,0)\,,\,y=-3$

رياضيات تخصصية

مدخل إلى علم المثلثات

اسم الوحدة: مدخل الى علم المثلثات

الجدارة: الإلمام بمبادئ علم المثلثات

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على:

- تصنيف وحساب الزوايا
- تحويل الزوايا من وحدة إلى أخرى وحساب قيم المثلثات للزوايا
- التعامل مع الدوال المثلثية واستنتاج العلاقة بينها
- استخدام المتطابقات الأساسية للمثلثات

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

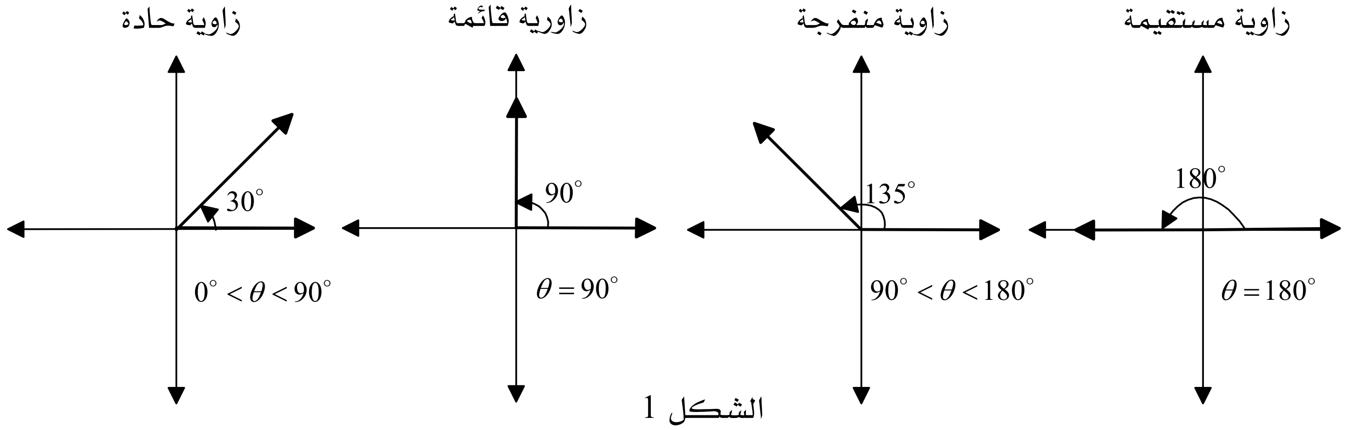
الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات

مدخل إلى علم المثلثات

١. قياس الزوايا

قياس الزاوية هو مقدار دوران إحدى أضلع الزاوية بالنسبة للضلع الثاني. وعادة ما نستخدم وحدة "الدرجة" لهذا القياس ($^\circ$). تكون قيمة القياس موجبة إذا كانت الزاوية مكونة من دوران في اتجاه معاكس لعقارب الساعة وسالبة إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة. قياس زاوية θ مشكلة من دورة كاملة في اتجاه عقارب الساعة هو 360° وبالتالي 1° هو قياس زاوية مشكلة من $\frac{1}{360}$ من دورة كاملة.

عادة ما نصف الزوايا إلى أربعة أصناف كما هو موضح في الشكل1 .



الشكل 1

كما أن في الساعة 60 دقيقة وفي الدقيقة 60 ثانية ، فإن في الدرجة الواحدة (1°) 60 دقيقة ($60'$) وفي الدقيقة 60 الثانية ($60''$):

درجة واحدة (1°) = 60 دقيقة ($60'$)

دقيقة واحدة ($1'$) = 60 ثانية ($60''$)

فمثلا زاوية قياسها 61 درجة ، 35 دقيقة و 47 ثانية تكتب بالشكل القياسي: $\theta = 61^\circ 35' 47''$

مثال ١: أعد كتابة $\theta = 43^\circ 74' 89''$ بالشكل القياسي

الحل:

من الواضح أن: $74' = 60' + 14' = 1^\circ 14'$ و $89'' = 60'' + 29'' = 1'29''$

إذاً: $\theta = 43^\circ 74' 89'' = (43^\circ + 1^\circ)(14' + 1')(29'') = 44^\circ 15' 29''$

مثال ٢: أوجد $2)\,75^\circ 23'41'' + 34^\circ 47'25''$ $\qquad 1)\,360^\circ - 75^\circ 18'48''$

الحل:

$$1)\,360^\circ - 75^\circ 18'48'' = (359^\circ 59'60'') - (75^\circ 18'48'') = (359^\circ - 75^\circ)(59' - 18')(60'' - 48'')$$

$$= 284^\circ 41' 12''$$

$$2)\,75^\circ 23'41'' + 34^\circ 47'25'' = (75^\circ + 34^\circ)(23' + 47')(41'' + 25'') = 109^\circ 70'66''$$

$$= (109^\circ + 1^\circ)(10' + 1')(6'') = 110^\circ 11' 6''$$

الآلة الحاسبة تظهر قياس الزاوية على الشكل العشري، فمثلا الزاوية $47^\circ 30'$ تظهر على الآلة على شكل 47.5° والزاوية $23^\circ 45'$ تظهر على شكل 23.75°. إذن نحتاج إلى معرفة تحويل الكتابة العشرية إلى الكتابة على الشكل القياسي والعكس.

مثال ٣: حول 1) $\theta = 43^\circ 25'51''$ إلى الشكل العشري و 2) $\theta = 23.456^\circ$ إلى الشكل القياسي

الحل:

من المعلوم أن: $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ و $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ إذا:

$$1)\ \theta = 43^\circ 25'51'' = 43^\circ + \left(\frac{25}{60} + \frac{51}{3600}\right)^\circ = 43.431^\circ$$

$$2)\ \theta = 23.456^\circ = 23^\circ + 0.456^\circ = 23^\circ + 0.456 \times 60' = 23^\circ + 27.36'$$

$$= 23^\circ + 27' + 0.36 \times 60'' = 23^\circ + 27' + 21.6'' \approx 23^\circ 27'22''$$

هناك وحدة أخرى يتم استعمالها في قياس الزوايا وتسمى هذه الوحدة الرادين (radians) وعادة ما يرمز لها بالحروف اللاتينية rd. سبق وذكرنا أن دورة كاملة تمثل زاوية قياسها 360° فهنا نعرف أن قياس هذه الزاوية بالوحدة الجديدة تساوي $2\pi\,rd$ أي أن 360° تعادل $2\pi\,rd$ فبالتالي:

$2\pi\,rd = 360^\circ \Rightarrow \pi\,rd = 180^\circ$ أو بمعنى آخر:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}rd \qquad \text{أو} \qquad 1rd = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

ملاحظة الآلة الحاسبة تظهر $1^\circ = 0.017453293rd$ و $1rd = 57.29577951^\circ$

مثال٤: حول كل مما يلي: إلى درجة $(^{\circ})$ $2)\ \frac{\pi}{4}rd\ ,\ -5rd$ ، إلى رادين (rd) $1)150^{\circ}\ ,\ 548^{\circ}23'15''$

الحل:

$$1)\frac{\pi}{4}rd=\frac{\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=45^{\circ}\quad ,\quad -5rd=-5\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=-5\times 57.296^{\circ}=-286^{\circ}28'48''$$

$$2)150^{\circ}=150\left(\frac{\pi}{180}\right)rd=\frac{5\pi}{6}\quad ,\quad 548^{\circ}23'15''=548.3875^{\circ}=548.3875\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx 9.\text{٥٧١٢}\ rd$$

بعض الزوايا المشهورة بالدرجة والرادين				
$(^{\circ})$	(rd)		$(^{\circ})$	(rd)
0	0		120	$\frac{2\pi}{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$		180	π
45	$\frac{\pi}{4}$		240	$\frac{4\pi}{3}$
60	$\frac{\pi}{3}$		270	$\frac{3\pi}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$		360	2π

تمارين

تمرين ١: صنف الزوايا التالية إلى حادة أو منفرجة أو لا صنف لها

$1)\,225^\circ \qquad 2)\,15^\circ 4' 9'' \qquad 3)\,0^\circ \qquad 4)\,\pi\, rd$

تمرين ٢: قم بالعمليات التالية:

$1)\,15^\circ 25' 35'' + 43^\circ 35' 27'' \qquad 1)\,109^\circ 47' 38'' + 43^\circ 35' 27''$

$3)\,57^\circ 43' 28'' - 27^\circ 31' 49'' \qquad 4)\,123^\circ 13' 20'' - 27^\circ 31' 49''$

تمرين ٣: أعد كتابة الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة، الدقيقة والثانية

$1)\,40.25^\circ \qquad 2)\,75.2^\circ \qquad 3)\,17.45^\circ \qquad 4)\,96.6^\circ$

تمرين ٤: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة

$1)\,\frac{\pi}{3} \qquad 2)\,\frac{3\pi}{2} \qquad 3)\,-\frac{\pi}{6} \qquad 4)\,\frac{3\pi}{4} \qquad 5)\,\frac{5\pi}{6} \qquad 6)\,-\frac{4\pi}{5}$

$7)\,3\pi \qquad 8h)\,-4\pi \qquad 9)\,2 \qquad 10)\,5.3 \qquad 11)\,-6.4 \qquad 12)\,-8$

تمرين ٥: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الرادين

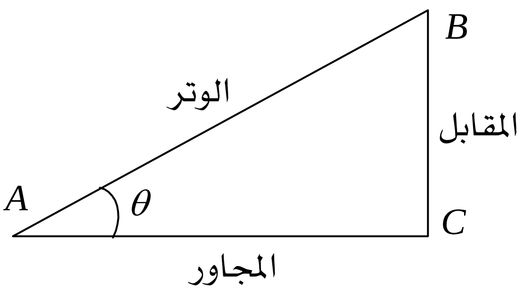
$1)\,45^\circ \qquad 2)\,225^\circ \qquad 3)\,75^\circ \qquad 4)\,-135^\circ \qquad 5)\,7^\circ 30' \qquad 6)\,-270^\circ$

٢. مثلثيات زاوية حادة

عاين المثلث القائم الزاوية ABC في الشكل 2. نسمي ضلع المثلث المقابل للزاوية C بالوتر. ولنسمي الزاوية التي رأسها A الزاوية θ، بهذا الشكل يسمى الضلع $\overline{AC}$ المجاور (بالنسبة لـ θ) ، ويسمى الضلع $\overline{BC}$ المقابل (بالنسبة لـ θ). يطلق على مثلثيات الزاوية θ الأسماء التالية :

sine, cosine, tangent, cotangent, cosecant and secant

يرمز لقيم هذه المثلثات عند θ بـ: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ... إلخ.
وتعرف هذه القيم باستخدام طول أضلاع المثلث كالتالي:



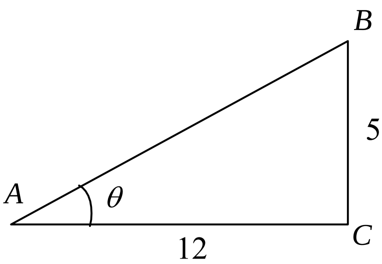
الشكل 2

$$\sin 6 = \frac{\text{لمقابل}}{\text{لوتر}} = \frac{BC}{AB} \qquad \csc 6 = \frac{\text{لوتر}}{\text{لمقابل}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{AC}{BC}$$

مثال ٥: احسب قيم مثلثيات الزاوية θ



الحل:

أولا نحتاج إلى إيجاد طول الوتر وهذا ممكن باستخدام قانون فيثاغورث للمثلث القائم الزاوية ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = \sqrt{169} = 13$$

ومنه تكون قيم مثلثيات الزاوية θ كالتالي

$$\sin 6 = \frac{5}{13} \quad \cos 6 = \frac{12}{13} \quad \tan 6 = \frac{5}{12} \quad \csc 6 = \frac{13}{5} \quad \sec 6 = \frac{13}{12} \quad \cot 6 = \frac{12}{5}$$

مثال ٦ : أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$.

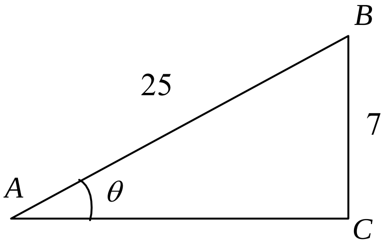
الحل:

لأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$ فيمكن افتراض أن $BC = 7$ و $AB = 25$ (بدون تقليص من عمومية الحل). ومن قانون فيثاغورث:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \Rightarrow AC = \sqrt{576} = 24$$

وبالتالي:

$$\cos\theta = \frac{24}{25} \qquad \tan\theta = \frac{7}{24}$$



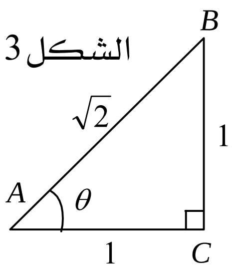
١,٢. مثلثيات بعض الزوايا المشهورة

كثير ما نتعرض في حساب المثلثات إلى زوايا تتكرر معنا كثيراً يجب على الطالب أن يحفظ قيم مثلثياتها. في هذه الفقرة سنكتفي بشرح طريقة إيجاد قيم مثلثيات الزاوية 45° فقط وباقي الزوايا المشهورة سنذكر فقط قيم مثلثياتها بدون شرح.

لنعاين المثلث القائم الزاوية ABC في الشكل 3 حيث تكون فيه الزاوية A تساوي 45°. من السهل استنتاج أن الزاوية B تساوي كذلك 45° وبالتالي يكون المثلث ABC متساوي الضلعين AC و BC. بدون تقليص من عمومية الاستنتاج لنفرض أن $AC = AB = 1$ وبتطبيق قانون فيثاغورث يكون $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$ وبالتالي:

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta = \frac{1}{1} = 1$$

الشكل 3



مثلثيات زوايا مشهورة			
$\theta\ (^\circ, rd)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

٢,٢. حل المثلثات قائمة الزاوية

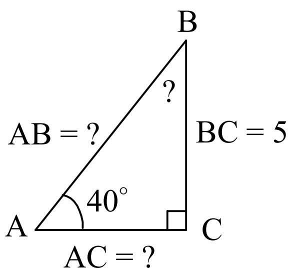
يتكون شكل المثلث من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا. لنفرض أننا نعرف قياس بعض الأضلع وبعض الزوايا. فعملية إيجاد قياس الأضلع والزوايا الباقية تسمى حل المثلث. وسنتطرق في الأمثلة التالية إلى كيفية استخدام علم المثلثيات في حل مسائل من هذا النوع.

مثال ٧: حل المثلث القائم الزاوية ABC حيث $BC = 5$ و الزاوية التي رأسها A تساوي 40°.

الحل:

أولا نقوم برسم المثلث على حسب المعطيات في السؤال كما هو مبين في الرسم التالي:

فمن الواضح أنه يجب علينا إيجاد الزاوية B والأضلع AB و AC مع العلم أن الزاوية القائمة C تساوي 90°. بما أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° إذاً:



$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$$

(هنا نقصد الزوايا التي رؤوسها A, B, C) ومنه باستخدام المثلثيات:

$$\sin 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 40^\circ} = \frac{5}{0.6427} \Rightarrow AB \approx 7.8$$

يبقى علينا إيجاد طول الضلع AC الذي يمكن حسابه باستخدام قانون فيثاغورث أو إحدى المثلثيات المناسبة. وبقانون فيثاغورث:

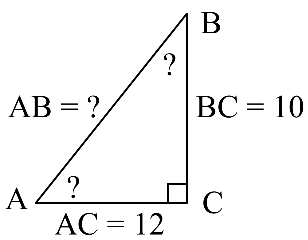
$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (7.8)^2 - 5^2 = 60.84 - 25 = 35.84 \Rightarrow AC = \sqrt{35.84} \approx 6$$

وهكذا تصبح قياس كل زوايا وأضلاع المثلث معروفة.

مثال ٨: حل المثلث القائم الزاوية حيث $BC = 10$ و $AC = 12$.

الحل:

هنا في هذه الحالة المعطيات هما ضلعان. فبالنسبة للضلع الثالث AB يمكن استخدام قانون فيثاغورث: $AB^2 = 12^2 + 10^2 = 244 \Rightarrow AB \approx 15.6$



وباستخدام المثلثية tan نحسب الزاوية A :

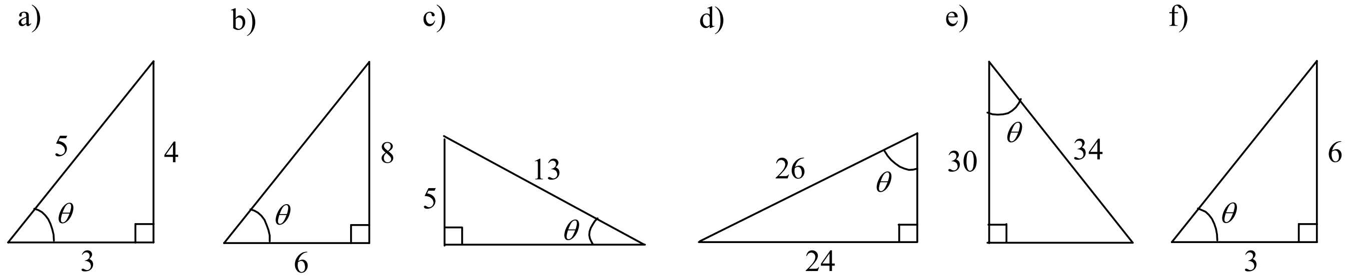
$$\tan A = \frac{10}{12} \approx 0.8333 \Rightarrow A \approx 39^\circ 48'$$

والزاوية B يمكن حسابها من أن مجموع الزوايا الثلاثة يساوي 180°:

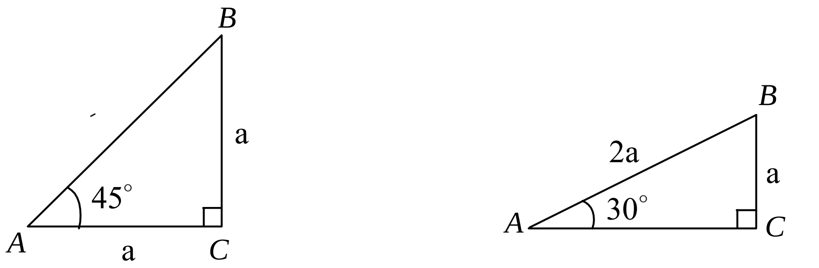
$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (39^\circ 48' + 90^\circ) = 180^\circ - 129^\circ 48' = 50^\circ 12'$$

تمارين

تمرين ١: أوجد القيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ في الحالات التالية:



تمرين ٢: استخدم الرسم التالي لإيجاد $\sin 45^\circ$ ، $\cos 45^\circ$ ، $\sin 30^\circ$ و $\cos 30^\circ$

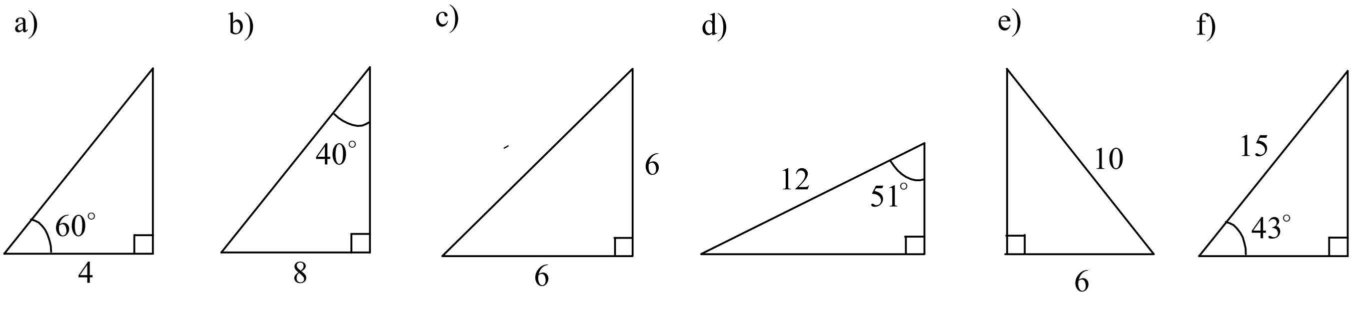


تمرين ٣: 1) أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \frac{12}{13}$

2) أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\cos\theta = \frac{1}{2}$

3) أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ علما بأن $\tan\theta = \frac{2}{3}$

تمرين ٤: أوجد قيم الزوايا والأضلاع الغير معروفة في الحالات التالية:



٣. مثلثيات أي زاوية

هنا في هذه الفقرة سنعرف مثلثيات أي زاوية بحيث يكون هذا التعريف شاملا لتعريف مثلثيات الزاوية الحادة التي سبق وتكلمنا عليها. لهذا الغرض لنفرض الزاوية θ في شكلها القياسي (أي رأس الزاوية على نقطة الأصل) (الشكل1) ولتكن النقطة $P(x,y)$ (تختلف عن نقطة الأصل) على إحد أضلع الزاوية θ.

من قانون فيثاغورث: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ وتعرف مثلثيات θ باستخدام الإحداثيات (x,y) والمسافة r كالتالي:

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

مثال ٩: لتكن النقطة $P(3,4)$ (الشكل 2) على أحد أضلع الزاوية θ. أوجد مثلثيات θ.

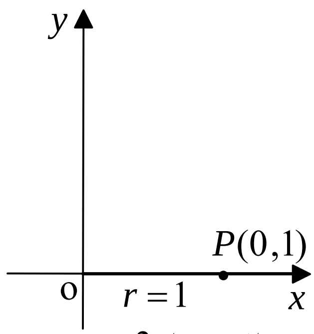
الحل:

في هذه الحالة: $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$ إذن: $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$ $\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$ $\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$

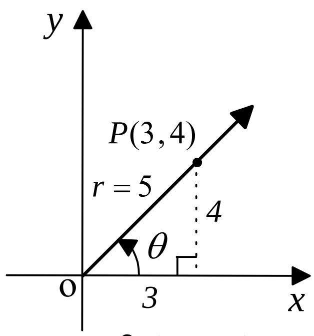
مثال ١٠: أوجد مثلثيات الزاوية $\theta=0^\circ$.

الحل: في هذه الحالة لنختار النقطة $P(1,0)$ (الشكل 3) فمن الواضح أن $r=OP=1$

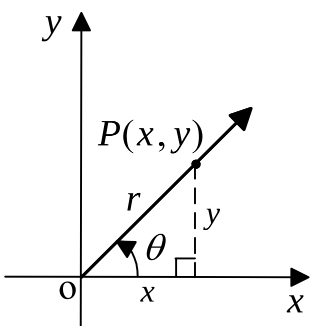
وبالتالي: $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$ $\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1$ $\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0$



الشكل 3



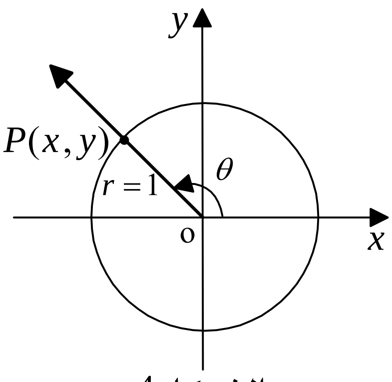
الشكل 2



الشكل1

يمكن اختصار تعريف الدوال المثلثيات باختيار النقطة P على دائرة الوحدة (الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي 1) التي تتقاطع مع ضلع الزاوية، أو بمعنى آخر اختيار P بحيث $r=OP=1$ (الشكل 4) فبالتالي:

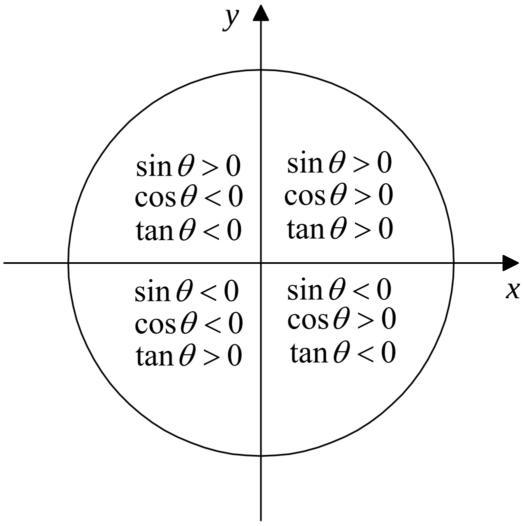
$$\sin\theta=y \qquad \cos\theta=x \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$



الشكل 4

وبما أن قيمتي x و y محصورتين بين $1-$ و 1 فإن:

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \qquad \text{و} \qquad -1 \le \cos\theta \le 1$$



ومن هذا التعريف يمكن معرفة إشارة هذه المثلثيات $\sin e, \text{cosine}, \text{tangent}$ كالتالي:

- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ موجبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني قيمة $\sin\theta$ موجبة وقيم $\cos\theta, \tan\theta$ سالبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta$ سالبة وقيمة $\tan\theta$ موجبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون قيم $\sin\theta, \tan\theta$ سالبة وقيمة $\cos\theta$ موجبة

تمارين

تمرين ١: أوجد مثلثيات الزاوية θ عندما تكون إحداثيات النقطة P :

$$1)\,P(2,3) \qquad 2)\,P(3,-4) \qquad 3)\,P(1,\sqrt{3}) \qquad 4)\,P(1,2\sqrt{2}) \qquad 5)\,P(2,0)$$

تمرين ٢: أوجد قيم $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ عندما تكون الزاوية θ تساوي:

$$1)180^\circ \qquad 2)\frac{3\pi}{2} \qquad 3)360^\circ \qquad 4)-\pi$$

تمرين ٣: أوجد قيمة $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ أو $\tan\theta$ على حسب المعطيات:

$$1)\sin\theta=\frac{5}{13}\,,\,\cos\theta=\frac{12}{13} \qquad 2)\cos\theta=\frac{3\sqrt{34}}{34}\,,\,\tan\theta=\frac{5}{3} \qquad 3)\sin\theta=-\frac{4}{5}\,,\,\tan\theta=\frac{4}{3}$$

تمرين ٤: أوجد إشارة قيم المثلثيات التالية:

$$1)\cos 50^\circ \qquad 2)\sin\frac{5\pi}{6} \qquad 3)\tan 125^\circ \qquad 4)\sin 247^\circ \qquad 5)\cos(-119^\circ)$$

تمرين ٥: أوجد القيم الحقيقية للمثلثيات التالية:

$$1)120^\circ \quad 2)135^\circ \quad 3)210^\circ \quad 4)\frac{5\pi}{3} \quad 5)\frac{7\pi}{4} \quad 6)-30^\circ \quad 7)-\frac{\pi}{4} \quad 8)-150^\circ$$

تمرين ٦: احسب ما يلي $[\sin^2\theta=(\sin\theta)^2]$:

$$1)\sin^2 0^\circ+\cos^2 0^\circ \qquad 2)\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2} \qquad 3)2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$$

$$4)\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} \qquad 5)\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} \qquad 6)1+\tan^2\frac{\pi}{2}$$

٤. المتطابقات الأساسية للمثلثيات

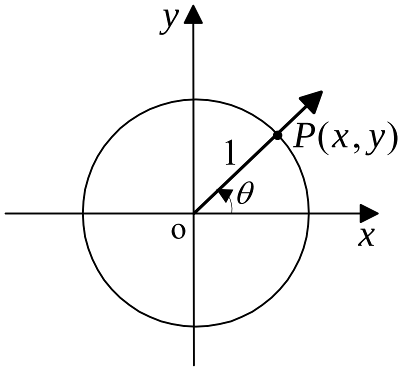
كما رأينا من قبل باستخدام دائرة الوحدة والنقطة $P(x,y)$

(الشكل 5) توصلنا إلى أن:

$\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y$ ومنه يمكن أن نقول:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + y^2$$

ومع أن $x^2 + y^2 = r^2 = 1$ (دائرة الوحدة) إذا:



الشكل 5

$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ (وهذا يصلح لأي زاوية θ)

فمثلا: $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ومن هذه المتطابقة يمكن استنتاج متطابقات أخرى، فمثلا بتقسيم طرفي هذه المتطابقة على $\cos^2\theta$:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right)$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\right)$$

بنفس الطريقة يمكن الوصول إلى: $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

مثال ١١: لتكن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ والزاوية θ موجودة في الربع الثاني. استخدم المتطابقة الأساسية لإيجاد $\cos\theta$.

الحل:

من التطابق الأساسي: $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ إذا:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ولأن المثلثية $\cos\theta$ سالبة في الربع الثاني فإذا أن نختار $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

كذلك يمكن أن نستخدم هذه المتطابقات في اختصار العبارات المثلثية كما في المثال التالي

مثال ١٢: اختصر العبارة التالية: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

الحل:

أولا نقوم بتفكيك الأقواس كالتالي: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1^2 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

ثم باستخدام المتطابقة المذكورة أعلاه نجد: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

٤,١. متطابقات جمع وطرح الزوايا

من التعريف السابق يمكن الوصول إلى متطابقات أخرى سنسردها هنا بدون شرح طريقة الوصول إليها.

١) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

٢) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

٣) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

٤) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

٥) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

٦) $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال ١٣: أوجد قيم: $a)\cos\frac{\pi}{12}\quad b)\cos\frac{5\pi}{12}\quad c)\sin\frac{\pi}{12}\quad d)\sin\frac{5\pi}{12}\quad e)\tan\frac{\pi}{12}\quad f)\tan\frac{7\pi}{12}$

الحل:

في مثل هذه الأسئلة نحاول كتابة الزاوية على شكل جمع أو طرح زوايا مشهورة قيم مثلثياتها معروفة

$a)$ يمكن كتابة $\frac{\pi}{12}$ على شكل: $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ وباستخدام المتطابقة ٢) يكون لدينا:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0.97$$

$b)$ بنفس الطريقة وباستخدام المتطابقة ١) يكون لدينا:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.26$$

$c)$ باستخدام المتطابقة ٤) يكون لدينا:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.26$$

$d)$ باستخدام المتطابقة ٣) يكون لدينا:

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0.97$$

$e)$ باستخدام المتطابقة ٦) يكون لدينا:

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{٣}}=2-\sqrt{3}\approx 0.27$$

f) باستخدام المتطابقة ٥) يكون لدينا:

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=-2-\sqrt{3}\approx -3.73$$

تمارين

تمرين ١: لتكن θ زاوية حادة بحيث $\sin\theta=\frac{a}{b}$. أوجد $\cos\theta$ و $\tan\theta$

تمرين ٢: لتكن الزاوية θ في الربع الثاني بحيث $a>0\ b>0$, $\tan=-\frac{b}{a}$. أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

تمرين ٣: اختصر كلا مما يلي:

$a)\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$ $\quad b)\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}$ $\quad c)\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}$ $\quad d)\frac{1-\cos^2 t}{\tan^2 t}$

$e)\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$ $\quad f)\frac{\sin x}{\sin x+1}+\frac{\cos x}{\sin x-1}$ $\quad g)\cos t-\frac{1}{\cos t}$ $\quad h)\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$

تمرين ٤: باستخدام $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ أوجد القيم الحقيقية لـ $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}$

تمرين ٥: أوجد القيم الحقيقية للمثلثات التالية:

$a)\cos\frac{3\pi}{4}$ $\quad b)\sin\frac{2\pi}{3}$ $\quad c)\cos\frac{4\pi}{3}$ $\quad d)\sin\frac{7\pi}{12}$ $\quad e)\tan\frac{7\pi}{6}$ $\quad f)\sin 240^\circ$ $\quad g)\cos 210^\circ$

تمرين ٦: ليكن $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ و $\cos\beta=\frac{3}{5}$ حيث α موجودة في الربع الثالث و β في الربع الأول. أوجد قيم:

$a)\sin(\alpha+\beta)$ $\quad b)\tan(\alpha+\beta)$

تمرين ٧: بين أن:

$a)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\quad b)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\quad c)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\quad d)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$d)\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\quad e)\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\quad f)\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad c)\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

رياضيات تخصصية

الهندسة المستوية والفراغية

الهندسة المستوية والفراغية

٤

اسم الوحدة: الهندسة المستوية والفراغية

الجدارة: الالمام بمبادئ الهندسيةالمستوية والفراغية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- الأشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية- المثلث- الدائرة)
- قوانين حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية
- الأشكال الهندسية الفراغية (المكعب- الإسطوانة- المخروط- الكرة)
- قوانين حساب المساحة الجانبية وحجم الأشكال الهندسية الفراغية

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات

الهندسة المستوية والفراغية

١. الهندسة المستوية

الأشكال الهندسية المستوية المشهورة تنقسم إلى قسمين هما:

- المضلعات.
- الدائرة.

١,١. الأشكال الرباعية

الشكل الرباعي هو كل شكل له أربعة أضلاع، وباستثناء شبه المنحرف نجد أن هذه الأشكال جميعا تشترك في صفات واحدة هي:

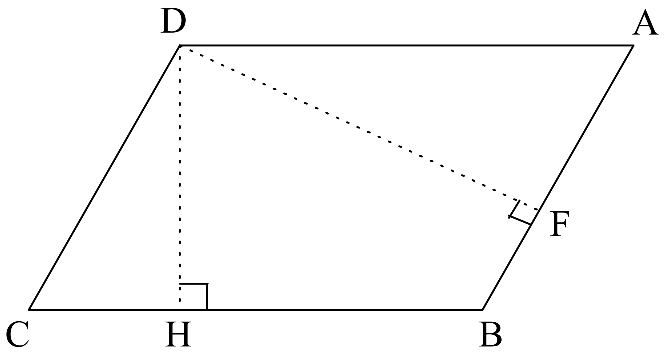
a) كل ضلعين متقابلين فيها متوازيان ومتطابقان (متساويان).

b) كل زاويتين متقابلتين متساويتان.

c) القطران ينصف كل منهما الآخر.

١,١,١. متوازي الأضلاع

محيط متوازي الأضلاع يعطى بالقاعدة التالية:



$P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين)

$= 2(AB + AD)$

وبشكل عام فإن محيط أي شكل هندسي يساوي مجموع أطوال أضلاعه ومساحته:

$A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليه

$$A = DH \times CB \quad or \quad A = DF \times AB$$

ملاحظة

- قاعدة متوازي الأضلاع هي أي ضلع من أضلاعه الأربعة.
- ارتفاع متوازي الأضلاع هو العمود النازل من أي رأس من رؤوسه على الضلع المقابل لهذا الرأس.
- القاعدة الصغرى يقابلها الارتفاع الأكبر والقاعدة الكبرى يقابلها الارتفاع الأصغر.

مثال ١: متوازي أضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8cm, 14cm$. احسب محيطه ومساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر $5cm$.

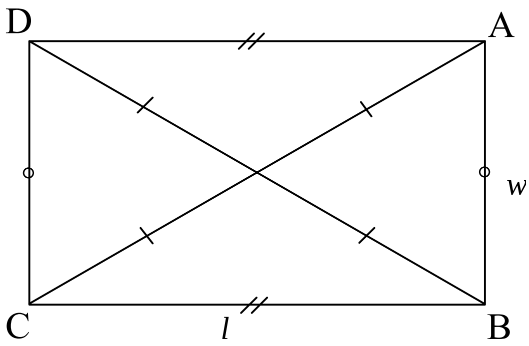
الحل:

المحيط يعطى بالقاعدة التالية: $P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين) ومنه

$$P = 2(8+14) = 44\,cm$$

المساحة: بما أن الارتفاع الأصغر يقابل القاعدة الكبرى والمساحة تعطى بالقاعدة التالية:

$A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع $= 5\times 14 = 70\,cm^2$



٢,١,١. المستطيل

هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة.

- **المحيط**

$$= 2(AB + AD)$$

$P = 2\,[$ الطول (l) + العرض $(w)]$

- **المساحة**

$$= AB \times AD$$

$A =$ الطول (l) × العرض (w)

مثال ٢: مستطيل طوله $17\,cm$ وعرضه $11cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 2\,[$ الطول (l) + العرض $(w)] = 2(11+17) = 56\,cm$

المساحة: $A =$ الطول (l) × العرض (w) $= 11\times 17 = 187\,cm^2$

مثال ٣: مستطيل مساحته $320\,cm^2$، فإذا كان عرضه 16. احسب محيطه.

الحل:

الطول (l) = المساحة $(A) \div$ العرض (w)

$$l = \frac{320}{16} = 20cm$$

ومنه المحيط (P)

$P = 2\,[$ الطول (l) + العرض (w) $= 2(16+20) = 72\,cm]$

مثال ٤: مستطيل عرضه $7cm$ وطوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه. احسب كل من محيطه ومساحته.

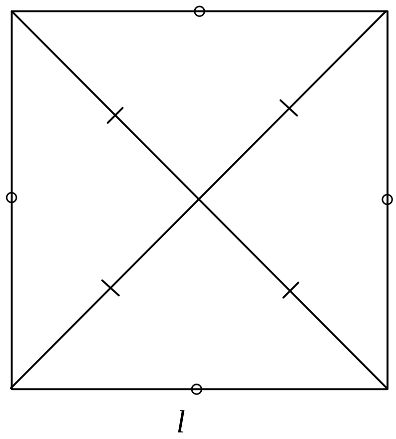
الحل:

بما أن طول المستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه إذاً طوله (L): $L = 3\times 7 = 21cm$

المحيط: $P = 2\ [$الطول (l) + العرض $(w)]$ $= 2(7+21) = 56cm$

المساحة: $A =$ الطول $(l) \times$ العرض (w) $= 7\times 21 = 147cm^2$

٣,١,١. المربع



هو مستطيل جميع أضلاعه متساوية

- **محيط المربع** (P): $P = 4\times$ طول الضلع (l) $= 4l$
- **مساحة المربع** (A): $A =$ الضلع $(l)\times$ الضلع (l) $= l^2$

مثال ٥: مربع طول ضلعه $9cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4\times$ طول الضلع (l) $= 4l = 4\times 9 = 36cm$

المساحة: $A =$ الضلع $(l)\times$ الضلع (l) $= l^2 = 9^2 = 81cm^2$

مثال ٦: مربع محيطه $48cm$ احسب مساحته.

الحل:

طول ضلع المربع: $l = P\div 4 = 48\div 4 = 12cm$

المساحة: $A = l^2 = (12)^2 = 144cm^2$

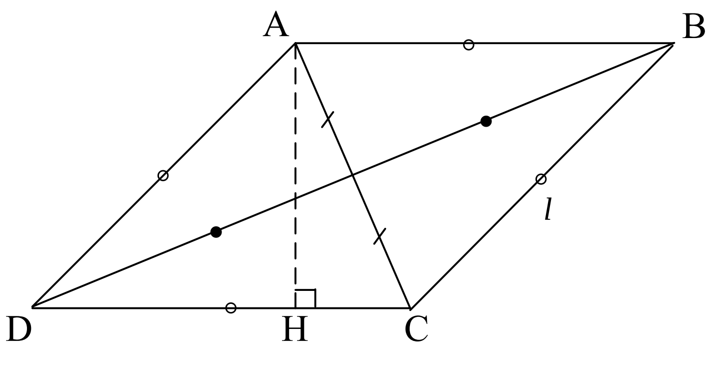
مثال ٧: مربع مساحته $49cm^2$ احسب محيطه.

الحل:

طول الضلع: $l = \sqrt{A} = \sqrt{49} = 7cm$

المحيط: $P = 4\times$ طول الضلع (l) $= 4l = 4\times 7 = 28cm$

٤,١,١. المعين



هو متوازي أضلاع يتميز بالخواص الآتية:

a) كل ضلعين متقابلين متوازيان.

b) أضلاعه الأربعة متساوية.

c) كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان ولا يشترط أن تكون قائمة.

d) قطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وكل قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينها.

- **محيط المعين** $P = 4 \times$ طول الضلع (l)
- **مساحة المعين** $A = DC \times AH$

أي أن المساحة = طول القاعدة × طول الارتفاع

ويمكن إيجاد المساحة بدلالة القطرين حيث تكون المساحة

$A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني)

مثال ٨: قطعة سجاد على شكل معين طول ضلعه $13cm$ وطول ارتفاعه $5cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4 \times$ طول الضلع $(l) = 4l = 4 \times 13 = 52\,cm$

المساحة: $A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع $= 13 \times 6 = 78\,cm^2$

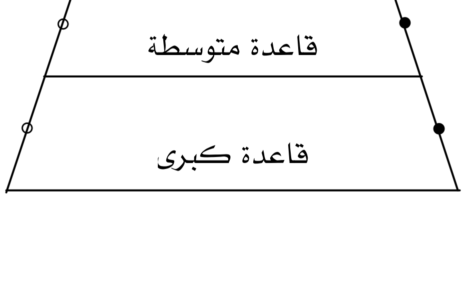
مثال ٩: غرفة على شكل معين طولا قطريها $4m, 7m$ أراد صاحبها رصفها ببلاط سعر المتر المربع منه 15 ريال، احسب التكلفة

الحل:

مساحة الغرفة $A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني) $= \frac{1}{2}(4 \times 7) = 14\,m^2$

التكلفة: $14 \times 15 = 210$ ريال

٥,١,١. شبه المنحرف



هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويين ويسميان قاعدتي شبه المنحرف الصغرى والكبرى.

- **محيط شبه المنحرف :** مجموع أطوال أضلاعه الأربعة $= P$
- **مساحة شبه المنحرف**

نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى × طول الارتفاع $= A$

أو: طول قاعدته المتوسطة × طول الارتفاع $= A$

حيث طول القاعدة المتوسطة يساوي نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى.

مثال ١٠: شبه منحرف قاعدته المتوسطة طولها $17cm$ وطول ارتفاعها $11cm$. احسب مساحته.

الحل:

$$A = \text{طول قاعدته المتوسطة} \times \text{طول الارتفاع} = 17 \times 11 = 187cm^2$$

٢,١. المثلث

هو شكل يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا مجموع زواياه الداخلية 180°

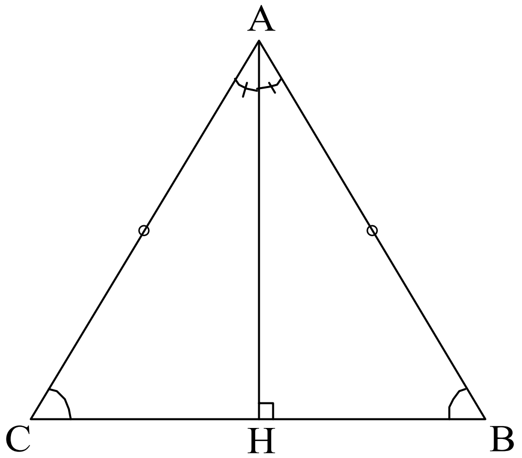
أنواعه:

a) متساوي الأضلاع.

b) متساوي الساقين .

c) مختلف الأضلاع.

d) المثلث القائم الزاوية.



والشكل المقابل يبين مثلث متساوي الساقين والعمودي من رأس المثلث A على الضلع CB ينصف الزاوية $\angle CAB$

- **محيط المثلث**

محيط المثلث يعطى بمجموع أضلاعه $P = AB + BC + CA$

- **مساحة المثلث**

مساحة المثلث تعطى بالقاعدة التالية:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{طول الارتفاع النازل عليها} = \frac{1}{2} \times CB \times AH$$

مثال ١١: أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته $12cm$ وطول ارتفاعه $8cm$.

الحل:

مساحة المثلث : $A = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{طول الارتفاع النازل عليها} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48cm^2$

مثال ١٢: مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $7cm$. احسب طول محيطه وإذا كان طول ارتفاعه $8cm$. فاحسب مساحته.

الحل:

المحيط: $P = 3 \times 7 = 21cm$

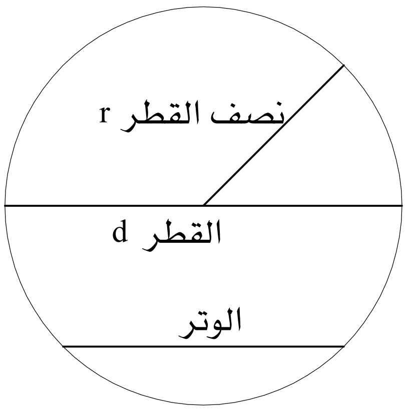
المساحة: $A = \frac{7 \times 8}{2} = 28cm^2$

٣,١. الدائرة

هي مجموعة النقاط التي تبعد نفس البعد عن نقطة ثابتة ، هذه النقطة تسمى بمركز الدائرة والبعد الثابت يسمى نصف قطر الدائرة

تعريفات

- نصف قطر لدائرة: هو قيمة ثابتة دائما بالنسبة للدائرة الواحدة وهو المسافة بين مركز الدائرة و أية نقطة على محيطها.
- قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة والمارة بمركز الدائرة
- وتر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة
- مجموعة النقاط التي تمثل الدائرة تسمى محيط الدائرة
- المساحة المحصورة داخل نطاق المحيط تسمى مساحة الدائرة.



- **محيط الدائرة**

محيط الدائرة التي نصف قطرها r هو: $P = 2\pi r$

حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) و تساوي

$$\frac{22}{7} \approx 3,142$$

- **مساحة الدائرة:**

مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي: $A = \pi r^2$

مثال ١٣: سجادة دائرية الشكل طول قطرها $2.8m$ احسب كلا من طول محيطها ومساحتها.

الحل:

نصف القطر: $r = \frac{2.8}{2} = 1.4m$

المحيط: $P = 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 1.4 \approx 8.8m$

المساحة: $A = \pi r^2 = 3.14 \times (1.4)^2 \approx 6.2m^2$

مثال ١٤: حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66m$ احسب مساحتها

الحل:

نصف القطر: $r = 66 \div 3.14 \approx 21\ m$

المساحة: $A = \pi r^2 = 3.14 \times (21)^2 \approx 1385m^2$

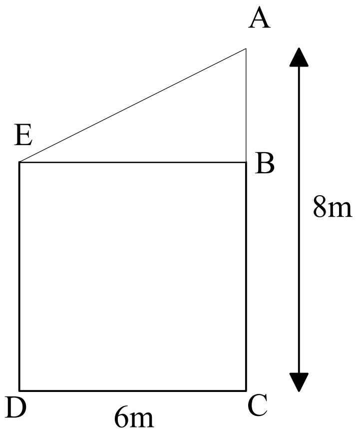
تمارين

١) قطعة خشب على شكل متوازي الأضلاع طول قاعدتها $15cm$ وارتفاعها $6cm$ ، ما مساحتها؟

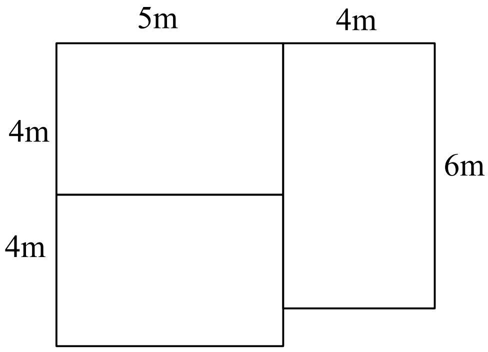
٢) متوازي الأضلاع مساحته مساحة مربع طول ضلعه $12cm$ ، احسب طول قاعدة متوازي الأضلاع إذا علمت أن طول ارتفاعه $10cm$.

٣) لوح معدني على شكل متوازي الأضلاع، طول قاعدته $50cm$ ، وطول ارتفاعه $10cm$ ، كم لوحا من هذا النوع نحتاج لرصف محل تجاري مساحته $12.35m^2$ ؟

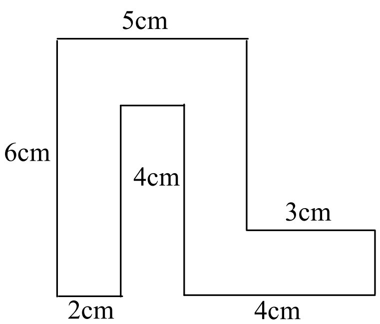
٤) الشكل المقابل يمثل المضلع $ABCDE$ ، حيث $BCDE$ مربع. احسب مساحة $ABCDE$ إذا كان طول AC يساوي $8m$ وطول CD يساوي $6m$.

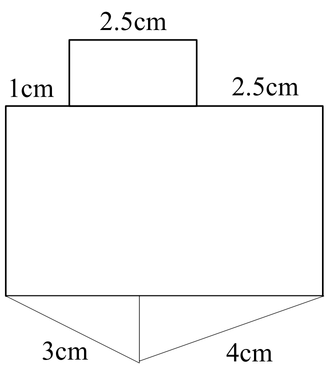


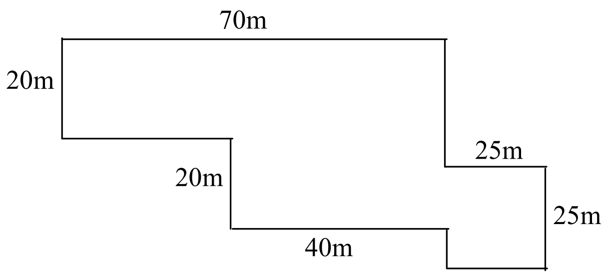
٥) الشكل المقابل يمثل مخطط بيت مؤلف من ثلاث غرف. احسب مساحة هذا البيت.



٦) أوجد مساحة كل من الأشكال التالية:

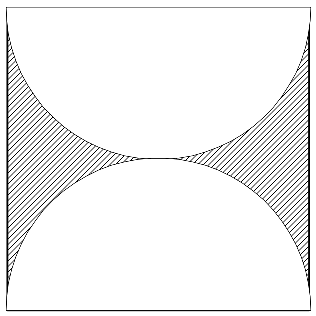






٧) دراجة هوائية طول قطر عجلتها $42cm$ ، احسب المسافة التي تقطعها الدراجة عندما تدور العجلة 560 دورة.

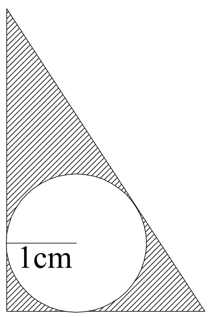
٨) احسب مساحة الجزء المظلل في الشكل المقابل

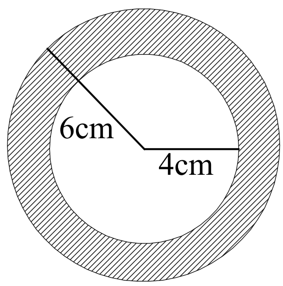


٩) أرض مستطيلة الشكل عرضها $60m$ ، نريد أن نبني فيها حديقة أكبر ما يمكن، ما هي مساحة هذه الحديقة؟

١٠) طاولة طعام، وسطها مستطيل طوله $220cm$ وأطرافها نصف دائرة قطرها $140cm$. ما محيط هذه الطاولة؟ وما مساحتها؟

١١) احسب مساحة الجزء المظلل في كل من الأشكال التالية:





١٢) حديقة مربعة الشكل طول ضلعها $27m$ ، أنشأنا في وسطها حوض ماء دائري الشكل، طول نصف قطره $10m$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٣) حديقة مستطيلة الشكل، بعداها $27m,39m$ ، أقمنا بمحاذاة محيطها ممرا عرضه $127cm$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٤) مربع ودائرة لهما نفس المحيط ، ويساوي $31.4cm$ أيهما أكبر مساحة ؟

١٥) مربع ومستطيل لهما نفس المساحة وتساوي $81cm^2$. أوجد طول ضلع المربع ومحيط المستطيل إذا كان طوله يساوي ضعف طول المربع.

١٦) مربع ومستطيل لهما نفس المحيط، إذا كان طول المستطيل $17m$ وعرضه $12m$. أوجد مساحة المربع.

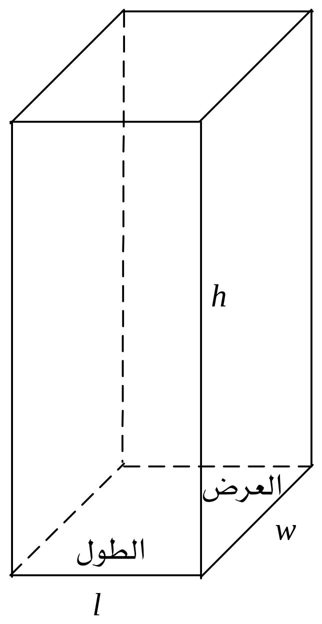
٢. الهندسة الفراغية

تعريفات

- الأشكال المجسمة: وهي الأشكال التي لها ثلاثة أبعاد وهي الطول والعرض والارتفاع.
- المساحة الجانبية للجسم: و هي مجموع مساحات الأوجه الجانبية لكل جسم أو مساحة السطح الجانبي للجسم.
- المساحة السطحية (الكلية) للجسم: هي عبارة عن المساحة الجانبية للجسم مضافا إليها مساحة قاعدتي الجسم إذا كان له قاعدتان أو مساحة قاعدة الجسم إذا كان له قاعدة واحدة مثل المخروط.
- حجم الجسم: بصفة عامة حجم أي جسم هو مقدار ما يشغله هذا الجسم من الفراغ.

٢,١. متوازي المستطيلات

هو جسم كل أوجهه مستطيلات و كل وجهين متقابلين منه متطابقان، وإحدى هذين الوجهين المتقابلين يسميان بقاعدتي متوازي المستطيلات.



وللمتوازي المستطيلات أبعاد ثلاثة: الطول l، والعرض w والارتفاع h.

- **المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات:**

$$A = 2(l \times w + l \times h + w \times h)$$

- **حجم متوازي المستطيلات** $V = l \times w \times h$

مثال ١٥: متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي $7cm, 9cm, 11cm$.

احسب مساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المعطيات $w = 7, l = 9, \ h = 11$

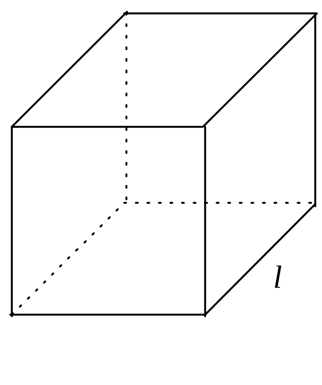
المساحة الكلية :

$$A = 2(l \times w + l \times h + w \times h) = 2(9 \times 7 + 9 \times 11 + 7 \times 11) = 2(63 + 99 + 77) = 478 cm^2$$

الحجم:

$$V = l \times w \times h = 9 \times 7 \times 11 = 693 cm^3$$

٢,٢. المكعب



هو جسم له ستة أوجه متطابقة، كل وجه منها عبارة عن مربع وكل أحرفه الجانبية متساوية وأي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب.

إذا كان طول حرف المكعب (ضلعه) l فإن

- **مساحته الجانبية** $A_1 = 4l^2$
- **مساحته السطحية** $A_2 = 6l^2$

حجمه : $V = l^3$

مثال ١٦: وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7cm$. احسب كلا من مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للوعاء: $A_1 = 4l^2 = 4(7)^2 = 196\,cm^2$

المساحة السطحية للوعاء: $A_2 = 6l^2 = 6(7)^2 = 294\,cm^2$

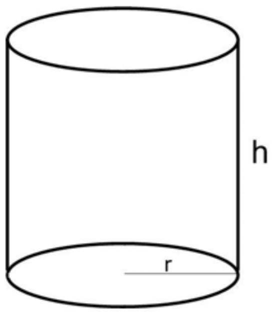
حجم الوعاء: $V = l^3 = 7^3 = 343\,cm^3$

٣,٢. الأسطوانة

و هي جسم له سطح منحني مغلق وقاعدتها عبارة عن دائرتين متطابقتين و متوازيتين.

و من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الأسطوانة.



- **المساحة الكلية للأسطوانة**

المساحة الكلية للأسطوانة التي نصف قطرها r و ارتفاعها h هي:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

- **حجم الأسطوانة**

حجم الأسطوانة التي نصف قطرها r هو: $v = \pi r^2 h$

مثال ١٧: أسطوانة نصف قطر قاعدتها $9cm$ و ارتفاعها $11cm$. أوجد كلا من مساحتها الكلية و حجمها.

الحل:

المساحة الكلية للأسطوانة: $A = 2\pi r(r + h) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (9 + 11) = 1130.97\ cm^2$

حجم الأسطوانة: $v = \pi r^2 h = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74\,cm^3$

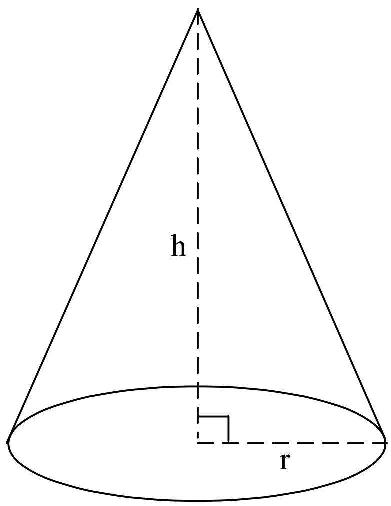
٤,٢. المخروط

وهو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r ، ورأس بعده العمودي عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط.

- **المساحة الجانبية للمخروط**

المساحة الجانبية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هي:

$$A_l = \frac{2}{3}\pi r h$$



- **المساحة الكلية للمخروط**

المساحة الكلية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هي:

$$A_T = \frac{2}{3}\pi r h + \pi r^2$$

- **حجم المخروط:**

حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h يعطى بالقاعدة :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مثال ١٨: مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $r = 14cm$ وطول ارتفاعه $h = 11cm$ احسب مساحته الجانبية والكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للمخروط: $A_l = \frac{2}{3}\pi r h = \frac{2}{3}\times 3.14\times 14\times 11 = 322.38cm^2$

المساحة الكلية للمخروط:

$$A_T = \frac{2}{3}\pi r h + \pi r^2 = \pi r\left(\frac{2}{3}h + r\right) = 3.14\times 14\times\left(\frac{2}{3}\times 11 + 14\right) = 43.96\times 21.34 = 937.81cm^2$$

حجم المخروط:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times 3.14\times (14)^2\times 11 = 2256.61cm^3$$

- **٥,٢. الكرة**

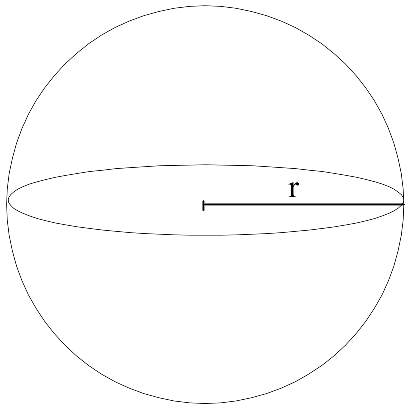
هي جسم ذات سطح منحني مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبتعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة داخل الكرة وتسمى هذه النقطة بمركز الكرة.

- **المساحة السطحية للكرة**

المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي: $A = 4\pi r^2$

- **حجم الكرة**

حجم الكرة التي نصف قطرها r هو: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



مثال ١٩: كرة نصف قطرها $17\,cm$. احسب كلا من حجمها ومساحتها السطحية.

الحل:

المساحة السطحية للكرة :

$$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times 17^2 = 3631.68\,cm^2$$

حجم الكرة:

$$A = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 2.57953cm^3$$

تمارين

١) بناء على شكل متوازي المستطيلات، طوله $17m$، وعرضه $13m$، وارتفاعه $8m$. ما مساحة قاعدة هذا البناء؟ وما هو حجمه؟

٢) كرة حديدية، حجمها $850cm^3$، رميناها في وعاء مملوء بالماء، فأزاحت كمية من الماء، جمعناها في إناء بشكل متوازي المستطيلات، طول قاعدته $13cm$، وعرضها $11cm$. إلى أي علو يرتفع الماء في هذا الإناء؟

٣) نريد صنع علبة من صفيحة معدنية الشكل،طولها $84cm$ وعرضها $25cm$، عند كل زاوية قصصنا مربعا، طول ضلعه $5cm$، ثم طوينا الجوانب، ولحمناها. كم سعة العلبة الحاصلة؟

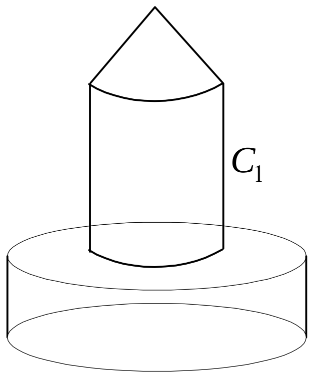
٤) وعاء على شكل مكعب طول ضلعه $19cm$ وضع به ماء إلى ارتفاع $9cm$ ثم ألقي به حجر فزاد ارتفاع الماء إلى $13cm$. أوجد حجم الحجر.

٥) علبة من الصابون على شكل مكعب طول ضلعه $27cm$. كم علبة من الصابون يمكن وضعها في صندوق مكعب الشكل طول ضلعه $13m$ إذا علمت أن $\frac{2}{17}$ الحجم مخصصة للتوضيب؟

٦) احسب حجم المخروط إذا كان نصف قطر قاعدته يساوي $13cm$ وطول ارتفاعه يساوي ضعف نصف قطر قاعدته.

٧) كرة واسطوانة لهما نفس الحجم. إذا كان نصف قطر الكرة يساوي $7cm$ أوجد نصف قطر الأسطوانة إذا كان طول ارتفاعها يساوي $12cm$.

٨) قطعة معدنية مكونة من أسطوانتين C_1,C_2 فوقهما مخروط. إذا كان نصف قطر الأسطوانة C_2 ضعف نصف القطر C_1 والمخروط له نفس الارتفاع h ونفس نصف قطر الأسطوانة C_1. نسمي V_1 حجم الأسطوانة C_1 و V_2 حجم الأسطوانة C_2 و V_3 حجم المخروط. احسب طول ارتفاع الأسطوانة C_2 بدلالة h إذا علمت أن $V_2 = V_1 + V_3$.



رياضيات تخصصية

مقدمة في الإحصاء و الإحتملات

مقدمة في الإحصاء والإحتملات

٥

اسم الوحدة: مقدمة في الإحصاء والإحتملات

الجدارة: معرفة مبادئ في الاحتمالات والقدرة على ترتيب البيانات الإحصائية وتمثيلها وحساب بعض القيم المتعلقة بها..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- تحديد فضاء العينة
- حساب الاحتمالات
- حساب الاحتمال الشرطي
- ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية
- حساب المتوسط والتباين والانحراف المعياري والوسيط والمنوال لعينة ما.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: اثنا عشر ساعة

مقدمة في الإحصاء

الإحصاء هو أحد فروع الرياضيات الذي يعنى بترتيب البيانات وتحليلها وتفسيرها بغرض اتخاذ قرار ما، بينما الاحتمالات هي الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية. واستعمل الناس منذ القدم الاحتمالات والإحصاء لأسباب عقدية وصحية واقتصادية وغيرها. ولكن تأسيس الاحتمالات بشكله الرياضي تم خلال مراسلات كانت بين الفرنسيين *Pierre de Fermat* و *Blaise Pascal* في سنة ١٦٥٤م. بينما يعتبر الإنجليزي *John Graunt* هو أول من قام بتحليل إحصائي في سنة ١٦٦٢م، من خلال دراسته لعدد الوفيات نتيجة أوبئة أصابت مدينة لندن.

وتطبيقات الاحتمالات والإحصاء كثيرة في مختلف الميادين خاصة في الظواهر المعقدة التي يصعب دراستها بدقة.

١. المجموعات:

تعريف١: نسمي مجموعة كل قائمة أشياء أو أعداد أو خليط منهما، وكل شيء من القائمة أو عدد منها هو عنصر من المجموعة.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تعريف مجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها بدلا من سرد قائمة عناصرها.

مثال١: هذه مجموعات معرفة بالقائمة:

$$A = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$
$$C = \{-6,-3,0,3,6,9,12,15\}$$

وهذه المجموعات نفسها معرفة بالخاصية:

$A = \{$ عدد صحيح موجب محصور بين 0 و 5 $\}$

$B = \{$ عدد فردي محصور بين 1 و9 $\}$

$C = \{$ عدد صحيح يقبل القسمة على 3 ومحصور بين -6 و15 $\}$

تعريف٢: نقول عن مجموعة S إنها منتهية إذا كانت قائمتها منتهية أي أن عدد عناصرها هو عدد صحيح غير سالب. في هذه الحالة، نرمز لعدد عناصر S بالرمز: $card(S)$.

مثال ٢: المجموعات المعرفة في المثال ١ كلها منتهية:

$$card(A)=6, \quad card(B)=5, \quad card(C)=8$$

تعريف ٣: نقول عن مجموعة A إنها مجموعة جزئية من مجموعة S إذا كانت قائمة A جزء من قائمة S . نرمز لذلك بالرمز: $A \subseteq S$ ونرمز لغير ذلك بالرمز: $A \not\subset S$ ..

مثال ٣: نعتبر المجموعات التالية:

$$A=\{1,2,3\}, \quad B=\{0,1,2,3,4,8\}, \quad C=\{-1,0,2,3,5,8\}, \quad D=\{-1,2,5\}$$

المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B ولكن ليست مجموعة جزئية من المجموعة C لأن 1 غير موجود في قائمة C .

بينما المجموعة D مجموعة جزئية من المجموعة C .

تعريف ٤: المجموعة الخالية ϕ هي المجموعة بدون أي عنصر، أي أن: $card(\phi)=0$.

تعريف ٥: الجداء الديكارتي $A \times B$ لمجموعتين غير خاليتين A و B هو مجموعة الأزواج (a,b) بحيث a عنصر من A و b عنصر من B .يمكن تعميم الجداء الديكارتي إلى عدة مجموعات بطريقة مماثلة.

مثال ٤: نعتبر المجموعات التالية:

$$A=\{0,1,2,5\}, \quad B=\{5,9\}, \quad C=\{0,1\}$$

احسب كلا مما يلي:

$$1)\ A \times B, \quad 2)\ A \times B \times C$$

الحل:

$$1)\ A \times B=\{(0,5),(0,9),(1,5),(1,9),(2,5),(2,9),(5,5),(5,9)\}$$

$$\begin{aligned}2)\ A \times B \times C=\{&(0,5,0),(0,9,0),(1,5,0),(1,9,0),(2,5,0),(2,9,0),(5,5,0),(5,9,0),\\ &(0,5,1),(0,9,1),(1,5,1),(1,9,1),(2,5,1),(2,9,1),(5,5,1),(5,9,1)\}\end{aligned}$$

نظرية ١: إذا كانت المجموعتان A و B منتهيتين فإن:

$$card(A \times B)=card(A) \times card(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون إلى عدة مجموعات.

مثال ٥: في المثال السابق:

$$card(A \times B)=card(A) \times card(B)=4 \times 2=8$$

$$card(A \times B \times C)=card(A) \times card(B) \times card(C)=4 \times 2 \times 2=16$$

٢. فضاء العينة:

تعريف ٦: نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة.

مثال ٦: هذه تجارب:

١) فحص مصباح كهربائي لتقرير هل هو معيب أم لا؟

٢) سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام $1,2,3,4,5,6$ وملاحظة أي رقم سيظهر.

٣) اختيار شخص عشوائيا وسؤاله هل يعجبه نوع جديد من السيارات؟

٤) إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الجهات التي ستظهر (الكتابة أم الصورة).

٥) إلقاء قطعة نقود مرتين وملاحظة الجهات التي ستظهر.

تعريف ٧: فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة. نرمز له بالرمز S .

تجدر الإشارة أنه يمكن إيجاد عدة فضاءات عينة لتجربة واحدة وذلك حسب الترميز المستخدم وتصور المسألة.

مثال ٧: حدد فضاءات العينة لكل تجربة من المثال ٦.

الحل:

١) النتائج الممكنة للتجربة هي: المصباح معيب، و المصباح غير معيب. نرمز إلى الحالة الأولى بالرمز D وإلى الحالة الثانية بالرمز N . فيكون: $S = \{N,D\}$.

٢) النتائج الممكنة للتجربة هي الأرقام الستة إذن: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

٣) النتائج الممكنة للتجربة هي الأجوبة الممكنة للشخص المسؤول: تعجبه السيارة ونرمز له بالرمز: L ، ولا تعجبه ونرمز له بالرمز: D ، وبدون رأي ونرمز له بالرمز: U . فيكون: $S = \{L,D,U\}$.

٤) النتائج الممكنة للتجربة هي ظهور الكتابة ونرمز له بالرمز: T ، وظهور الصورة ونرمز له بالرمز: H . فيكون: $S = \{H,T\}$.

٥) النتائج الممكنة للتجربة هي الجهات التي تظهر في كل من الرمية الأولى والثانية. باستخدام رموز الفقرة ٤ يكون:

$$S = \{H,T\} \times \{H,T\} = \{HH, HT, TH, TT\}$$

يمكن أن نختار فضاء عينة دون التفريق بين الرمية الأولى والثانية فيكون:

$$S = \{\{H,H\},\{H,T\},\{T,T\}\}$$

وسنرى لاحقا بأن الفضاء الأول أفضل.

تعريف ٨: نسمي حدثا كل مجموعة جزئية من فضاء العينة. الحدث المستحيل هو المجموعة الخالية.

مثال ٨: نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام $1,2,3,4,5,6$ وملاحظة أي رقم سيظهر أحداث ممكنة لهذه التجربة هي كالتالي:

A : ظهور رقم فردي وقائمته هي: $A=\{1,3,5\}$ ،

B : ظهور رقم زوجي وقائمته هي: $B=\{2,4,6\}$ ،

C : ظهور رقم أكبر من 4 وقائمته هي: $C=\{5,6\}$.

مثال ٩: ليكن لدينا 4 مصابيح مرقمة من 1 إلى 4 من بينها اثنان معيبان هما: 1 و 2. نسحب اثنان عشوائيا.

١) حدد فضاء العينة للتجربة وحدد عدد عناصره.

٢) أعط قوائم الأحداث التالية: A : الحصول على مصابيح سليمة، B : الحصول على مصباح معيب واحد، C : الحصول على مصباحين معيبين، D : الحصول على مصباح معيب واحد على الأقل.

الحل:

$$1)\ S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\} \qquad card(S)=6$$
$$2)\ A=\{\{3,4\}\},\quad B=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\},\quad C=\{\{1,2\}\},$$
$$D=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2\}\}$$

تعريف ٩: يمكن أن نعرف العمليات التالية على الأحداث:

١) اتحاد حدثين $A\cup B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B أو كليهما.

٢) تقاطع حدثين $A\cap B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B في آن واحد.

٣) متممة حدث $\overline{A}$ هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في A .

قانون ديمورغان: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ و $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

مثال ١٠: نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1,2,3,4,5,6 وملاحظة أي رقم سيظهر نعتبر الأحداث التالية: A : ظهور رقم أكبر من ٣، B : ظهور رقم أصغر من ٦ ، C : ظهور رقم زوجي.

1) حدد فضاء عينة وعدد عناصره.

2) أعط قوائم الأحداث التالية: A و B و C .

3) أعط قوائم الأحداث التالية: $A\cap B$ و $A\cap C$ و $B\cap C$ و $A\cap B\cap C$ و $A\cup B$ و $A\cup C$ و $B\cup C$ و $A\cup B\cup C$.

4) أعط قوائم الأحداث التالية: $\overline{A}$ و $\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}$ و $\overline{A}\cap\overline{B}$.

5) صف باستخدام جمل أحداث الفقرة 4.

الحل:

$1)\ S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad card(S)=6$

$2)\ A=\{4,5,6\},\quad B=\{1,2,3,4,5\},\quad C=\{2,4,6\},$

$3)\ A\cap B=\{4,5\},\quad A\cap C=\{4,6\},\quad B\cap C=\{2,4\},\quad A\cap B\cap C=\{4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S,\quad A\cup C=\{2,4,5,6\},\quad B\cup C=S,\quad A\cup B\cup C=S$

$4)\ \overline{A}=\{1,2,3\},\quad \overline{B}=\{6\},\quad \overline{A\cup B}=\{\}=\phi,\quad \overline{A}\cap\overline{B}=\{\}=\phi$

5) $\overline{A}$: ظهور رقم أصغر من 4، $\overline{B}$: ظهور رقم أكبر من 5،

$\overline{A\cup B}$: ظهور رقم لا يكون أكبر من 3 أو أصغر من 6،

$\overline{A}\cap\overline{B}$: ظهور رقم أصغر من 4 و أكبر من 5.

٣. فضاء الاحتمالات:

تعريف ١٠: نقول عن فضاء العينة متنه S إنه متساوي الاحتمالات إذا كانت كل نتيجة منه لها نفس حظ الوقوع.

في هذه الحالة، يكون احتمال حدث A معرفا كما يلي: $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(S)}$.

مثال ١١: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرة واحدة.

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{H,T\}$ وهو فضاء عينة متساوي الاحتمالات لأن قطعة النقود متزنة. ومنه فإن احتمال ظهور الصورة هو:

$$P(\{H\})=\frac{card(\{H\})}{card(S)}=\frac{1}{2}=50\%$$

سنكتب $P(H)$ بدلا من $P(\{H\})$ تسهيلا للكتابة. وكذا بالنسبة للأحداث المتكونة من نتيجة واحدة.

واحتمال ظهور الكتابة سيكون:

$$P(T)=P(\{T\})=\frac{card(\{T\})}{card(S)}=\frac{1}{2}=50\%$$

مثال ١٢: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرتين.

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{H,T\}\times\{H,T\}=\{HH,HT,TH,TT\}$ وهو فضاء عينة متساوي الاحتمالات لأن قطعة النقود متزنة. ومنه فإن احتمال ظهور الصورة مرتين هو:

$$P(HH)=\frac{card(\{HH\})}{card(S)}=\frac{1}{4}=25\%$$

بينما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة فقط هو:

$$P(\{HT,TH\}) = \frac{card(\{HT,TH\})}{card(S)} = \frac{2}{4} = 50\%$$

لكن لو اعتبرنا فضاء العينة التالي: $S' = \{\{H,H\},\{H,T\},\{T,T\}\}$ فإنه غير متساوي الاحتمالات لأن النتيجة $\{H,T\}$ وهي ظهور الصورة مرة واحدة فقط لها حظ وقوع ضعف حظ وقوع النتيجة $\{H,H\}$ وهي ظهور الصورة مرتين.

مثال ١٣: نعتبر تجربة المثال ١٠. احسب احتمالات الأحداث A و B و C .

الحل:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad card(S) = 6$$

$$A = \{4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5\}, \quad C = \{2,4,6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = 50\%, \quad P(B) = \frac{5}{6} \cong 83.33\%, \quad P(C) = \frac{3}{6} = 50\%$$

تعريف ١١: إذا كان لدينا فضاء عينة منته فيمكن تعريف احتمال حدث وفق الشروط التالية:

١) أن يكون احتمال كل نتيجة ممكنة هو نسبة مئوية موجبة أي عدد حقيقي محصور بين 0 و 1.

٢) أن يكون مجموع احتمالات كل النتائج الممكنة (المكونة لفضاء العينة) يساوي 1 أو ٪100.

في هذه الحالة، يكون احتمال الحدث المستحيل هو 0 ويكون احتمال حدث غير مستحيل هو مجموع احتمالات النتائج الممكنة المكونة له.

فضاء الاحتمالات هو فضاء العينة مزود باحتمالات النتائج الممكنة والتي تسمى احتمالات نقطية.

مثال ١٤: ورشة تصليح سيارات تصلح في يوم شغل واحد من 5 إلى 14 سيارة وفق الاحتمال ات التالية:

عدد السيارات	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
الاحتمال	.05	0	.17	.08	.11	.23	.06	.14	.13	.03

احسب احتمال كلا مما يلي:

1) تصليح أقل من 11 سيارة في يوم شغل واحد.

2) تصليح أكثر من 9 سيارات في يوم شغل واحد.

3) تصليح من 8 إلى 13 سيارة.

4) تصليح أقل من 4 سيارات.

5) تصليح أكثر من 20 سيارة.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$. ونرمز بالرموز A و B و C و D و E للأحداث الموافقة للفقرات 1 إلى 5 على الترتيب.

الاحتمالات النقطية معطاة في الجدول وبالتالي فلدينا فضاء احتمالات لأن كل الاحتمالات النقطية محصورة بين 0 و 1 وكذلك مجموعها يساوي 1.

$$\begin{aligned}
&1)\ A = \{5,6,7,8,9,10\}\\
&P(A) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)\\
&\quad\ = 0.05 + 0.00 + 0.17 + 0.08 + 0.11 + 0.23 = 64\%\\
&2)\ B = \{10,11,12,13,14\}\\
&P(A) = P(10) + P(11) + P(12) + P(13) + P(14)\\
&\quad\ = 0.23 + 0.06 + 0.14 + 0.13 + 0.03 = 59\%\\
&3)\ C = \{8,9,10,11,12,13\}\\
&P(A) = P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) + P(13)\\
&\quad\ = 0.08 + 0.11 + 0.23 + 0.06 + 0.14 + 0.13 = 75\%\\
&4)\ D = \{\} = \phi \Rightarrow P(D) = 0\\
&5)\ E = \{\} = \phi \Rightarrow P(E) = 0
\end{aligned}$$

٤. الاحتمال الشرطي

تعريف ١٢: الحدث الشرطي $B|A$ هو الحدث B بشرط وقوع الحدث غير المستحيل A (أي أن $P(A) \neq 0$). و الاحتمال الشرطي هو احتمال حدث شرطي.

نرمز لفضاء العينة الشرطي بالرمز: $S|A$ ونرمز للاحتمال الشرطي السابق بالرمز: $P(B|A)$.

مثال ١٥: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرتين.

احسب احتمال ظهور الكتابة في الرمية الثانية إذا ظهرت الصورة في الرمية الأولى.

الحل:

نرمز للأحداث كما يلي:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الكتابة في الرمية الثانية. والمطلوب هو حساب احتمال $B|A$.

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ فيكون: $S|A = \{HH, HT\}$

و $B|A = \{HT\}$ ومنه: $P(B|A) = \dfrac{card(B|A)}{card(S|A)} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

مثال ١٦: نسحب كرتين عشوائيا بدون إرجاع المسحوب من صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء. احسب احتمال أن تكون:

١) الكرة الأولى حمراء.

٢) الكرة الأولى سوداء.

٣) الكرة الثانية سوداء إذا كانت الأولى حمراء.

٤) الكرة الثانية سوداء إذا كانت الأولى سوداء.

الحل:

نرمز للأحداث التالية كما يلي:

A : الكرة الأولى حمراء، B : الكرة الأولى سوداء، C : الكرة الثانية سوداء.

فتكون الأحداث المطلوب حساب احتمالها في الفقرات من ١ إلى ٤ هي على الترتيب: A و B و $C|A$ و $C|B$.

١) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,B_1,B_2,B_3\}$ حيث R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 ترمز للكرات الحمراء و B_1,B_2,B_3 ترمز للكرات السوداء. فيكون:

$$A=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5\},\quad P(A)=\frac{5}{8}=62.5\%\neq 0$$

٢) نعتبر فضاء العينة السابق، فيكون:

$$B=\{B_1,B_2,B_3\},\quad P(B)=\frac{3}{8}=37.5\%\neq 0$$

٣) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S|A=\{R_2,R_3,R_4,R_5,B_1,B_2,B_3\}$ لأن الكرات الحمراء متماثلة فلا فرق بين سحب أي منها. ويكون: $C|A=\{B_1,B_2,B_3\}$ ومنه:

$$.\,P(C|A)=\frac{3}{7}\cong 42.86\%$$

٤) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S|B=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,B_2,B_3\}$ لأن الكرات السوداء متماثلة فلا فرق بين سحب أي منها. ويكون: $C|B=\{B_2,B_3\}$ ومنه:

$$.\,P(C|B)=\frac{2}{7}\cong 28.57\%$$

نظرية ٢: نعتبر فضاء عينة S وحدثان A و B فتكون لدينا القوانين التالية:

$$0)\ P(S)=1, \qquad P(\phi)=0$$

$$1)\ P(\overline{A})=1-P(A), \qquad P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$2)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$3)\ P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad (P(A)\neq 0)$$

مثال ١٧: نقوم بإلقاء قطعة متزنة من النقود أربع مرات.

احسب احتمال كلا مما يلي:

1) ظهور الكتابة أربع مرات.

2) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي:

$$S=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$$
$$=\{HHHH, HHHT, HTHH, THHH, ..., TTTT\}$$
$$card(S)=2\times 2\times 2\times 2=16$$

.

نرمز إلى الأحداث الموافقة للفقرتين 1 و 2 بالرمزين A و B على الترتيب.

$$1)\ A=\{TTTT\}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{16}=6.25\%$$

٢) يمكن أن نصف الحدث B كالتالي: B : عدم ظهور الكتابة أربع مرات، فيكون:

$$B=\overline{A}\Rightarrow P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{16}=93.75\%$$

وذلك باستخدام القانون ١) من النظرية السابقة.

مثال ١٨: إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات هو 70% واحتمال نجاحه في مقرر الحاسب هو 85% واحتمال نجاحه في كلا المقررين هو 73% فما هو احتمال نجاحه في مقرر الرياضيات أو مقرر الحاسب؟

الحل:

لا يمكن اعتبار فضاء عينة بسيط ومتساوي الاحتمالات. كما أننا لا نحتاج إلى ذلك لحل المثال.

نعتبر الأحداث التالية: A : نجاح الطالب في مقرر الرياضيات و B : نجاح الطالب في مقرر الحاسب

فيكون المطلوب هو حساب احتمال $A\cup B$ و تكون المعطيات كالتالي:

$$P(A)=0.7,\quad P(B)=0.85,\quad P(A\cap B)=0.73$$

ومنه باستخدام القانون ٢) من النظرية السابقة نجد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.85-0.73=82\%$$

مثال ١٩: أعد حل المثال ١٥ باستخدام القانون ٣) من النظرية السابقة.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

نرمز للأحداث كما يلي:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الكتابة في الرمية الثانية. والمطلوب هو حساب احتمال $B|A$. فيكون:

$$A=\{HH,HT\},\quad B=\{HT,TT\},\quad A\cap B=\{HT\}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=50\%$$

تعريف ١٣: نقول عن حدثين A و B إنهما مستقلان إذا كان لا تأثير لاحتمال الواحد على احتمال الآخر ، أي أن:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

وإذا لم يكونا مستقلين فنقول عنهما أنهما مرتبطان.

نظرية ٣: ليكن لدينا حدثان A و B . نحسب احتمال التقاطع كما يلي:

إذا كان الحدثان مستقلين فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

إذا كان الحدثان مرتبطين فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$

تجدر الإشارة إلى أن القانون الثاني هو القانون العام لاحتمال التقاطع في حالة عدم معرفتنا هل الحدثان مستقلان أم مرتبطان؟.

مثال ٢٠: نقوم بسحب عشوائي لمسمار واحد من مجموعة من المسامير بحيث احتمال أن يكون رقيقا جدا هو 0.1 واحتمال أن يكون قصيرا جدا إذا علمنا أنه رقيق جدا هو 0.2. احسب احتمال أن يكون المسمار رقيقا جدا وقصيرا جدا.

الحل:

لا يمكن اعتبار فضاء عينة بسيط ومتساوي الاحتمالات. كما أننا لا نحتاج إلى ذلك لحل المثال.

نرمز للأحداث كما يلي: A : أن يكون المسمار رقيقا جدا و B : أن يكون المسمار قصيرا جدا فيكون المطلوب هو احتمال $A \cap B$ والمعطيات هي:

$$P(A) = 0.1, \quad P(B|A) = 0.2$$

ما دمنا لا نعرف هل الحدثان مستقلان أم مرتبطان فنطبق القانون العام:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0.1 \times 0.2 = 2\%$$

مثال ٢١: نقوم بإلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات ونعتبر الأحداث التالية:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الصورة في الرمية الثانية، C : ظهور الصورة مرتين فقط على التوالي. ادرس استقلال كل زوج من الأحداث السابقة.

الحل:

من الواضح أن الحدثين A و B مستقلان وهذا ما سنتحقق منه. بينما العلاقة بين كلا من A و C من جهة و B و C من جهة آخر ى غير واضحة.

نعتبر فضاء العينة التالي:

$$\begin{aligned} S &= \{H,T\} \times \{H,T\} \times \{H,T\} \\ &= \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \\ card(S) &= 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

وتكون قوائم الأحداث واحتمالاتها كما يلي:

$$A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}, \quad P(A) = \frac{4}{8} = 50\%$$

$$B = \{HHH, HHT, THH, THT\}, \quad P(B) = \frac{4}{8} = 50\%$$

$$C = \{HHT, THH\}, \quad P(C) = \frac{2}{8} = 25\%$$

١) العلاقة بين A و B :

$$A \cap B = \{HHH, HHT\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = 25\% = 50\% \times 50\% = P(A) \times P(B)$$

إذن A و B مستقلان.

٢) العلاقة بين A و C :

$$A \cap C = \{HHT\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8} = 12.5\% = 50\% \times 25\% = P(A) \times P(C)$$

إذن A و C مستقلان.

١) العلاقة بين B و C :

$$B \cap C = \{HHT, THH\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{8} = 25\% \neq 12.5\% = 50\% \times 25\% = P(B) \times P(C)$$

إذن B و C مرتبطان.

مثال ٢٢: نسحب مسمارين اثنين من علبة تحتوي على 10 مسامير من بينها 3 معيبة.

احسب احتمال أن يكون المسماران سليمين إذا كان السحب:

١) بإرجاع المسحوب إلى العلبة

٢) بدون إرجاع المسحوب.

الحل:

نعتبر الأحداث التالية:

A : المسمار المسحوب الأول سليم، B : المسمار المسحوب الثاني سليم. فيكون المطلوب هو احتمال $A \cap B$

١) إذا كان السحب بإرجاع فإن الحدثين A و B مستقلان ومنه:.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 49\%$$

٢) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الحدثين A و B مرتبطان ومنه:.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \cong 46.67\%$$

تمارين

تمرين ١: نقوم بإلقاء قطعة نقود متزنة ثم نقوم بسحب عدد من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ ..

1) حدد فضاء عينة للتجربة.

2) أعط قائمة كل حدث مما يلي:

A : ظهور صورة وعدد زوجي، B : ظهور عدد أولي، C : ظهور كتابة وعدد فردي.

3) احسب احتمال كل حدث من الفقرة 2.

تمرين ٢: نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{1,2,3,4\}$. في أية حالة مما يلي يكون لدينا فضاء احتمالات:

$$1)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{3},\quad P(3)=\frac{1}{4},\quad P(4)=\frac{1}{5}$$

$$2)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=-\frac{1}{4},\quad P(4)=\frac{1}{2}$$

$$3)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=\frac{1}{8},\quad P(4)=\frac{1}{8}$$

$$4)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=\frac{1}{4},\quad P(4)=0$$

تمرين ٣: ما هو احتمال ظهور الكتابة مرة واحدة على الأقل عند إلقاء قطعة نقود متزنة 3 مرات؟

تمرين ٤: ما هو احتمال ظهور كرة بيضاء عند سحب كرة واحدة من صندوق به 4 كرات بيضاء و 3 حمراء و 5 زرقاء؟

تمرين ٥: نسحب بطاقة من علبة تحتوي على 50 بطاقة مرقمة من 1 إلى 50.

احسب احتمال كلا مما يلي:

1) سحب الرقم 7.

2) سحب رقم أصغر من 11.

3) سحب رقم أكبر من 19.

تمرين ٦: نسحب بطاقة من علبة تحتوي على 50 بطاقة مرقمة من 51 إلى 100.

احسب احتمال كلا مما يلي:

1) سحب الرقم 53.

2) سحب رقم أصغر من 61.

3) سحب رقم أكبر من 79.

تمرين ٧: نقوم بإلقاء ثلاث قطع نقود متزنة. ما هو احتمال أن تكون جميعها صورا :

1) إذا كانت الأولى صورة؟

2) إذا كانت واحدة من القطع صورة؟

3) إذا كانت واحدة على الأقل من القطع صورة؟

تمرين ٨: لدينا علبتان بكل واحدة منهما ست بطاقات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب من كل علبة بطاقة. احسب احتمال كلا مما يلي إذا سحبنا عددين مختلفين:

1) مجموعهما هو 6.

2) سحب الرقم 1.

3) مجموعهما أصغر أو يساوي 4.

٥. وسائط العينة :

تعريف ١٤ : نسمي عينة كل قائمة صغيرة نسبيا من البيانات مأخوذة من قائمة كبيرة جدا تسمى مجموعة سكانية.يصعب سردها.

وذلك بغرض دراسة العينة ومحاولة تعميم نتائج هذه الدراسة على المجموعة السكنية ككل.

مثال ٢٣ : لو أردنا أن نعرف رأي طلبة الكلية التقنية في جوانب كثيرة متعلقة بالمكتبة فإنه قد يصعب معرفة آراء جميع الطلبة في كل هذه الجوانب ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا ونجري الدراسة.

مجموع طلبة الكلية يمثلون المجموعة السكانية والمجموعة المختارة تمثل عينة.

مثال ٢٤ : لو أردنا معرفة أطوال سكان المملكة وأوزانهم بحسب أعمارهم فإنه قد يصعب تحديد ذلك لكل السكان ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا من الأشخاص من مختلف الأعمار ونجري الدراسة.

مجموع السكان يمثلون المجموعة السكانية والأشخاص المختارون يمثلون عينة.

سنكتفي في هذه الفقرة بدراسة عينات البيانات المشتملة على قيمة واحدة فقط كأطوال السكان فقط أو أعمارهم فقط أو أوزانهم فقط.

مثال ٢٥ : هذه عينة لعدد المستأجرين لـ٤٥ شقة في مدينة ما :

2, 1, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 4, 2, 6, 2, 4, 3, 1,
2, 4, 3, 1, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 2, 3, 1, 4, 2,
3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 1, 3, 4

تعريف ١٥ : طول العينة هو عدد عناصرها وتكرار عنصر ما هو عدد مرات ظهور العنصر في العينة.

مثال ٢٦ : نعتبر العينة السابقة.

١) ما هو طول هذه العينة؟

٢) أنشئ جدولا لتكرار العناصر.

الحل:

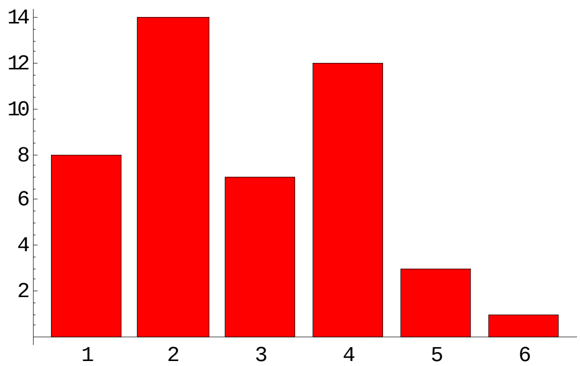
١) طول العينة هو45.

٢) يمكن أن ننشئ جدول التكرار التالي:

عدد الأشخاص	التكرار	التكرار المتراكم
1	8	8
2	14	22
3	7	29
4	12	41

5	3	44
6	1	45
المجموع	45	

كما يمكن أن نمثل العمودين الأولين من هذا الجدول باستخدام ما يسمى بالمدرجات التكرارية التي هي عبارة عن مستطيلات ارتفاعها هو تكرار العنصر كما يلي:



تعريف ١٦: لتكن لدينا العينة التالية: $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ يمكن تعريف وسائط العينة التالية:

متوسط العينة هو:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

تباين العينة هو

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \cdots + (\bar{x} - x_n)^2}{n-1}$$

الانحراف المعياري للعينة هو:

$$s = \sqrt{s^2}$$

إذا كانت عناصر العينة مرتبة من الأصغر إلى الأكبر (أو العكس) فإن وسيط العينة يعرف كما يلي:

إذا كان n فرديا فإن وسيط العينة هو: $med = x_{\frac{n+1}{2}}$

إذا كان n زوجيا فإن وسيط العينة هو: $med = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

منوال العينة هو عنصر من العينة يكون تكراره أعلى تكرار. يرمز له بالرمز: $mode$.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن أن يكون هناك عدة منوالات.

كما أنه يمكن حساب وسائط العينة المعرفة هنا باستخدام جدول التكرار.

المتوسط والوسيط والمنوال تعطينا فكرة عن متوسط القيم بينما التباين والانحراف المعياري تعطينا فكرة عن تشتت القيم.

مثال ٢٧ : احسب وسائط العينة المعرفة سابقا للمثال السابق.

الحل:

1) متوسط العينة يمثل مجموع العناصر على عددهم ويمكن حسابه مباشرة كما يمكن حسابه باستخدام جدول التكرار وذلك بضرب العنصر في تكراره ثم الجمع كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{(8\times1)+(14\times2)+(7\times3)+(12\times4)+(3\times5)+(1\times6)}{45} = 2.8$$

2) الملاحظة نفسها بالنسبة لتباين العينة:

$$s^2 = \frac{8(2.8-1)^2+14(2.8-2)^2+7(2.8-3)^2+12(2.8-4)^2+3(2.8-5)^2+1(2.8-6)^2}{45-1} \cong 1.75$$

3) الانحراف المعياري للعينة سيكون:

$$s = \sqrt{1.75} \cong 1.32$$

4) بما أن $n = 45$ فردي إذن باستخدام عمود التكرار المتراكم فإن وسيط العينة هو:

$$med = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{45+1}{2}} = x_{23} = 3$$

5) واضح من جدول التكرار بأن المنوال هو:

$$mode = 2$$

طريقة آخر ى للحل:

يمكن حساب متوسط العينة وتباينها باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي (مثلا: $CASIO\ fx-82TL$):

الخطوة الأولى: اختيار نمط الانحراف المعياري (MODE SD).

الخطوة الثانية: مسح ذاكرة النمط من البيانات (SHIFT Scl =).

الخطوة الثالثة: إدخال البيانات (إدخال العنصر ثم الضغط على DT).

الخطوة الرابعة: حساب المتوسط (SHIFT $\bar{x}$) و الانحراف المعياري (SHIFT $x\sigma_{n-1}$) ثم التباين (وهو مربع الانحراف المعياري).

مثال ٢٨ : لتكن لدينا أطوال عشرة مسامير مختارة عشوائيا ومقاسة بالسنتيمتر (سم) كما يلي:

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

احسب متوسط هذه العينة وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها.

الحل:

يمكن أن ننشئ جدولا تكراريا لهذه العينة كما يلي:

الأطوال (سم)	التكرار	التكرار المتراكم
0.80	2	2
0.81	5	7
0.82	3	10

باستخدام جدول التكرار نحسب المطلوب:

$$\bar{x} = \frac{(2\times 0.80)+(5\times 0.81)+(3\times 0.82)}{10} = 0.811\,cm$$

$$s^2 = \frac{2(0.811-0.80)^2 + 5(0.811-0.81)^2 + 3(0.811-0.82)^2}{10-1} \cong 0.000\,054\,cm^2$$

$$s = \sqrt{0.000054} \cong 0.007348\,cm$$

$$med = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{10}{2}} + x_{\frac{10}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(0.81+0.81) = 0.81\,cm$$

$$mode = 0.81\,cm$$

تمارين

تمرين ١: أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري والوسيط والمنوال للأعداد الستة التالية:

4 6 6 7 9 10

تمرين ٢: نتائج فصل في امتحان من 20 سؤال هي كما يلي:

عدد الإجابات الصحيحة	9	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
عدد الطلاب	1	2	1	2	7	2	1	7	2	6	4

أوجد وسائط هذه العينة.

تمرين ٣: احسب متوسط العينة التالية وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها:

3 4 10 4 4

لاحظ مساهمة العنصر ١٠ في التباين وعلق على ذلك.

تمرين ٤: احب المتوسط والتباين لكلا العينتين التاليتين: 111 110 109 و 115 110 105 .

قارن بين العينتين.

تمرين ٥: أنشئ المدرجات التكرارية لكل العينات السابقة

المراجع

١) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ- ١٩٨٣م.

٢) علي عبد الله الدفاع، نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك، ١٩٨٧م.

3) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

4) Anders Hald, A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, John Wiley and Sons, New York, 1989.

٥) Richard Hamming, The Art of Probability, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1991.

٦) E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1993.

٧) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

٨) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

٩) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS

BAE SYSTEMS